



# **Campos electromagnéticos**

Dios Otín, Federico  
Artigas García, David  
Recolons Martos, Jaume  
Comerón Tejero, Adolfo  
Canal Bienzobal, Ferran

## Presentación

Este libro fue concebido inicialmente como una transcripción, ligeramente reelaborada, de los apuntes de clase que, en los últimos años, se han venido impartiendo en la asignatura de *Campos electromagnéticos*, en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Telecomunicación de Barcelona.

Nuestra intención primera fue la de proporcionar a los estudiantes un texto de referencia, en el que se contuviera el armazón teórico de la asignatura, junto con numerosos ejemplos y problemas resueltos. Posteriormente esa idea inicial fue modificándose y, al fin, el texto se presenta como un cuerpo teórico completo, si bien se sigue ciñendo principalmente a aquellos contenidos que son relevantes dentro de la asignatura.

Probablemente es pretencioso, e incluso ingenuo, decir que el libro viene a llenar un hueco dentro de la literatura científica dedicada a la teoría electromagnética, que es amplísima. Sí se puede afirmar, sin embargo, que muchos de los textos clásicos han quedado como libros de consulta, y, a menudo, para el profesor o el especialista, más que para el estudiante que trata de introducirse por vez primera, y con cierto rigor, en estos temas. Esto es así porque suelen enfocarse las cuestiones desde presupuestos conceptuales y de método, por encima de las posibilidades reales de un alumno de pregrado.

En el texto hemos tratado de buscar un equilibrio adecuado entre la explicación de los fenómenos físicos y su descripción formal. Aun así somos conscientes de que el estudiante, en ocasiones, puede llegar a pensar que la dificultad real de algunos temas es más matemática que física. Esta percepción está justificada, pero sólo parcialmente: debe admitirse que la propia materia que es objeto de estudio -los campos y las ondas electromagnéticas- son realidades complejas, en sí mismas y en sus interrelaciones con los cuerpos materiales, y que precisan de una herramienta poderosa para ser abarcadas en un modelo compacto. Tal herramienta es el análisis vectorial. Todavía nos atreveríamos a añadir que sin un enfoque formal no es posible alcanzar una comprensión, ni siquiera mediana, de los fenómenos físicos que aquí se tratan. Es por eso que el estudiante debe tratar de hacer una doble ascensión, a medida que avanza en la materia, para comprender, por un lado, la esencia del problema físico, y, por otro, cómo la descripción formal con que se presenta es apropiada y abarca perfectamente todos los aspectos de la cuestión. En algún momento esta tarea puede resultar más difícil, y el estudiante no sabe cuál de los apoyos -el físico-conceptual o el matemático-formal- le está presentando dificultades. A lo largo del texto hemos tratado de

dar las suficiente pistas como para que esos problemas puedan ser superados con una relectura atenta de algunos de los párrafos previos a aquél en el que se presentó la dificultad.

El texto está dividido en seis capítulos. El capítulo primero es un repaso de Electrostática y Magnetostática. Sirve como introducción a los contenidos y herramientas utilizados en el resto del libro, y el alumno está ya suficientemente familiarizado con muchos de sus contenidos, que se han visto en cursos anteriores de Física. La asignatura de *Campos electromagnéticos*, tal como se ve en muchas escuelas técnicas, y particularmente en la ETSET de Barcelona, comienza con el capítulo segundo. En él se tratan las ecuaciones de Maxwell, de su significado físico y de los principios de índole más general que se derivan de ellas, que se aplican profusamente de allí en adelante. El capítulo tercero está dedicado a las ondas planas uniformes, y constituye el meollo de la asignatura, porque a pesar de no ser un tema de especial dificultad, es la base inmediata para el estudio de muchos otros fenómenos de interés práctico en el área de la Telecomunicación. El capítulo cuarto trata de la incidencia de ondas planas sobre medios materiales. Como es habitual se reduce a los casos sencillos de incidencia sobre superficies planas. De nuevo se trata de un tema muy asequible, pero que plantea situaciones de elevado interés conceptual y práctico. Los dos últimos capítulos están dedicados a cuestiones más aplicadas, como son la propagación guiada (capítulo quinto) y la radiación de antenas elementales y de tipo dipolo (capítulo sexto). Estos dos últimos temas constituyen una introducción inmediata a algunas asignaturas de cursos posteriores.

Para finalizar, cabe tan sólo pedir comprensión al lector por los posibles errores o deficiencias que pueda hallar en el texto, que, en cualquier caso, ha sido cuidadosamente revisado. Las diferencias de estilo que pueden detectarse a lo largo del libro obedecen a que la redacción de cada capítulo ha sido realizada por un autor diferente, si bien con un acuerdo general previo acerca de los contenidos. En las revisiones conjuntas posteriores no hemos tratado de limar esas diferencias, que son legítimas y dan, incluso, mayor riqueza a la obra. Lo mismo puede decirse respecto a posibles repeticiones de algunos conceptos en diferentes capítulos. Pensamos que conviene dejarlas para hacer más asequible la introducción de los nuevos temas que van apareciendo.

No podemos dejar de agradecer el ánimo constante que hemos recibido de algunas de las personas de Ediciones UPC, que publica esta obra. También queremos reconocer la tarea y las aportaciones de otros profesores del Departamento, como son Lluís Torner, Juan P. Torres y Jordi Hernández, que en años anteriores han impartido la asignatura de Campos, y que no han tenido tiempo material para embarcarse personalmente en la confección del libro.

Los autores  
Barcelona, julio de 1998.

## Índice

### Capítulo 1 Campos eléctricos y magnéticos en condiciones estáticas

1.1 El campo eléctrico en el vacío	15
1.1.1 Ley de Coulomb. Definición de campo eléctrico	15
1.1.2 Cargas puntuales y distribuciones de carga	16
1.1.3 Ley de Gauss	21
1.1.4 Potencial eléctrico. Carácter conservativo del campo electrostático	23
1.1.5 Representación espacial del campo y del potencial: líneas de campo y superficies equipotenciales	26
1.1.6 Relación entre el potencial eléctrico y la densidad de carga	27
1.1.7 El campo eléctrico y el potencial en conductores	30
1.1.8 El campo eléctrico en la superficie de un conductor	35
1.1.9 Problemas de potencial. Ecuaciones de Laplace y Poisson	37
1.1.10 Condiciones que determinan el campo en una región	43
1.1.11 Energía electrostática	48
1.1.12 Energía electrostática asociada al campo eléctrico	50
1.1.13 Aproximación del potencial a grandes distancias. Desarrollo multipolar del potencial	52
1.1.14 Dipolo real y dipolo ideal	57
1.1.15 El dipolo ideal en presencia de campos eléctricos externos	58
1.2 El campo electrostático en presencia de medios dieléctricos	58
1.2.1 Vector polarización	59
1.2.2 Relación entre el vector polarización y el campo eléctrico. Tipos de dieléctricos	61
1.2.3 Ley de Gauss en medios dieléctricos. Vector desplazamiento eléctrico	63
1.2.4 Ecuación de Poisson generalizada	68
1.2.5 Energía electrostática en presencia de medios dieléctricos	70
1.2.6 Sistemas de conductores. Condensadores	71

1.3 El campo magnetostático en el vacío . . . . .	76
1.3.1 Introducción . . . . .	76
1.3.2 Densidad e intensidad de corriente. Ley de Ohm . . . . .	77
1.3.3 Ecuación de continuidad. Corrientes estacionarias. . . . .	80
1.3.4 Ley de Biot y Savart . . . . .	81
1.3.5 Carácter solenoidal del campo magnético . . . . .	85
1.3.6 Ley de Ampère . . . . .	86
1.3.7 Cálculo de B mediante la ley de Ampère en forma integral . . . . .	87
1.3.8 Aproximación de B a grandes distancias. Momento dipolar magnético . . . . .	93
1.4 Campos magnéticos en medios materiales . . . . .	96
1.4.1 Fuerzas sobre un dipolo magnético . . . . .	96
1.4.2 Vector magnetización . . . . .	97
1.4.3 Densidades de corriente de magnetización . . . . .	98
1.4.4 Ley de Ampère en medios magnéticos. Intensidad de campo magnético . . . . .	99
1.4.5 Relación entre el campo magnético y el vector magnetización . . . . .	99
1.4.6 Tipos de medios magnéticos. . . . .	105
1.4.7 Flujo magnético, inductancia y energía magnética . . . . .	109
Problemas. . . . .	113

## Capítulo 2 Ecuaciones de Maxwell

2.1 Ecuaciones de Maxwell en forma integral en el vacío . . . . .	122
2.1.1 Ley de Gauss para el campo eléctrico . . . . .	122
2.1.2 Ley de Gauss para el campo magnético . . . . .	123
2.1.3 Ley de Faraday . . . . .	124
2.1.4 Ley de Ampère-Maxwell . . . . .	128
2.1.5 Principio de conservación de la carga . . . . .	132
2.1.6 Ecuaciones fundamentales del electromagnetismo . . . . .	134
2.2 Ecuaciones de Maxwell en forma diferencial . . . . .	134
2.2.1 Significado del rotacional y de la divergencia . . . . .	135
2.2.2 Forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell . . . . .	142
2.3 Ecuaciones de Maxwell en medios materiales . . . . .	148
2.3.1 Campos en presencia de medios conductores . . . . .	148
2.3.2 Materiales dieléctricos . . . . .	151
2.3.3 Materiales magnéticos . . . . .	156
2.3.4 Ecuaciones fundamentales del electromagnetismo en medios materiales . . . . .	161
2.4 Condiciones de contorno . . . . .	162
2.4.1 Continuidad de los campos eléctricos . . . . .	163
2.4.2 Continuidad de los campos magnéticos . . . . .	167

2.5	Energía de los campos electromagnéticos . . . . .	172
2.5.1	Potencia aplicada sobre portadores de carga . . . . .	173
2.5.2	Principio de conservación de la energía. Teorema de Poynting . . . . .	174
2.6	Aproximación estática de las ecuaciones de Maxwell . . . . .	179
2.6.1	Electrostática . . . . .	180
2.6.2	Magnetostática . . . . .	181
2.7	Ecuaciones de Maxwell en régimen senoidal permanente . . . . .	182
2.7.1	Fasores y campos instantáneos . . . . .	183
2.7.2	Ecuaciones de Maxwell en R.S.P. . . . .	185
2.7.3	Fasores y transformada de Fourier . . . . .	195
	Problemas . . . . .	198

### Capítulo 3 Ondas planas uniformes

3.1	Ecuación de onda . . . . .	203
3.1.1	Ondas planas uniformes con dependencia espacio-temporal arbitraria . . . . .	205
3.2	Ondas planas uniformes en régimen senoidal permanente . . . . .	213
3.2.1	Ecuación de onda en régimen senoidal permanente . . . . .	218
3.2.2	Solución correspondiente a la onda plana uniforme . . . . .	219
3.2.3	Características de la onda plana uniforme . . . . .	223
3.2.4	Densidad de flujo de potencia asociada a la onda . . . . .	238
3.3	Polarización de ondas planas uniformes en R.S.P. . . . .	242
3.3.1	Descripción matemática de la polarización . . . . .	242
3.3.2	Características de la elipse de polarización . . . . .	247
3.3.3	Casos especiales: polarización lineal y polarización circular . . . . .	253
3.4	Propagación de ondas planas uniformes en medios con pérdidas . . . . .	260
3.4.1	Permitividad y permeabilidad complejas . . . . .	260
3.4.2	Ondas planas uniformes en un medio con pérdidas . . . . .	264
3.4.3	Casos límite: buen dieléctrico y buen conductor . . . . .	269
	Problemas . . . . .	277

### Capítulo 4 Incidencia de ondas planas sobre medios materiales

4.1	Introducción. Condiciones de contorno de las ecuaciones de Maxwell . . . . .	281
4.2	Incidencia normal sobre conductores perfectos . . . . .	284
4.2.1	Reflexión en la superficie de un conductor perfecto . . . . .	284
4.2.2	Ondas estacionarias . . . . .	294
4.3	Incidencia normal sobre medios dieléctricos. . . . .	299
4.3.1	Reflexión y transmisión en la superficie de un medio dieléctrico . . . . .	299
4.3.2	Ondas parcialmente estacionarias . . . . .	304

4.4 Incidencia oblicua sobre conductores perfectos . . . . .	308
4.4.1 Planteamiento del problema . . . . .	308
4.4.2 Ondas estacionarias mixtas . . . . .	315
4.5 Incidencia oblicua sobre dieléctricos . . . . .	323
4.5.1 Leyes de Snell para la reflexión y la refracción de ondas planas . . . . .	324
4.5.2 Ecuaciones de Fresnel . . . . .	325
4.5.3 Ángulo de Brewster . . . . .	333
4.5.4 Ángulo crítico. Reflexión total en un dieléctrico . . . . .	337
4.6 Incidencia sobre un buen conductor . . . . .	348
4.7 Incidencia normal en multicapas . . . . .	354
4.6.1 Impedancia de onda generalizada . . . . .	356
4.6.2 Coeficiente de reflexión generalizado . . . . .	358
Problemas . . . . .	364

## Capítulo 5 Guías de onda

	369
5.1 Guías de onda y líneas de transmisión. . . . .	370
5.2 Guías conductoras de sección rectangular. . . . .	373
5.2.1 Modos de tipo transversal eléctrico (TE) . . . . .	375
5.2.2 Modos de tipo transversal magnético (TM) . . . . .	377
5.2.3 Modos guiados y modos en corte. Curvas de dispersión . . . . .	380
5.2.4 Modo dominante $TE_{10}$ . . . . .	381
5.2.5 Potencia transmitida. . . . .	382
5.2.6 Atenuación. . . . .	384
5.3 Guías conductoras de sección circular. . . . .	385
5.3.1 Modos TM. . . . .	387
5.3.2 Modos TE. . . . .	388
5.3.3 El cable coaxial. Modos TEM. . . . .	390
5.4 Cavidades resonantes de paredes conductoras. . . . .	391
5.4.1 Modos TE. . . . .	393
5.4.2 Modos TM. . . . .	393
5.4.3 Factor Q de la cavidad y energía almacenada. . . . .	395
5.5 Guías de onda dieléctricas . . . . .	396
5.5.1 Guías dieléctricas planas. . . . .	397
5.5.2 Modos TE y modos TM. Curvas de dispersión. . . . .	404
5.5.3 Modos guiados y modos radiados. . . . .	405
5.6 Fibras ópticas. . . . .	408
Problemas. . . . .	

**Capítulo 6 Radiación de antenas elementales**

6.1 Fundamentos de la radiación electromagnética . . . . .	413
6.1.1 Fuentes de radiación . . . . .	415
6.1.2 Potenciales dinámicos . . . . .	416
6.1.3 Ecuaciones de los potenciales en régimen senoidal permanente . . . . .	419
6.2 Dipolo eléctrico oscilante . . . . .	420
6.2.1 Densidad de carga y corriente en el dipolo eléctrico oscilante . . . . .	420
6.2.2 Potencial vector generado por el dipolo eléctrico . . . . .	421
6.2.3 Cálculo de los campos E y H . . . . .	424
6.2.4 Campos radiados . . . . .	425
6.2.5 Características de radiación del dipolo eléctrico . . . . .	426
6.2.6 Campos inducidos . . . . .	429
6.3 Radiación simultánea de dos dipolos . . . . .	430
6.3.1 Campo radiado . . . . .	431
6.3.2 Resistencia de radiación y ganancia directiva . . . . .	432
6.4 Radiación de una antena larga de tipo dipolo . . . . .	436
6.5 Emisión en campo lejano: generalización . . . . .	438
Problemas . . . . .	440
 Anexo A: Sistemas de coordenadas . . . . .	 445
Anexo B: Fórmulas de análisis vectorial . . . . .	449
Anexo C: Funciones de Bessel . . . . .	451
Anexo D: La distribución delta de Dirac . . . . .	455
Soluciones a los problemas . . . . .	459
Bibliografía . . . . .	469
Índice alfabético de materias . . . . .	471



## 1 Campos eléctricos y magnéticos en condiciones estáticas

En este primer capítulo se revisarán los conceptos fundamentales de la teoría electromagnética en condiciones estáticas, esto es, *sin considerar variaciones temporales en las fuentes ni en los campos producidos por ellas*. A pesar de la evidente limitación de este análisis, lo cierto es que resulta muy instructivo, porque revela la naturaleza y las características esenciales de los campos y de las demás magnitudes físicas relacionadas. En la realidad muchos fenómenos electromagnéticos no se desarrollan en condiciones estáticas, pero sus variaciones temporales son lentas en comparación con los tiempos propios de los fenómenos básicos y de los medios materiales que intervienen, por lo que en esas ocasiones bastaría con asignar a los campos las mismas variaciones temporales de las fuentes, una vez calculados aquéllos mediante los métodos propios del análisis estático.

Se ha pretendido que este capítulo sirva en buena medida de repaso a cuestiones que ya se han visto en cursos anteriores de Física y, a la vez, se busca introducir al lector en la metodología, la notación y el tipo de herramientas matemáticas que se utilizan a lo largo de todo el libro.

### 1.1 El campo eléctrico en el vacío

#### 1.1.1 Ley de Coulomb. Definición de campo eléctrico

La ley de Coulomb cuantifica la fuerza que ejercen entre sí dos cuerpos cargados eléctricamente, la cual aparece como un dato de experiencia.

Consideremos dos cuerpos cargados, con cargas  $q_1$  y  $q_2$  respectivamente, de dimensiones reducidas respecto a la distancia que los separa,  $d$ . Se comprueba que la fuerza que cada uno de ellos ejerce sobre el otro es:

$$|\vec{F}_{12}| = |\vec{F}_{21}| = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d^2} \quad (1.1)$$

donde el subíndice 12 quiere decir “sobre 1 debido a 2”. La dirección en que se ejercen tales fuerzas es la de la línea que une ambas cargas.  $\epsilon_0$  es la permitividad dieléctrica del vacío, de

valor 8,85418 Faradios / metro ( $F/m$ ).

La fuerza ejercida sobre un cuerpo no parece tener una existencia real si la separamos del objeto sobre el que actúa. Sin embargo, en teoría electromagnética se trabaja con el concepto de *campo*, como fuerza ejercida por unidad de carga, independientemente de si está causando o no algún efecto sobre otros cuerpos próximos: se define *el campo eléctrico*  $\vec{E}(\vec{r})$  en un punto  $\vec{r}$  del espacio, creado por un cuerpo cargado, como la fuerza que ejercería sobre la unidad de carga positiva si estuviera situada en dicho punto. Habitualmente se expresa en forma de límite, queriendo indicar que dicha carga de prueba no altera la distribución original de cargas cuyo campo medimos.

$$\vec{E}(\vec{r}) = \lim_{q_p \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{q_p} \quad (N/C) = (V/m) \quad (1.2)$$

### 1.1.2 Cargas puntuales y distribuciones de carga

Cuando se consideran los efectos eléctricos de un cuerpo cargado a distancias mucho mayores que sus propias dimensiones podemos hacer la suposición de que se trata de un objeto de dimensiones despreciables, y que ocupa un único punto del espacio. Esta idealización recibe el nombre de *carga puntual*. La carga puntual se caracteriza por el valor de su carga eléctrica y la posición que ocupa respecto a un determinado sistema de coordenadas. El campo eléctrico creado por una carga puntual, de acuerdo con la definición de campo del apartado anterior y la ley de Coulomb, debe ser:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \quad (1.3)$$

donde  $\vec{r}$  es el punto en que medimos el campo y  $\vec{r}_0$  es la posición de la carga puntual de valor  $q$ . El vector  $\vec{r} - \vec{r}_0$  dividido por su módulo es el vector unitario que indica la dirección del campo.

Las fuerzas que diferentes causas físicas ejercen en un punto de un determinado objeto se suman vectorialmente para dar lugar a una fuerza resultante única. El principio de superposición es aplicable a los campos creados por diferentes distribuciones de carga. El campo eléctrico creado por una distribución de cargas puntuales  $q_i$  situadas en puntos  $\vec{r}_i$  será:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} \quad (1.4)$$

con la única salvedad de que si medimos en un punto  $\vec{r} = \vec{r}_i$ , donde está situada una de las cargas, debería eliminarse la contribución de esa carga  $q_i$ , puesto que una carga puntual no ejerce fuerza alguna sobre sí misma.

El estudio de los sistemas de cargas puntuales suele ser un primer paso para abordar otras situaciones más generales. Usualmente la carga se distribuye en la materia semejando un continuo de carga. Para expresarlo matemáticamente se definen las densidades de carga. La *densidad volúmica de carga* es:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dq}{dv} \quad (C/m^3) \quad (1.5)$$

definida en el volumen del cuerpo cargado y nula fuera de él. En muchas ocasiones la carga tiende a concentrarse específicamente en la superficie del medio, por lo que debe utilizarse la *densidad superficial de carga*:

$$\sigma(\vec{r}) = \frac{dq}{ds} \quad (C/m^2) \quad (1.6)$$

El campo eléctrico creado por un diferencial de carga situado en un punto  $\vec{r}'$  es:

$$d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}') \quad (1.7)$$

y atendiendo a la totalidad de la carga que pueda estar presente en un medio continuo, utilizando (1.5) y (1.6):

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[ \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' + \int_{S'} \frac{\sigma(\vec{r}') (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} ds' \right] \quad (1.8)$$

En la ecuación (1.8) se utiliza la notación habitual a lo largo de todo el libro cuando aparezcan procedimientos integrales:

- $\vec{r}$  representa el punto de campo: allí donde se evalúa la magnitud física;
- $\vec{r}'$  es el punto de fuente, y depende de las variables de integración.

Esta ecuación es el primer resultado con aplicación inmediata para el cálculo del campo. Cuando se conoce la distribución de carga y se obtiene el campo eléctrico mediante la ecuación (1.8) se dice que se está aplicando un método de *integración directa*.

**Ejemplo 1.1:** Calcule el campo eléctrico creado por un plano muy extenso en el que existe una densidad superficial de carga homogénea.

Consideremos un plano de carga de extensión ilimitada como el mostrado en la figura. Trataremos de calcular la magnitud del campo eléctrico que crea en un determinado punto situado a una distancia  $d$  del plano. Por comodidad situaremos el origen de coordenadas bajo el punto donde buscamos el campo, pues es equivalente a cualquier otra elección. Los radiovectores  $\vec{r}'$  que señalan a los diferentes diferenciales de carga podemos tomarlos por parejas, opuestos respecto al origen, para poner de manifiesto la simetría del problema: se comprueba que el campo total debe ir dirigido en la dirección perpendicular al plano, pues cualquier otra componente se cancelará al integrar.

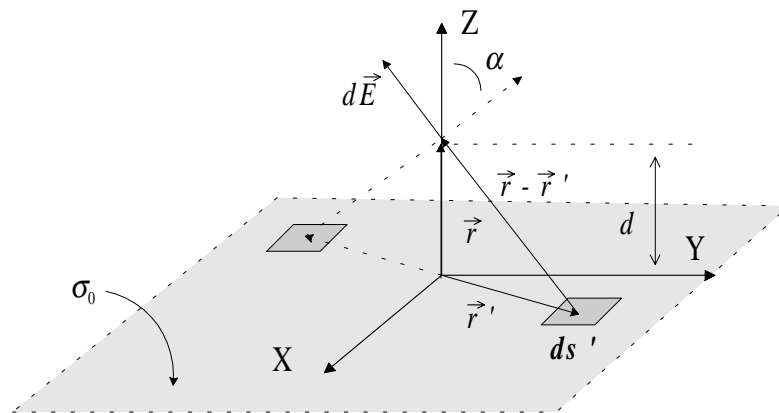


Fig. 1.1 Plano infinito con densidad de carga superficial constante

La expresión diferencial es  $d\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_0 ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} (\vec{r} - \vec{r}')$  y  $dE_z = |d\vec{E}| \cos \alpha$

donde  $\cos \alpha = \frac{r}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ .

$$\text{De allí llegamos a } E_z(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{S'} \frac{\sigma_0 r ds'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

Después de obtener la integral que debe resolverse el siguiente paso consiste en escribir correctamente las variables y los diferenciales:

$$\vec{r} = d \hat{z} \quad \vec{r}' = x' \hat{x} + y' \hat{y} \quad ds' = dx' dy'$$

$$\vec{r} - \vec{r}' = -x' \hat{x} - y' \hat{y} + d \hat{z} \Rightarrow |\vec{r} - \vec{r}'| = (x'^2 + y'^2 + d^2)^{1/2}$$

y finalmente se obtiene  $E_z(\vec{r}) = \frac{\sigma_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{(x'^2 + y'^2 + d^2)^{3/2}} dx' dy'.$

Esa integral se resuelve fácilmente utilizando coordenadas polares sobre el plano. El resultado es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \hat{z} \quad V/m$$

El campo final es constante e independiente de la posición en que lo midamos (salvo el signo cambiado a un lado y otro del plano). Esto tiene sentido, ya que al ser un plano de extensión infinita no existe término de comparación para saber si se está cerca o lejos de él.

**Ejemplo 1.2:** Cálculo del campo eléctrico creado por una esfera de radio  $R$  cargada con una densidad volúmica constante.

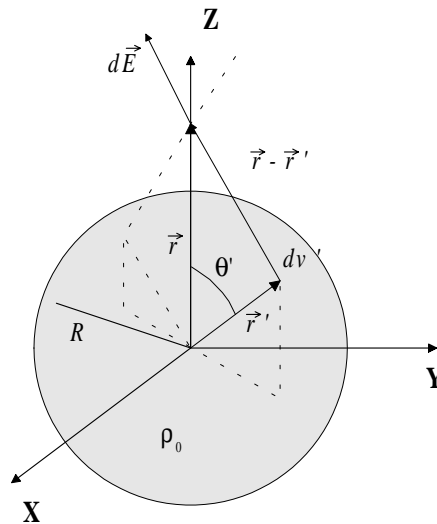


Fig. 1.2 Simetrías en el cálculo del campo creado por una esfera con densidad de carga homogénea

Al igual que en el ejemplo precedente ocurre que las contribuciones diferenciales de los diferentes puntos del volumen se cancelan parcialmente. La componente final de campo deberá ser radial.

Situamos el origen de coordenadas en el centro de la esfera. Nos limitaremos a calcular el campo sobre un punto del eje Z, que al fin es igual a cualquier otro punto: el campo final sólo puede depender de la distancia a la esfera y todas las direcciones radiales son equivalentes.

$$dE_z(\vec{r}) = |d\vec{E}(\vec{r})| \cos \alpha \quad \text{y} \quad \cos \alpha = \frac{r - r' \cos \theta'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}.$$

La integral que debe calcularse es  $E_z(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{r - r' \cos \theta'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv'$

donde  $|\vec{r} - \vec{r}'| = (x'^2 + y'^2 + (d - z')^2)^{1/2}$ .

Por la geometría del problema es más adecuado utilizar coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} x' = r' \sin \theta' \cos \varphi' \\ y' = r' \sin \theta' \sin \varphi' \\ z' = r' \cos \theta' \end{cases}$$

La integral resultante es:  $E_z(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R \frac{(d - r' \cos \theta') r'^2 \sin \theta' dr' d\theta' d\varphi'}{(r'^2 - 2dr' \cos \theta' + d^2)^{3/2}}$

que, a pesar de su aparente dificultad, puede resolverse con un cambio de variable:

$$r'^2 - 2dr' \cos \theta' + d^2 = t^2 \quad \rightarrow \quad 2dr' \sin \theta' d\theta' = 2tdt$$

El resultado final es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \hat{r} & \text{si } r > R \\ \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \hat{r} & \text{si } r < R \end{cases}$$

### 1.1.3 Ley de Gauss

Se comprueba que, en cualquier situación e independientemente de la forma de la distribución de carga que produce el campo, *el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga neta contenida en el volumen interior*:

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \frac{Q_T|_S}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{v'} \rho(r) dv' \quad (1.9)$$

Esta relación recibe el nombre de *ley de Gauss*. Puede demostrarse fácilmente a partir de la expresión integral de  $\vec{E}$  si se recuerda el concepto de ángulo sólido:

$$\begin{aligned} \oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \left( \int_{v'} \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \right) \cdot d\vec{s} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \rho(\vec{r}') \left( \oint_S \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) dv' \end{aligned}$$

porque el término que ahora aparece en la integral de superficie es *la definición del ángulo sólido subtendido por un  $ds$ , situado en una posición  $\vec{r}$ , respecto al vértice situado en  $\vec{r}'$* . Entonces:

$$\oint_S \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot d\vec{s}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \begin{cases} 4\pi & \text{para puntos } \vec{r}' \text{ interiores a } S \\ 0 & \text{para puntos } \vec{r}' \text{ exteriores a } S \end{cases} \quad (1.10)$$

por lo que la ecuación (1.9) se satisface.

La ley de Gauss en su forma integral tiene gran interés para deducir otras propiedades del campo eléctrico en contextos particulares, y la utilizaremos con frecuencia en lo sucesivo. También tiene enorme utilidad para el cálculo directo del campo eléctrico, aunque sólo en aquellos problemas donde las distribuciones de carga son suficientemente simétricas.

**Ejemplo 1.3:** *Obtégase el campo eléctrico producido por una superficie esférica de radio  $R$  cargada con una densidad superficial de carga homogénea  $\sigma_0$ .*

Debido a la simetría de la distribución de carga el campo eléctrico ha de ser de la forma:  $\vec{E}(\vec{r}) = E_r(\vec{r})\hat{r}$ .

La existencia de otras componentes ( $E_\theta$  y  $E_\phi$ ) o la dependencia con los ángulos esféricos no parecen posibles en esta situación (Fig. 1.3). Entonces la ley de Gauss permite obtener el campo:

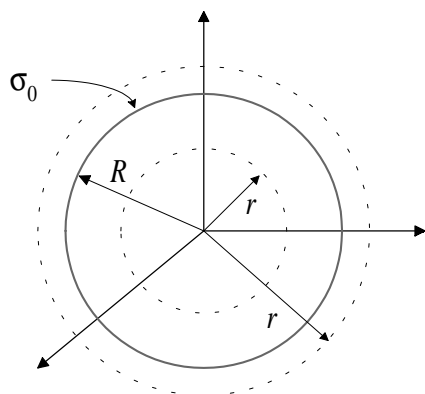


Fig. 1.3

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint_S E_r(r) \hat{r} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_T|_S}{\epsilon_0}$$

Se elige una superficie cerrada donde realizar el cálculo (superficie gaussiana), en la que el campo eléctrico tenga un valor constante en módulo. Para este problema es una superficie esférica de radio  $r$  arbitrario.

$$E_r(r) r^2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta = \frac{Q_T|_S}{\epsilon_0} \quad Q_T|_S = \begin{cases} 4\pi R^2 \sigma_0 & r > R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

de donde el campo resulta:

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\pi R^2 \sigma_0}{r^2} & r > R \\ 0 & r < R \end{cases}$$

**Ejemplo 1.4:** Obtenga el campo eléctrico producido por un plano infinito de carga con densidad superficial homogénea, a partir de la ley de Gauss.

De nuevo el primer paso consiste en tratar de visualizar de forma intuitiva cuál debe ser la dirección del campo eléctrico en cada punto, y de qué variables espaciales puede depender.

Una hipótesis razonable es suponer que:  $\vec{E}(\vec{r}) = E_z(z) \hat{z}$  de acuerdo con la situación reflejada en la figura 1.4.



La superficie elegida es  $S$ , con forma de caja rectangular, situada simétricamente respecto al plano. En el cálculo del flujo del campo sólo intervienen las bases, de dimensiones  $S_b$ , puesto que las paredes laterales son paralelas al campo.

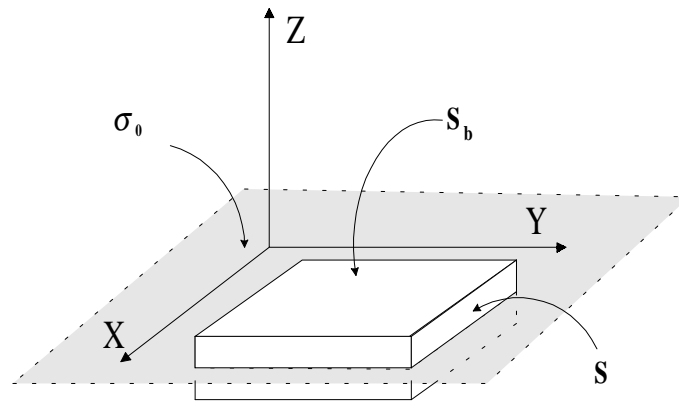


Fig. 1.4 Aplicación de la ley de Gauss a un plano extenso con carga homogénea

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = 2 \int_{S_b} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 2E_z(z) S_b$$

$$Q_T = \sigma_0 S_b$$

de donde  $E_z(z) = \sigma_0 / 2\epsilon_0$ , que en realidad no depende de  $z$ . Es el mismo resultado que se obtuvo por integración directa en el ejemplo 1.1. Para tener en cuenta el cambio de signo a un lado y otro del plano podemos escribir:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \text{sgn}(z) \hat{z} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \frac{z}{|z|} \hat{z}.$$

#### 1.1.4 Potencial eléctrico. Carácter conservativo del campo electrostático

Un campo eléctrico produce una fuerza sobre las cargas eléctricas de las proximidades. Cuando las cargas son libres y no experimentan otras fuerzas de ligadura serán arrastradas por la acción del campo. Entonces el campo realiza un desplazamiento físico de las cargas y, por tanto, un trabajo. El potencial eléctrico es la medida de ese trabajo por unidad de carga.

La magnitud que inicialmente tiene sentido físico no es tanto el potencial en cada punto del espacio como la diferencia de potencial entre dos puntos, que se define:

$$\Delta\phi_{BA} = -\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (V) \quad (1.11)$$

La integral de línea del campo eléctrico es un trabajo por unidad de carga. *La diferencia de potencial entre dos puntos es entonces el trabajo que realiza el campo al trasladar una carga positiva unidad de un punto al otro.* El signo negativo que antecede a la integral es un convenio arbitrario, pero universal y firmemente establecido, de la definición.

$\Delta\phi_{BA}$  es la diferencia de potencial entre el punto B y el A. Se cumple  $\Delta\phi_{BA} = -\Delta\phi_{AB}$ .

La ecuación (1.11) tiene un significado unívoco debido a una importante propiedad del campo eléctrico, y es su carácter conservativo. Ocurre que *podemos definir la diferencia de potencial entre dos puntos atendiendo únicamente a sus posiciones, sin especificar la trayectoria que deba seguirse para ir de uno al otro*, porque realmente el resultado de la integral no variaría en cualquier caso. Más adelante se probará esta afirmación. De acuerdo con ello podríamos elegir un punto como referencia de potencial y asignar un valor para la función potencial en cada punto del espacio respecto a esa referencia. Esto se hace en la práctica tomando los puntos del infinito (muy alejados de cualquier distribución de carga que consideremos) como referencia u origen de potencial.

$$\Delta\phi_{B\infty} = -\int_{\vec{r}_\infty}^{\vec{r}_B} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\vec{r}_B}^{\vec{r}_\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \phi(\vec{r}_B) - \phi(\vec{r}_\infty) = \phi(\vec{r}_B) \quad (1.12)$$

donde el potencial en el infinito toma valor nulo. *El potencial creado por una distribución de carga en un punto del espacio equivale entonces al trabajo que realiza el campo para llevar la carga positiva unidad desde dicho punto hasta el infinito.* El campo eléctrico tiene también valor cero en el infinito (asumiendo siempre que no hay carga en el infinito), por lo que la ecuación (1.12) equivale a:

$$\phi(\vec{r}) = -\int \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (1.13)$$

La relación inversa entre el potencial y el campo se puede deducir a partir de esta última expresión.

$$d\phi = -\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} \Rightarrow \phi(\vec{r} + d\vec{l}) - \phi(\vec{r}) = -E(\vec{r})\hat{e} \cdot d\vec{l} \hat{l}$$

y por tanto:

$$E(\vec{r})(\hat{l} \cdot \hat{e}) = -\frac{\phi(\vec{r} + d\vec{l}) - \phi(\vec{r})}{dl}$$

El valor máximo de la igualdad anterior se alcanza cuando tomamos un diferencial de trayectoria tal que  $\hat{l} = \hat{e}$ , donde  $\hat{e}$  es la dirección del campo eléctrico en el punto considerado. Entonces *el campo eléctrico es, en módulo, el valor máximo de la derivada direccional del potencial en cada punto, y lleva como dirección aquélla en la que la derivada direccional del potencial se hace máxima*. Eso es exactamente la definición de gradiente de una función.

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r}) \quad (1.14)$$

Un campo vectorial que puede obtenerse como gradiente de una función escalar se denomina *irrotacional* o *conservativo*.

La última característica que debe reseñarse es que la circulación del campo eléctrico a lo largo de una trayectoria cerrada es siempre nula:

$$\oint_C \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{l} = -\oint_C d\phi = \phi_{\vec{r}_A} - \phi_{\vec{r}_A} \equiv 0 \quad (1.15)$$

### Continuidad del potencial

La función potencial es continua en cualquier situación. Esto es consecuencia de su relación con el campo eléctrico. Si existiera una discontinuidad del potencial significaría que el campo eléctrico se hace infinito en el punto de discontinuidad, lo que no es posible físicamente.

**Ejemplo 1.5:** Calcule el potencial eléctrico creado en todo el espacio por la esfera de carga volúmica homogénea del ejemplo 1.2

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r^2} \hat{r} & r > R \\ \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r \hat{r} & r < R \end{cases}$$

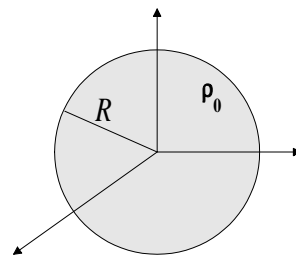


Fig. 1.5

Utilizamos la ecuación (1.13). Podemos utilizar cualquier trayectoria que nos lleve hasta el infinito, pero lo lógico es elegir:  $d\vec{l} = dr \hat{r}$ . Y se obtiene:

$$r < R$$

$$\phi(\vec{r}) = -\frac{\rho_0}{6\epsilon_0} r^2 + C_1$$

$$r > R$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r} + C_2$$

Para calcular las constantes  $C_1$  y  $C_2$  disponemos de dos condiciones:

- el potencial debe cancelarse en el infinito;
- ha de ser continuo en  $r = R$ .

El resultado final es:

$$r < R$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} (3R^2 - r^2)$$

$$r > R$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \frac{R^3}{r}$$

### 1.1.5 Representación espacial del campo y del potencial: líneas de campo y superficies equipotenciales

La representación gráfica de los fenómenos eléctricos se realiza mediante líneas de campo y superficies equipotenciales. *Las líneas de campo son trayectorias continuas tangentes en cada punto del espacio al vector campo eléctrico.* En problemas estáticos, tales como los que estamos considerando, tienen su origen siempre en cargas positivas (o en el infinito) y su final en cargas negativas (o en el infinito). Esto es obligado, puesto que lo que describen es la trayectoria que seguiría una carga positiva abandonada a la acción del campo.

En coordenadas cartesianas un campo tiene la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_x(\vec{r}) \hat{x} + E_y(\vec{r}) \hat{y} + E_z(\vec{r}) \hat{z}$$

y el diferencial de longitud genérico es:

$$d\vec{l} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$$

Las ecuaciones diferenciales que deben resolverse para obtener las trayectorias de las líneas de campo son las que resultan al imponer la condición de paralelismo:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z} \quad (1.16)$$

La densidad de líneas debe tomarse proporcionalmente a la intensidad del campo en cada zona del espacio.

Por otro lado, *las superficies equipotenciales son el conjunto de los lugares geométricos del espacio en los que el potencial toma el mismo valor:*

$$\phi(\vec{r}) = \phi_i \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.17)$$

donde se eligen los valores para  $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \dots$  según el criterio de representación que se quiera adoptar. Las superficies equipotenciales y las líneas de campo son perpendiculares allí donde se cruzan: es una consecuencia necesaria de la relación entre campo eléctrico y potencial.

### 1.1.6 Relación entre el potencial eléctrico y la densidad de carga

El potencial puede obtenerse directamente a partir de las densidades de carga del problema. Sustituyamos la ecuación (1.8) en (1.13):

$$\phi(\vec{r}) = - \int \left[ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{\rho(\vec{r}')(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \right] \cdot \hat{r} dr = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \rho(\vec{r}') \left[ \int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \hat{r}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dr \right] dv'$$

El problema, por tanto, consiste en resolver la ecuación en  $r$  de esa expresión. Resulta algo largo y no lo haremos aquí, pero se propone al lector como ejercicio. El resultado es:

$$\int \frac{(\vec{r} - \vec{r}') \cdot \hat{r}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dr = - \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Sustituyendo arriba obtenemos:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (1.18)$$

que es la expresión integral del potencial.

**Ejemplo 1.6:** A la vista de la ecuación (1.18) deduzca la forma del potencial eléctrico creado por una carga puntual situada en un punto  $\vec{r}_0$ .

La relación entre el campo y el potencial es de integración-derivación, y, consecuentemente, lineal. El principio de superposición es válido para el potencial. De la expresión (1.18) se deduce que la contribución al potencial total de cada diferencial de carga es:

$$d\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{con} \quad dq = \rho(\vec{r}') dv'$$

Si tenemos una carga puntual el potencial creado en cualquier punto del espacio debe ser:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \quad (1.19)$$

**Ejemplo 1.7:** Obtenga el campo y el potencial creados por dos cargas puntuales de valores  $+q$  y  $-q$  situadas sobre el eje Z en las posiciones  $+\frac{s}{2}$  y  $-\frac{s}{2}$ . Realice una aproximación para el caso en que nos situemos en puntos muy alejados de las cargas.

La expresión del potencial es: 
$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{|\vec{r} - \frac{s}{2}\hat{z}|} - \frac{1}{|\vec{r} + \frac{s}{2}\hat{z}|} \right].$$

Para hacer la aproximación a grandes distancias trabajaremos con esa función.

$$|\vec{r} \mp \frac{s}{2}\hat{z}| = \left( x^2 + y^2 + \left( z \mp \frac{s}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left( r^2 \mp sz + \frac{s^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} = r \left( 1 \mp s \frac{z}{r^2} + \frac{s^2}{4r^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

si  $r \gg s$  podemos hacer la siguiente aproximación:

$$|\vec{r} \mp \frac{s}{2}\hat{z}|^{-1} \approx \frac{1}{r} \left( 1 \mp s \frac{z}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \approx \frac{1}{r} \left( 1 \pm \frac{1}{2} s \frac{z}{r^2} \right) = \frac{1}{r} \pm \frac{1}{2} s \frac{z}{r^3}$$

y de allí llegamos a:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \frac{s}{2}\hat{z}|} - \frac{1}{|\vec{r} + \frac{s}{2}\hat{z}|} \approx s \frac{z}{r^3}$$

La expresión aproximada para el potencial es:

$$\phi(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qs}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qs}{r^2} \cos\theta \quad (1.20)$$

El campo eléctrico puede obtenerse ahora a partir del potencial.

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla\phi(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial\phi}{\partial r}\hat{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\hat{\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\phi}{\partial\varphi}\hat{\varphi}\right)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2qs}{r^3} \cos\theta \\ \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qs}{r^2} \sin\theta & \frac{\partial\phi}{\partial\varphi} = 0 \end{cases}$$

y de allí: 
$$\vec{E}(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qs}{r^3} (2\cos\theta\hat{r} + \sin\theta\hat{\theta}) \quad (1.21)$$

**Ejemplo 1.7** (continuación): *Represente gráficamente las líneas de campo y las superficies equipotenciales correspondientes al problema anterior.*

*Líneas de campo:* Las componentes (esféricas) del campo eléctrico son:

$$E_r = K \frac{2qs}{r^3} \cos\theta \quad E_\theta = K \frac{qs}{r^3} \sin\theta \quad E_\varphi = 0$$

y en coordenadas esféricas el diferencial de longitud genérico:

$$d\vec{l} = dr\hat{r} + r d\theta\hat{\theta} + r\sin\theta d\varphi\hat{\varphi}$$

Por lo que la ecuación que rige las trayectorias es:

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta} \Rightarrow \frac{dr}{r} = 2 \frac{\cos \theta d\theta}{\sin \theta} = 2 \frac{d(\sin \theta)}{\sin \theta}$$

y la solución general:  $r = C \sin^2 \theta$ , donde la constante  $C$  toma valores diversos para las diferentes trayectorias.

*Superficies equipotenciales:* La ecuación que se obtiene es  $r^2 = C' \cos \theta$ .

En la figura se muestra la forma de las superficies (línea delgada) y las líneas de campo (línea gruesa) en un plano.

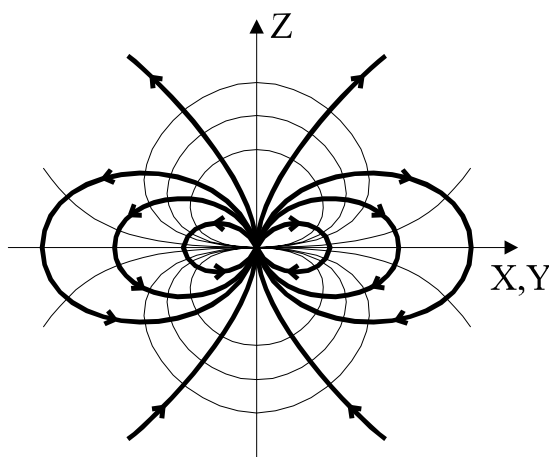


Fig. 1.6 Líneas de campo y superficies equipotenciales para un dipolo eléctrico orientado verticalmente

### 1.1.7 El campo eléctrico y el potencial en conductores

Los conductores se caracterizan por contener en su estructura una muy alta densidad de portadores de carga libres. El modelo microscópico más sencillo nos muestra al conductor como una red iónica de carga positiva rodeada de una nube de electrones. En presencia de campos eléctricos esta nube de electrones se desplaza dentro de los límites del conductor en busca de la posición de mínima energía (equilibrio estable), en la que las interacciones eléctricas quedan compensadas.



En el equilibrio cesa cualquier fuerza sobre cualesquiera de los portadores móviles en el conductor, y por lo tanto, la primera condición que debe satisfacerse es:

$$\vec{E}(\vec{r}) \equiv 0 \quad \forall \vec{r} \quad (1.22)$$

Esa suposición la aplicaremos siempre en electrostática y, como veremos en posteriores capítulos, también es habitual en dinámica (con ondas electromagnéticas), aunque con algunas restricciones. La consecuencia inmediata de la ecuación (1.22) es que la diferencia de potencial entre dos puntos del conductor es siempre nula, y *los medios conductores son entonces volúmenes equipotenciales*.

Si elegimos una superficie cerrada cualquiera que englobe un volumen dentro del conductor (Fig. 1.7) y calculamos el flujo del campo eléctrico obtendremos:

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \frac{Q_T}{\epsilon_0} \equiv 0$$

y como ese resultado no depende de la superficie elegida debemos concluir que:

$$\rho(\vec{r}) \equiv 0 \quad \forall \vec{r} \subset V \quad (1.23)$$

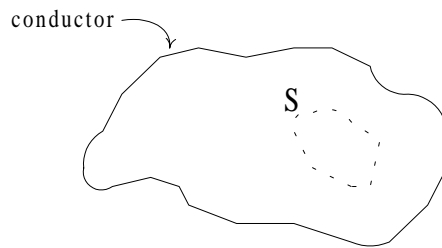


Fig. 1.7 Ley de Gauss en el interior de un conductor

El resultado anterior no implica que no haya cargas eléctricas en el interior del conductor, puesto que permanece la red iónica y los electrones libres; sin embargo, ambas distribuciones de carga se cancelan punto a punto, de manera que no hay carga neta ni efectos eléctricos macroscópicos. Podría escribirse:

$$\rho(\vec{r}) = \rho_{iones}^+(\vec{r}) + \rho_{electr.}^-(\vec{r}) \equiv 0$$

Si aplicamos la ley de Gauss a una superficie cerrada que no está íntegramente contenida dentro del medio conductor la situación es diferente (Fig. 1.8).

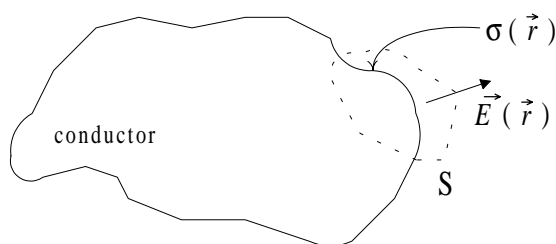


Fig. 1.8 *Ley de Gauss aplicada en una superficie S que engloba una parte de la superficie de un conductor*

En este caso no debe esperarse que el campo eléctrico sea necesariamente cero dentro del volumen definido por la superficie gaussiana; entonces puede existir un flujo de campo a través de ella, y eso nos indica que en general hay algún tipo de distribución de carga englobada por la superficie. *Existe usualmente en los conductores una densidad superficial de carga eléctrica.* Aparece cuando el conductor posee una carga global neta distinta de cero (ha sido cargado de algún modo), o por efecto del desplazamiento de la nube electrónica, que se ha redistribuido para neutralizar campos externos que pretendían instalarse dentro del conductor.

**Ejemplo 1.8:** *Una esfera conductora de radio  $R$  está cargada con una carga neta  $Q$ . ¿Cómo se distribuye esta carga en la esfera?*

Debe distribuirse exclusivamente por la superficie, puesto que en el conductor en equilibrio no puede haber carga volúmica.

Además la densidad superficial de carga será homogénea, como cabe esperar de la simetría del conductor, y porque ya vimos que una densidad esférica de carga constante no produce campo eléctrico neto en los puntos del interior de la esfera (Ej. 1.3), lo que es necesario en este caso al tratarse de un conductor (Ec. 1.22).

La densidad superficial de carga dejará de ser homogénea si situamos la esfera conductora en el seno de un campo eléctrico externo. Más adelante (ejemplo 1.10) se tratará con detalle este problema.

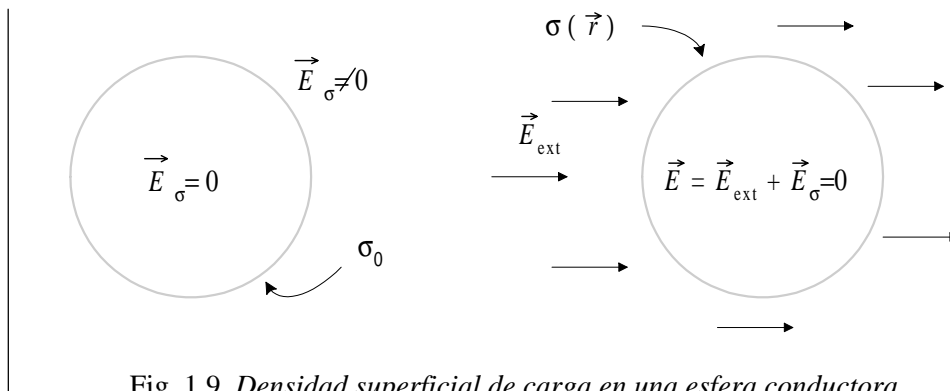


Fig. 1.9 Densidad superficial de carga en una esfera conductora

**Ejemplo 1.9:** Considérese una barra conductora cilíndrica, de longitud  $L$ , radio  $a$ , y con carga neta  $Q$ . ¿Cómo se distribuye la carga por la superficie de la barra en ausencia de campos externos?

Este problema, a pesar de su aparente sencillez, no puede ser resuelto si no es mediante métodos numéricos.

Las condiciones que deben satisfacerse son:

$$\begin{aligned} i) \quad & \oint_S \sigma(\vec{r}) ds = Q \\ ii) \quad & \phi(\vec{r}) = cte \quad \Leftrightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad \forall \vec{r} \subset \text{barra} \end{aligned}$$

Dividimos el conductor en pequeñas secciones transversales, de longitud  $\Delta l$ , de manera que podamos asignar a la superficie lateral de cada sección  $i$  un valor constante de densidad superficial de carga  $\sigma_i$  (Fig. 1.10). Hacemos la aproximación además de que las superficies circulares de ambos extremos de la barra tienen una densidad de carga constante  $\sigma_e$ .

Las ecuaciones anteriores se escriben ahora de la forma:

$$\begin{aligned} i) \quad & 2\pi a^2 \sigma_e + \sum_{i=1}^N 2\pi a \Delta l \sigma_i = Q \\ ii) \quad & \left| E_{ext.izq.}^j \right| + \sum_{i=1}^{j-1} \left| E_i^j \right| = \left| E_{ext.dcho.}^j \right| + \sum_{i=j+1}^N \left| E_i^j \right| \end{aligned}$$

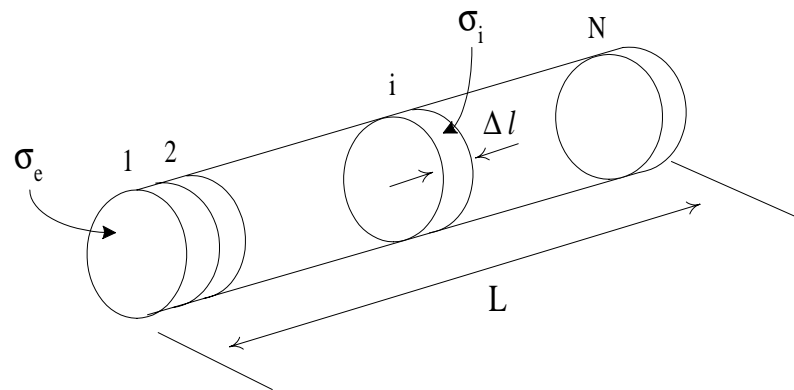


Fig. 1.10 Partición de una barra conductora para el cálculo de la distribución de carga por un método numérico

La ecuación ii) es otra forma de escribir que el campo debe ser cero en todos los puntos de la barra: las secciones situadas a la izquierda de una sección  $j$  cualquiera han de producir un campo igual en módulo (de sentido contrario) al que las secciones de la derecha producen en esa misma sección. Las expresiones de los campos se pueden tomar en primera aproximación como:

$$\begin{aligned} |E_{ext,izq.}^j| &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_e \pi a^2}{\left[(j - \frac{1}{2})\Delta l\right]^2} & |E_{ext,dcho.}^j| &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_e \pi a^2}{\left[(N - j + \frac{1}{2})\Delta l\right]^2} \\ |E_i^j| &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma_i \Delta l 2\pi a}{\left[(j - i)\Delta l\right]^2} \end{aligned}$$

donde el cálculo del campo se ha realizado en el centro de cada sección de barra.

De esta manera obtenemos un sistema de  $N/2+1$  ecuaciones (si  $N$  par), y el mismo número de incógnitas. La precisión del cálculo es función de  $N$ , pero también mejorará si utilizamos expresiones para el campo menos aproximadas que la escritas arriba. Por ejemplo, esto puede ser especialmente importante cuando se considera la contribución al campo total sobre una sección de las secciones más próximas a ella ( $i$  y  $j$  cercanos). En ese caso, una mejor expresión es:

$$|E_i^j| = \frac{\sigma_i}{2\epsilon_0} a \left[ \frac{1}{\left[a^2 + \left(|j-i| - \frac{1}{2}\right)^2 \Delta l^2\right]^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\left[a^2 + \left(|j-i| + \frac{1}{2}\right)^2 \Delta l^2\right]^{\frac{1}{2}}} \right]$$

La expresión primera es, de hecho, el límite de esta última si se cumple que  $(j-i) \Delta l \gg a$ . Por otra parte se sobreentiende que la validez del procedimiento está supeditada a tomar un número suficiente de secciones, de modo que  $a \gg \Delta l$ .

Por último debe señalarse que la consideración de carga homogénea en las bases puede ser insuficiente si la barra es gruesa. En general debería permitirse una variación radial, descomponiendo cada base en anillos con densidades diferentes.

### 1.1.8 El campo eléctrico en la superficie de un conductor

La carga eléctrica superficial de un conductor provoca la aparición de campos eléctricos en sus inmediaciones. *El campo eléctrico es siempre perpendicular a la superficie del conductor*, que es una superficie equipotencial. Si no fuese así las cargas superficiales estarían en movimiento continuo, debido a la componente tangencial no nula del campo. En la figura 1.11 se muestra cualitativamente la forma de los campos en las proximidades de un conductor en dos situaciones típicas.

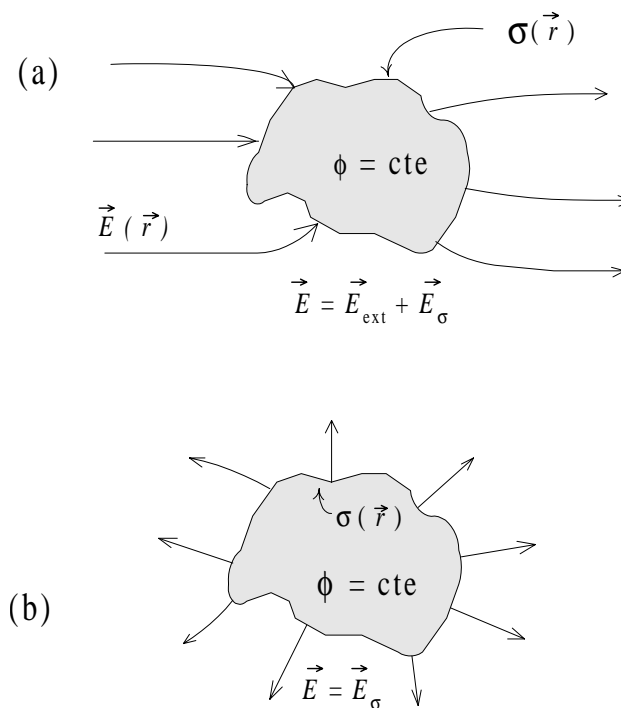


Fig. 1.11 a) Campo eléctrico en presencia de un conductor;  
b) campo eléctrico producido por un conductor cargado

En la primera de ellas un campo externo provoca la aparición de una densidad superficial de carga,  $\sigma(\vec{r})$ , cuyo campo se suma al campo externo para dar el campo final.

En el segundo caso no hay campo exterior pero el conductor está cargado, por lo que produce su propio campo  $E_\sigma$ , mediante la densidad superficial de carga.

La relación entre la densidad superficial de carga y el valor del campo eléctrico en cada punto de la superficie se obtiene como una consecuencia de la ley de Gauss aplicada a este caso particular. Sea una superficie cerrada en forma de cajita, situada de forma que intersecta con la superficie del conductor (Fig. 1.12). Denominamos  $h$  a la altura de la cajita y  $S_b$  a la superficie de su base.

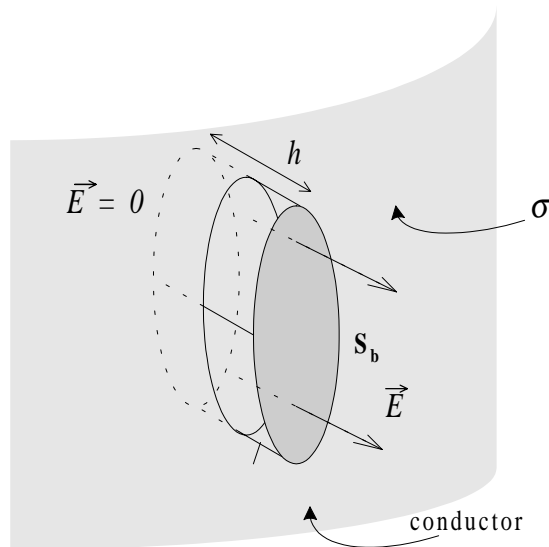


Fig. 1.12

El flujo del campo a través de la superficie gaussiana es:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_T|_S}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{S_b} \sigma(\vec{r}) dS$$

Si llevamos la expresión al límite, cuando  $h$  tiende a cero y cuando  $S_b$  tiende a un valor diferencial  $dS_b$ , estamos examinando el campo en un punto de la superficie. El campo es nulo en la parte interna del conductor y, por tanto, podemos escribir:

$$\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \sigma(\vec{r}) dS_b$$

y de allí:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\sigma(\vec{r})}{\epsilon_0} \hat{n} \quad (1.24)$$

donde  $\hat{n}$  es el vector unitario normal a la superficie dirigido hacia fuera del conductor en el punto considerado.

### 1.1.9 Problemas de potencial. Ecuaciones de Laplace y Poisson

Las expresiones integrales del campo y del potencial eléctricos, como funciones de las densidades de carga [Ecs. (1.8) y (1.18)], son útiles cuando se conocen de antemano tales distribuciones. Sin embargo ésta no es con mucho la situación habitual. Por lo general la presencia de conductores y, como se verá más adelante, de dieléctricos, provoca la aparición de distribuciones de carga difíciles de hallar. Es por eso que el planteamiento típico de los problemas electromagnéticos puede ser integral, pero más frecuentemente es diferencial. Usualmente nos enfrentaremos a ecuaciones diferenciales que deben resolverse para alguna zona del espacio, y donde tenemos fijadas ciertas condiciones de contorno que deberán satisfacerse. En este apartado nos centraremos en las ecuaciones usuales para el campo y el potencial.

La ley de Gauss en forma diferencial es:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (1.25)$$

que se obtiene de la expresión integral por aplicación del teorema de la divergencia. Es la ecuación diferencial primera para el campo eléctrico. A diferencia de la expresión integral ahora *tenemos una relación entre el campo y la densidad de carga que debe cumplirse punto a punto en la zona del espacio que se considere*. Es fácil de ver entonces que la condición que debe satisfacer el campo en aquellos puntos del espacio donde no haya carga eléctrica (aunque exista carga en las proximidades) es la de tener divergencia nula.

Del carácter conservativo del campo eléctrico se deduce la segunda ecuación, que es:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (1.26)$$

Esta ecuación está estrechamente relacionada con la ecuación (1.14), en la que se expresaba el campo como el menos gradiente del potencial eléctrico. En realidad todo gradiente de una función escalar es irrotacional (su rotacional es nulo), y viceversa: si un campo vectorial es irrotacional es seguro que podrá hallarse una función escalar tal que su gradiente coincida con el campo vectorial.

Sustituyendo el campo en la ecuación (1.25) en función del potencial tendremos:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot (-\nabla \phi) \equiv -\nabla^2 \phi \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \phi = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (1.27)$$

que se denomina *ecuación de Poisson*. La divergencia de un gradiente es la laplaciana,  $\nabla^2$ , del campo escalar. En coordenadas cartesianas se expresa sencillamente como:

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

y físicamente viene a representar la variación promedio del potencial en los alrededores inmediatos de cada punto del espacio. En los problemas habituales de potencial esta ecuación debe resolverse para obtener una solución genérica, y quedarán dos constantes por determinar mediante condiciones de contorno. Singular importancia tiene la ecuación diferencial del potencial en aquellos puntos del espacio en los que no hay carga eléctrica, denominada *ecuación de Laplace*:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (1.28)$$

La solución general de esta ecuación es también parte de la solución de la ecuación de Poisson, a la que habrá que añadir la solución particular en función de la carga eléctrica. La expresión en cartesianas de la laplaciana se ha escrito arriba. Para los otros dos sistemas habituales de coordenadas puede consultarse el anexo B.

**Ejemplo 1.10:** Una esfera conductora sin carga neta, de radio  $a$ , se sitúa en el seno de un campo eléctrico constante, de módulo  $E_0$ . Obtenga la distribución final del campo eléctrico, el potencial de la esfera y la densidad de carga resultante.

Por acción del campo eléctrico la nube de electrones de la esfera conductora se redistribuye, acercándose a la superficie en la dirección contraria a la de  $\vec{E}$ . Aparece una densidad de carga superficial no homogénea en el conductor. Como tal distribución no es fácilmente calculable no podemos tratar de obtener  $\vec{E}$  ó  $\phi(\vec{r})$  directamente por procedimientos integrales. La alternativa es obtener la solución de la ecuación de Laplace en el espacio que circunda a la esfera:

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{para } r > a.$$

Tomaremos el campo eléctrico externo en la dirección Z por comodidad:

$$\vec{E}_{ext}(\vec{r}) = E_0 \hat{z}$$



El problema tiene entonces simetría azimutal, y todas las magnitudes implicadas (densidad superficial de carga, campo y potencial finales), han de ser invariantes con el ángulo  $\phi$ . La ecuación de Laplace es ahora:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) = 0 \quad (1.29)$$

y la solución a esta ecuación es bien conocida:

$$\phi(r, \theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \left( A_i r^i + B_i r^{-(i+1)} \right) P_i(\cos \theta) \quad (1.30)$$

donde  $P_i(\cos \theta)$  representa el polinomio de Legendre de orden  $i$ . Los polinomios de Legendre son aquellos que satisfacen la ecuación diferencial del mismo nombre, y, en la práctica se obtienen mediante la fórmula de Rodrigues:

$$P_i(x) = \frac{1}{2^i i!} \frac{d^i}{dx^i} (x^2 - 1)^i$$

$$P_0(x) = 1 \quad P_1(x) = x \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad \dots$$

El que puedan ser necesarios más o menos términos del sumatorio en la ecuación (1.30) depende de las condiciones de contorno que deban satisfacerse. En nuestro problema particular estas condiciones son:

$$i) \phi(r=a) = cte. \quad y \quad ii) \vec{E}(\vec{r}) \Big|_{r \rightarrow \infty} = E_0 \hat{z}$$

La primera condición fuerza la relación:  $A_i = -B_i a^{-(2i+1)} \quad \forall i$ . Por otro lado el campo eléctrico debe ser:

$$\begin{cases} E_r(r, \theta) = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = -\sum \left( i A_i r^{i-1} - (i+1) B_i r^{-(i+2)} \right) P_i(\cos \theta) \\ E_\theta(r, \theta) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\sum \left( A_i r^{i-1} + B_i r^{-(i+2)} \right) \frac{dP_i(\cos \theta)}{d\theta} \\ E_\phi(r, \theta) = 0 \end{cases}$$

y su valor limite cuando nos alejamos de la esfera :

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0 \hat{z} = E_0 (\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta)$$

que es el campo externo sin perturbar por la presencia de la esfera. Esta segunda condición fuerza la cancelación de todos los términos de la ecuación (1.30) salvo los dos primeros:  $A_i, B_i = 0 \quad \forall i > 1$  y además:  $A_1 = -E_0$  y  $B_1 = -A_1 a^3 = E_0 a^3$ .

La solución es finalmente:

$$\vec{E}(r, \theta) = E_0 \hat{z} + \frac{1}{r^3} E_0 a^3 (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta})$$

La densidad de carga resultante en la esfera es:

$$\sigma(\vec{r}) = \epsilon_0 \vec{E} \cdot \hat{n} \big|_S = \epsilon_0 E_r \big|_{r=a} = 3 \epsilon_0 E_0 \cos \theta$$

Por último debe añadirse que el potencial en la esfera está indeterminado. No tenemos ninguna referencia respecto a la que medirlo porque el campo exterior está infinitamente extendido en el espacio, desde  $z = -\infty$  hasta  $z = +\infty$ , y esta suposición implica que hay cargas en el infinito, que son las que están produciendo el campo. Consecuentemente no podemos fijar un potencial de referencia en el infinito.

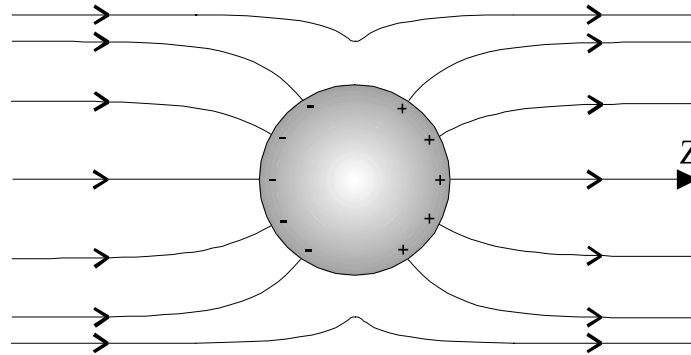


Fig. 1.13 Esfera conductora en el seno de un campo eléctrico uniforme

**Ejemplo 1.11 :** Un cable coaxial está formado por dos conductores cilíndricos, de radios  $a$  y  $b$ . El conductor exterior se pone a potencial  $V$  y el interior se conecta a tierra. Obtenga el campo eléctrico entre los conductores.

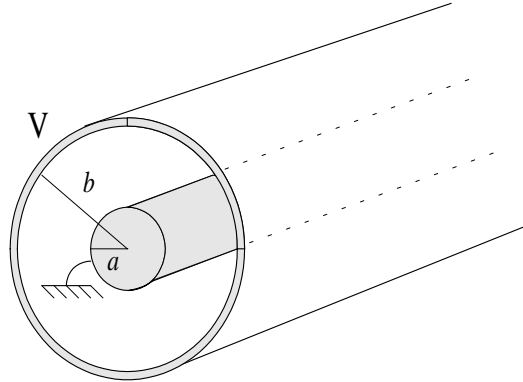


Fig. 1.14 Cable coaxial

Debido a la simetría cilíndrica del problema podemos asegurar que las densidades superficiales de carga en los conductores serán homogéneas, aunque de momento desconozcamos su valor. Esa consideración nos permitiría aplicar la ley de Gauss en forma integral para obtener el campo que, posteriormente, pondríamos en relación con la diferencia de potencial  $V$  entre los conductores. Esa vía se propone como ejercicio.

La alternativa es obtener la función potencial mediante la resolución de la ecuación de Laplace. Podemos afirmar que nuestro potencial sólo será función del radio:  $\phi(\vec{r}) = \phi(\rho)$ , y por tanto:

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) = 0$$

La solución a esa ecuación es:  $\phi(\rho) = A \ln \rho + B$ , y por aplicación de las condiciones de contorno:  $\phi(\rho = a) = 0$ ,  $\phi(\rho = b) = V$ , se llega a:

$$\phi(\rho) = V \frac{\ln(\rho/a)}{\ln(b/a)} \quad \text{y} \quad \vec{E}(\vec{r}) = -\frac{V}{\rho \ln(b/a)} \hat{\rho}$$

**Ejemplo 1.12:** Una esfera conductora hueca, sin carga neta, de radio interior  $a$  y exterior  $b$ , contiene en su interior una carga puntual de valor  $q$ , en alguna posición arbitraria  $\vec{r}_0$ . ¿Cuál será el campo en el exterior de la esfera?

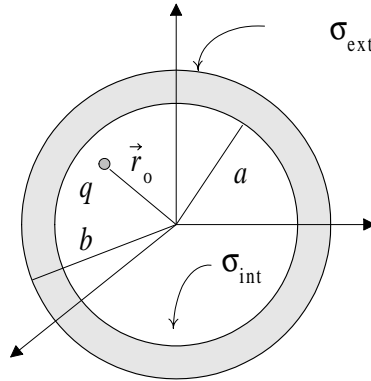


Fig. 1.15

Utilizamos de nuevo la ecuación de Laplace para calcular el potencial en el exterior. Debe observarse que si situamos la esfera conductora centrada en el origen de coordenadas podremos asegurar que el potencial externo es de la forma

$$\phi(\vec{r}) = \phi(r) \quad \forall r > b$$

y esto sin conocer cómo sean las distribuciones de carga del problema. La razón es que quien manda a la hora de determinar las condiciones de contorno para el potencial es únicamente la superficie equipotencial que constituye el conductor. En estas circunstancias, de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas, podemos deducir que la forma del potencial será:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{A}{r} + B \quad \forall r > b$$

donde, además,  $B=0$  por la condición de potencial nulo en el infinito. No sabemos cuál es el potencial de la esfera, y nos queda la constante  $A$  sin determinar. Para finalizar el problema debemos aplicar la ley integral de Gauss, lo que resulta útil porque ahora sabemos que el campo exterior sólo tiene componente radial, consecuentemente con la forma del potencial. El resultado final es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r}}{r^2} \quad \forall r > b$$

Por tanto, el conductor realiza un apantallamiento parcial de la carga eléctrica situada en su interior: no en lo que se refiere a su valor neto, que da la magnitud del campo, pero sí en cuanto a que no importa cuál sea su posición en el interior de la esfera. Compruebe que si la esfera conductora estuviese conectada a un potencial fijo  $V$  el valor del campo en el exterior sería independiente también del valor de la carga puntual.

### 1.1.10 Condiciones que determinan el campo en una región

La segunda identidad de Green es un teorema matemático que establece:

$$\int_V [\phi \nabla^2 \Psi - \Psi \nabla^2 \phi] dv = \oint_S \left[ \phi \frac{\partial \Psi}{\partial n} - \Psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] ds \quad (1.31)$$

para cualesquiera funciones escalares  $\phi$  y  $\Psi$  definidas en el volumen  $V$ , y con  $S$  la superficie cerrada que limita a  $V$ .

Si identificamos la función  $\phi$  con nuestra función potencial y elegimos:

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (\text{función de Green}) \quad (1.32)$$

se obtiene una expresión de interés para el potencial:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}') dv'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{1}{4\pi} \oint_{S'} \left[ \phi \frac{\partial \Psi}{\partial n'} - \frac{\partial \phi}{\partial n'} \Psi \right] ds' \quad (1.33)$$

donde  $\rho(\vec{r})$  es la densidad volúmica de carga y  $n$  es la normal a la superficie en cada punto. La ecuación precedente no tiene para nosotros tanto una importancia práctica como teórica. Su significado es que *el potencial en un cierto volumen depende exclusivamente de la carga interior al volumen y de las condiciones de contorno en la superficie cerrada que lo rodea*. Tal superficie puede ser una superficie física de separación con algún otro medio, o una superficie imaginaria, definida de modo matemático, gráfico, o de alguna otra manera.

El teorema de unicidad del potencial está basado en la ecuación (1.33) y se enuncia así: *“fijadas la densidad volúmica de carga en un determinado volumen y las condiciones de contorno, para el potencial y para su derivada respecto a la normal, en la superficie que lo limita, el valor del potencial en todo el volumen está unívocamente determinado”*.

En la práctica suelen encontrarse dos tipos de superficies: superficies conductoras y la superficie del infinito. Podría tratarse también de una superficie dieléctrica, en un cambio de medio, pero de momento no trataremos esa posibilidad.

Cuando tenemos *una superficie conductora* ocurre que la derivada del potencial respecto a la normal en cada punto coincide con el campo eléctrico en la superficie. Entonces el campo no es realmente independiente del valor de la carga interna al volumen y del valor del potencial en el conductor, por lo que, de hecho, no constituye una condición separada. Si se conoce  $\rho(\vec{r})$  en el volumen y el potencial en la superficie, el problema está, pues, unívocamente determinado. A esta clase de problemas se les denomina *problemas de Dirichlet*. La alternativa es que conozcamos la densidad volúmica de carga y el valor de la derivada del potencial respecto a la normal (el campo) en la superficie. En ese caso quedará una constante por determinar al calcular el potencial. Se habla entonces de *problema de Neumann*.

La *superficie del infinito* puede tratarse como una superficie conductora a potencial cero (si no hay carga en el infinito). Desde este punto de vista el problema de potencial donde se conoce la densidad de carga presente en el espacio ilimitado es un problema de Dirichlet, y su solución general es la dada por la ecuación (1.18).

**Ejemplo 1.13:** Una esfera conductora hueca de radio interior  $a$  y exterior  $b$  se conecta a un potencial  $V$ . A una distancia  $d$  del centro de la esfera ( $d > b$ ) se encuentra una carga puntual de valor  $q$ . ¿Cuál es el potencial en el interior de la esfera?

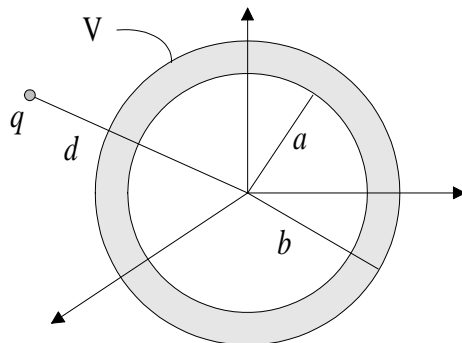


Fig. 1.16

En el interior debe cumplirse  $\nabla^2 \phi = 0$  y además la condición de contorno  $\phi(r = a) = V$ . Como se trata de un problema de Dirichlet tendrá solución única, y como que la simple función  $\phi(\vec{r}) = V$  satisface ambas condiciones, ésta debe ser la solución buscada. Obsérvese que se trata de un volumen cerrado, tal como se estableció al hablar de la unicidad del potencial. De nuevo un conductor conectado a una tensión externa apantalla el efecto de una carga eléctrica.

La utilidad práctica del teorema de unicidad consiste en que *nos permite ignorar las densidades superficiales de carga existentes en la superficie límite del volumen donde calculamos el potencial, así como otras posibles cargas exteriores al volumen*. Esa información, que sería imprescindible si planteáramos el problema por medio del cálculo integral directo, la sustituimos por el conocimiento de la condición de contorno.

### Método de las imágenes

El método de cálculo que se sigue usualmente en la práctica es un método inverso, denominado *método de las imágenes*. Cuando en nuestro problema intervienen densidades superficiales inducidas por la presencia de otras distribuciones de carga, de manera que su cálculo es complicado, lo que se hace *es crear una situación equivalente a la actual pero de más fácil resolución*. La equivalencia se consigue reproduciendo artificialmente las condiciones de contorno por la inclusión de cargas externas al volumen de interés.

**Ejemplo 1.14:** Calcule el campo eléctrico producido en todo el espacio por una carga puntual situada frente a un plano conductor conectado a tierra.

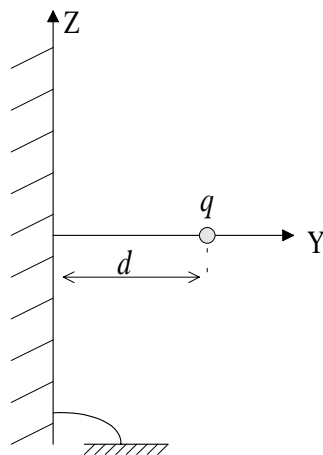


Fig. 1.17

A pesar de su aparente sencillez, el problema no puede resolverse de forma directa, porque la presencia de la carga puntual provoca la aparición de una densidad superficial de carga: los portadores libres del conductor tenderán a concentrarse en alguna medida en el punto del plano más cercano a la carga puntual, atraídos por ésta. Pero esa densidad de carga inducida no puede calcularse de forma sencilla.

La alternativa es plantear un problema equivalente, donde las características esenciales del problema queden inalteradas.

Lo esencial a un problema de potencial, de Neumann o de Dirichlet, es la carga existente en el interior del volumen considerado y las condiciones de contorno alrededor del mismo. La primera objeción para considerar este caso como un problema bien definido de potencial es que no es un volumen cerrado, y, sin embargo, podemos tomar la superficie del infinito para completarlo. En la figura 1.18 se muestra el esquema de este planteamiento.

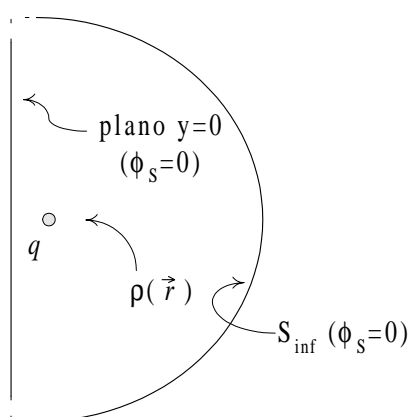


Fig. 1.18 La misma situación de la figura anterior aparece como un problema de Dirichlet al considerar la superficie del infinito

La cuestión es ahora obtener una situación equivalente resoluble. Esto se consigue eliminando el plano conductor y situando una carga imagen al otro lado del plano, como aparece en la figura 1.19.

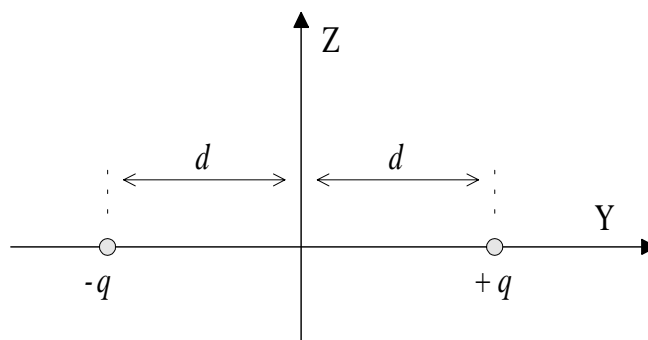


Fig. 1.19 Problema equivalente al representado en la figura 1.17

Si la nueva carga es de igual valor y distinto signo a la original y está situada a la misma distancia del plano, es claro que el potencial en el plano  $y=0$  será nulo. Por otro lado, el potencial en el infinito permanece igual a cero. Entonces *el problema original y el de la figura 1.19, en cuanto que problemas de potencial, son el mismo en el semiespacio derecho, y la solución de ambos es idéntica.*



Tendremos:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{|\vec{r} - d\hat{y}|} + \frac{-q}{|\vec{r} - (-d\hat{y})|} \right) \quad y \geq 0$$

y

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{r} - d\hat{y}}{|\vec{r} - d\hat{y}|^3} - \frac{\vec{r} + d\hat{y}}{|\vec{r} + d\hat{y}|^3} \right) \quad y > 0$$

En cuanto al semiespacio izquierdo (en el problema original) no puede haber ninguna duda:

$$\phi(\vec{r}) = 0, \quad \vec{E}(\vec{r}) = 0 \quad y < 0$$

**Ejemplo 1.15:** a) Comprobar que dos cargas puntuales de valor  $q$  y  $q'$  alineadas con el origen de coordenadas, y situadas a una distancia  $d$  y  $d'$  respectivamente del mismo, dan lugar a una superficie equipotencial esférica de radio  $a$ , centrada en el origen y con valor de potencial cero cuando se satisfacen las siguientes relaciones:

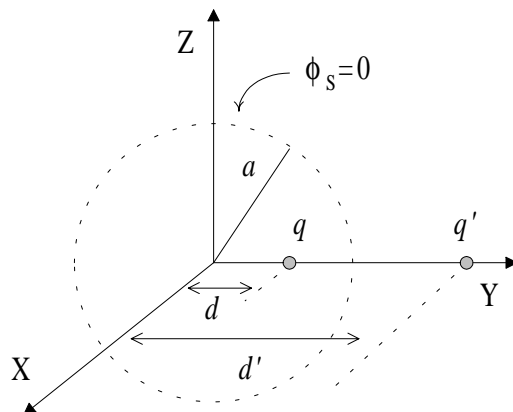


Fig. 1.20

$$q' = -q \frac{a}{d}$$

$$d' = a^2/d$$

El potencial creado por ambas cargas en todo el espacio es:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q}{(x^2 + (y-d)^2 + z^2)^{1/2}} + \frac{q'}{(x^2 + (y-d')^2 + z^2)^{1/2}} \right)$$

Si examinamos el valor del potencial en  $r=a$ , utilizando los valores de  $d'$  y  $q'$  propuestos:

$$\phi(r=a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{(a^2 - 2yd + d^2)^{1/2}} - \frac{a/d}{(a^2 - 2ya^2/d + a^4/d^2)^{1/2}} \right)$$

y después de algunas operaciones, se comprueba que es igual a cero.

**b) Utilizar el resultado anterior para calcular mediante el método de las imágenes el potencial en el interior de la esfera del ejemplo 1.12.**

El resultado anterior se puede interpretar en el sentido de que la imagen de una carga puntual respecto a un conductor esférico a potencial cero es otra carga puntual, de valor y posición bien precisas.

En el ejemplo 1.12 teníamos una carga puntual  $q$  en el interior de una esfera hueca conductora. Supongamos que dicha carga está en la posición  $r_0\hat{y}$ . Una situación equivalente de fácil resolución debería reproducir la condición del potencial en  $r=a$  (radio interno de la cavidad) para permitirnos ignorar el conductor. Para ello situamos otra carga puntual en el exterior, de valor  $q'$  y en la posición  $d'$  que se daban en el apartado anterior. Este es un buen inicio, porque ya tenemos un potencial uniforme allí donde estaba la cara interna de la esfera. Pero no reproduce completamente la situación porque en nuestro problema (ejemplo 1.12) el potencial de la esfera no era nulo. ¿Cómo resolver esta eventualidad?

$$\text{El potencial de la esfera es: } \phi(r=a) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a}$$

Acudiendo de nuevo al teorema de unicidad se puede afirmar que el potencial en el interior es:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{a} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r} - r_0\hat{y}|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-q \frac{a}{r_0}}{\left| \vec{r} - \frac{a^2}{r_0} \hat{y} \right|}$$

Razónelo.

### 1.1.11 Energía electrostática

Toda distribución espacial de carga posee una energía potencial eléctrica, porque es capaz de realizar un trabajo sobre otras cargas. Cuando hablamos de energía potencial estamos implícitamente reconociendo una referencia de energía cero, respecto a la que medimos los sucesivos incrementos de energía que pueda recibir algún elemento de nuestro

sistema. Es importante en las cuestiones relacionadas con la energía explicitar con claridad cuál es nuestro sistema y cuál es la referencia de energía nula que estamos tomando.

La energía potencial eléctrica debe coincidir con la energía de formación del sistema: aquella energía que fue necesario aportar para construir la distribución de carga a partir de una situación inicial de máxima dispersión (energía nula).

La energía electrostática se considera de modo diverso si tratamos con densidades continuas de carga o con colecciones de cargas puntuales. La carga puntual es una aproximación ideal, pero propiamente no tiene sentido físico, y el motivo es precisamente que para concentrar una cantidad finita de carga en un volumen nulo necesitaríamos aplicar una energía infinita. En sistemas de cargas puntuales se habla con más propiedad de energía de reunión que de energía de formación del sistema.

Considérese un conjunto de  $N$  cargas puntuales de valores  $q_i$  situadas en posiciones  $\vec{r}_i$ . Vamos a tratar de calcular la energía que hubo que aplicar para formar el sistema, partiendo de una situación inicial en la que las cargas estaban infinitamente separadas unas de otras. Para ello iremos trayendo ordenadamente las cargas desde el infinito hasta sus posiciones respectivas, y contabilizando los aportes de energía sucesivos.

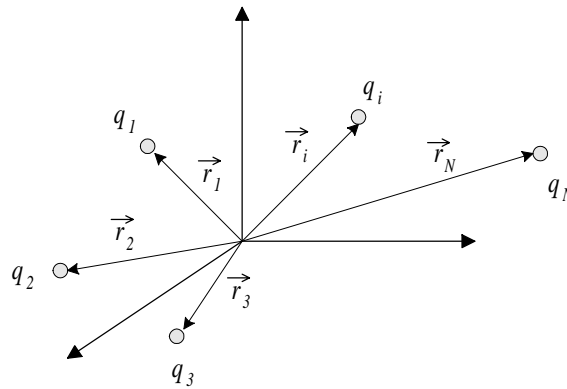


Fig. 1.21 Sistema de  $N$  cargas puntuales

$$\begin{aligned}
 U_{\text{inicial}} &= 0 \\
 q_1 &\rightarrow \vec{r}_1 ; & \Delta U_1 &= 0 \\
 q_2 &\rightarrow \vec{r}_2 ; & \Delta U_2 &= q_2 \phi_1(\vec{r}_2) \\
 q_3 &\rightarrow \vec{r}_3 ; & \Delta U_3 &= q_3 (\phi_1(\vec{r}_3) + \phi_2(\vec{r}_3)) \\
 &\vdots & & \\
 q_N &\rightarrow \vec{r}_N ; & \Delta U_N &= q_N \sum_{i=1}^N \phi_i(\vec{r}_N)
 \end{aligned}$$

La energía final es:

$$U = \sum_{i=1}^N \Delta U_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N q_i \phi(\vec{r}_i) \quad (1.34)$$

Se empleó la notación  $\phi_j(\vec{r}_i)$  para el potencial creado por la carga  $q_j$  en el punto  $\vec{r}_i$  y  $\phi(\vec{r}_i)$  para el potencial creado en  $\vec{r}_i$  por todas las cargas excepto la que ocupa esa posición,  $q_i$ . La comprobación de la ecuación (1.34) se propone como ejercicio.

Para un continuo de carga  $\rho(\vec{r})$  es aplicable la misma filosofía, pero ahora en vez de agregar cargas puntuales tendremos que ir formando el sistema mediante diferenciales de carga. La expresión final de la energía en este caso será:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) dv \left( + \frac{1}{2} \int_S \sigma(\vec{r}) \phi(\vec{r}) ds \right) \quad (1.35)$$

donde añadimos la integral de superficie en el caso de que exista también una densidad superficial de carga en la distribución.

### 1.1.12 Energía electrostática asociada al campo eléctrico

Las expresiones anteriores parecen dar a entender que la energía de una distribución de cargas está limitada espacialmente al propio volumen que ocupan las cargas. Sin embargo no es esa la única manera de verlo: puesto que una distribución de carga es capaz de realizar un trabajo sobre otras cargas distantes parece más adecuado asociar la energía al campo o al potencial creado en todo el espacio. A partir de la ecuación (1.35) puede buscarse una expresión alternativa.

$$\rho(\vec{r}) = -\epsilon_0 \nabla^2 \phi$$

$$\rho(\vec{r}) \phi(\vec{r}) = -\epsilon_0 \phi(\vec{r}) \nabla^2 \phi \quad (1.36)$$

Utilizaremos la igualdad:  $\nabla \cdot (\phi \vec{E}) = \phi \nabla \cdot \vec{E} + \nabla \phi \cdot \vec{E} = \phi (-\nabla^2 \phi) + (-|\vec{E}|^2)$ , de donde:  $-\phi \nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\phi \vec{E}) + |\vec{E}|^2$ . Sustituyendo esta última en (1.36) y después en (1.35) llegamos a:

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \left( \int_V |\vec{E}|^2 dv + \int_V \nabla \cdot (\phi \vec{E}) dv \right)$$

A partir de allí podríamos extender el volumen de integración a todo el espacio, ya que el resultado no debe variar. Si integramos hasta el infinito la segunda integral se cancela:

$$\int_V \nabla \cdot (\phi \vec{E}) dv = \oint_{S_{\text{inf}}} \phi \vec{E} \cdot d\vec{s} \rightarrow 0$$

porque cuando  $r \rightarrow \infty$  tenemos  $\phi \rightarrow 1/r$ ,  $|\vec{E}| \rightarrow 1/r^2$ ,  $ds \rightarrow r^2$  aun en el caso en que el campo y el potencial decrezcan de la forma más lenta posible, siempre que hablemos de distribuciones de carga limitadas. La expresión final es:

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int_V |\vec{E}|^2 dv \quad (1.37)$$

que es la habitualmente utilizada.

**Ejemplo 1.16:** Calcule la energía de una distribución esférica de carga de radio  $R$  y densidad volúmica de carga homogénea  $\rho_0$ .

Haremos el cálculo directo integrando las contribuciones de energía que se precisan para formar la esfera, trayendo diferenciales de carga desde el infinito. Por sencillez tomaremos capas concéntricas de radio  $r$  creciente y espesor  $dr$ .

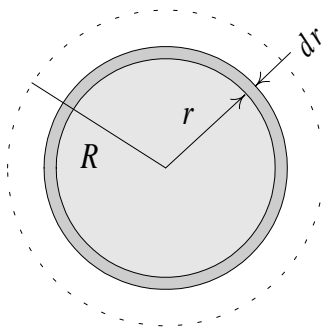


Fig. 1.22

Para depositar cada diferencial de carga debemos aportar una energía dada por

$$dU = \phi(r) dq$$

donde  $\phi(r)$  es el potencial creado por la carga precedente en el límite de la esfera en formación:

$$\phi(r) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} r^2$$

$$U = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} \rho_0 4\pi \int_0^R r^2 r^2 dr = \frac{4\pi\rho_0^2}{15\epsilon_0} R^5 \quad (J)$$

Verifique este resultado utilizando la ecuación (1.37).

### 1.1.13 Aproximación del potencial a grandes distancias. Desarrollo multipolar del potencial

En los problemas técnicos no se precisa habitualmente de una solución exacta, sino que resulta más que suficiente disponer de resultados con cierto grado de aproximación. Esto es aplicable a todos los problemas de Ingeniería. Los modelos que se utilizan son simplificaciones que se ajustan de alguna manera a la realidad física, sin contemplarla totalmente. En teoría electromagnética se han desarrollado formulaciones sencillas que omiten a propósito algunas características de los campos para centrarse en lo que en una situación dada resulta esencial. La aproximación más típica es la que presentaremos ahora para el caso del potencial eléctrico estático: la de *grandes distancias* o, también llamada, *de campo lejano*. Más adelante en este curso, y en otros posteriores, se volverá sobre este modelo, para el estudio de los sistemas radiantes y de la difracción.

Consideremos una distribución de carga arbitraria, limitada espacialmente, situada en las proximidades del origen de coordenadas.

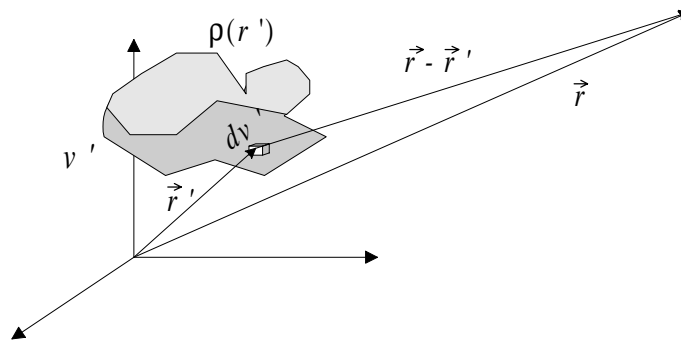


Fig. 1.23 Cálculo del potencial a grandes distancias

El potencial eléctrico creado en cualquier punto del espacio es:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv'$$

Buscaremos una aproximación de esta función cuando  $|\vec{r} - \vec{r}'| \gg |\vec{r}'| \quad \forall \vec{r}'$ , es decir, cuando medimos el potencial a grandes distancias de la distribución de carga. Para conseguirlo desarrollamos en serie de Taylor la función en  $\vec{r}'$  del integrando. La fórmula en el caso de tres variables es:

$$f(\vec{r}) = f(0) + \sum_{i=1}^3 \left. \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|_{x_i=0} x_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right|_{x_i, x_j=0} x_i x_j + \dots$$

alrededor del punto  $\vec{r} = 0$ .

Aplicamos el anterior desarrollo a la función  $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$  como función de  $\vec{r}'$ :

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{1}{r^5} \left( \sum_i \sum_j (3x_i' x_j' - r'^2 \delta_{ij}) x_i x_j \right) + \dots$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker ( $= 0$  si  $i \neq j$ ;  $= 1$  si  $i = j$ ).

Sustituyendo en la expresión del potencial obtenemos:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{1}{r} \int_{V'} \rho(\vec{r}') dv' + \frac{1}{r^3} \vec{r} \cdot \int_{V'} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dv' + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{1}{r^5} \sum_i \sum_j \left( \int_{V'} (3x_i' x_j' - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{r}') dv' \right) + \dots \right\} \quad (1.38) \end{aligned}$$

Usualmente son suficientes esos tres términos para obtener una buena aproximación al potencial, y aun puede bastar con los dos primeros. En el caso de que no sea así, quizá no sea una buena idea buscar una aproximación por este procedimiento y deba pensarse en un método numérico. Las expresiones integrales de la ecuación (1.38) reciben el nombre de *momentos de la distribución de carga*.

$$\left. \begin{aligned} \text{momento monopolar (escalar): } Q_T &= \int_{V'} \rho(\vec{r}') dv' & (C) \\ \text{momento dipolar (vector): } \vec{p} &= \int_{V'} \vec{r}' \rho(\vec{r}') dv' & (C \cdot m) \\ \text{m. cuádrupolar (tensor): } Q_{ij} &= \frac{1}{2} \int_{V'} (3x_i' x_j' - r'^2 \delta_{ij}) \rho(\vec{r}') dv' & (C \cdot m^2) \end{aligned} \right\} \quad (1.39)$$

Estos momentos, y los sucesivos de orden superior, caracterizan con aproximación creciente la forma de la distribución de carga. El potencial se escribe entonces:

$$\phi(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_T}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}^T \mathbf{Q} \vec{r}}{r^5} + \dots \quad (1.40)$$

**Ejemplo 1.17:** Calcular el potencial creado a grandes distancias por las dos cargas puntuales de la figura 1.24 mediante los dos primeros términos de (1.40).

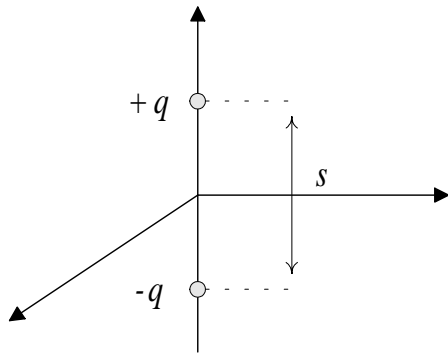


Fig. 1.24

El momento monopolar es la carga total:  $Q_T = 0$ .

La expresión del momento dipolar es, para cargas puntuales:

$$\vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i$$

Y, en nuestro caso, tendremos:

$$\vec{p} = +q \cdot \frac{s}{2} \hat{z} + (-q) \cdot \frac{s}{2} \hat{z} = qs\hat{z} \quad (1.41)$$

El potencial resulta ser en primera aproximación:

$$\phi(\vec{r}) \approx 0 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qs\hat{z} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qs}{r^2} \cos\theta$$

Compruebe que es igual al obtenido en el ejemplo 1.7.

**Ejemplo 1.18:** Calcule el potencial que crean a grandes distancias cuatro cargas puntuales situadas en el plano YZ de forma que ocupan los vértices de un cuadrado de lado  $l$ . Las cargas tienen magnitudes iguales y signos alternados (Fig. 1.25).

El momento monopolar es nulo. El momento dipolar lo calcularemos igual que en el ejemplo anterior:

$$\vec{p} = 0 \cdot q + l\hat{z} \cdot (-q) + l\hat{y} \cdot (-q) + l(\hat{y} + \hat{z}) \cdot q = 0$$



En este caso estamos obligados a calcular el momento de tercer orden para obtener alguna aproximación.

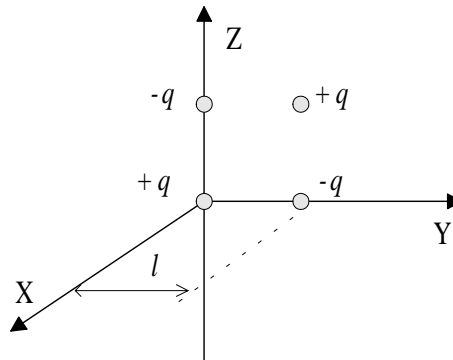


Fig. 1.25 Cuadripolo

La integral de la expresión general vuelve a ser sustituida por un sumatorio sobre las cargas:

$$Q_{ij} = \frac{1}{2} \sum_m (3x_i^m x_j^m - r^m{}^2 \delta_{ij}) q_m$$

Las variables  $x_i^m, x_j^m$  son las componentes del vector posición de la carga  $q_m$ ;  $r^m$  es el módulo del vector. La siguiente tabla facilitará el cálculo, que debe hacerse con cuidado:

m	$q_m$	$x^m$	$y^m$	$z^m$	$r^m$
1	$+q$	0	0	0	0
2	$-q$	0	0	$l$	$l$
3	$+q$	0	$l$	$l$	$\sqrt{2} l$
4	$-q$	0	$l$	0	$l$

Se obtiene:

$$Q_{11} = Q_{xx} = 0 \quad Q_{yy} = 0 \quad Q_{zz} = 0$$

$$Q_{xy} = Q_{yx} = 0$$

$$Q_{xz} = Q_{zx} = 0$$

$$Q_{yz} = Q_{zy} = \frac{3}{2} l^2 q y$$

y sustituyendo en la ecuación (1.40):  $\vec{r}' \cdot \vec{Q} \vec{r} = 3l^2 q yz$ , que podemos pasar a coordenadas esféricas utilizando:  $y = r \sin\theta \sin\phi$  y  $z = r \cos\theta$ . Resulta:

$$\phi(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3l^2 q}{2r^3} \sin 2\theta \sin \phi$$

### Dependencia de los momentos con el origen de coordenadas

En los ejemplos anteriores se han situado las distribuciones de carga próximas al origen de coordenadas, pero surge la cuestión de si los momentos de segundo y tercer orden hubieran resultado diferentes de haber elegido otra posición para las cargas y, por tanto, si el potencial podría haber variado en función de esa elección.

El momento monopolar, por definición, es independiente de la posición de la distribución de carga. Los demás momentos sí pueden variar. Veámoslo con el momento dipolar.

Consideremos una distribución de carga arbitraria, a la que referenciaremos según dos sistemas de coordenadas diferentes, uno desplazado respecto al otro, tal como se muestra en la figura 1.26. Calcularemos el momento dipolar desde uno y otro.

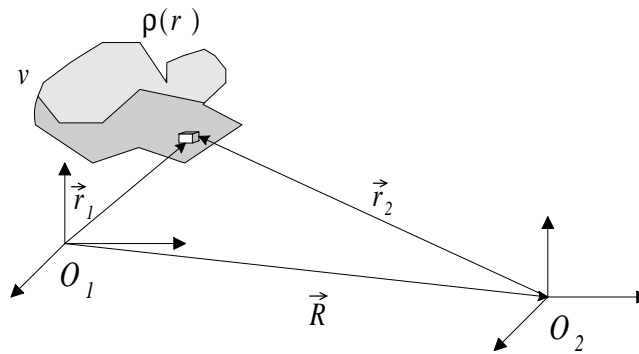


Fig. 1.26 Dependencia de  $\vec{p}$  con la elección del origen

Se cumple  $\rho(\vec{r}_1) = \rho(\vec{r}_2)$  cuando  $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 + \vec{R}$ . Entonces:

$$\vec{p}_2 = \int_V \vec{r}_2 \rho(\vec{r}_2) dv = \int_V (\vec{r}_1 - \vec{R}) \rho(\vec{r}_1) dv = \vec{p}_1 - \vec{R} Q \quad (1.42)$$

Por tanto el momento dipolar es independiente del origen tomado sólo si la carga total de la distribución es nula. Resultados semejantes se obtendrían para los momentos de orden superior.

**Ejemplo 1.19:** Repita el cálculo del momento cuadripolar para la distribución de cargas del ejemplo anterior tomando el origen de coordenadas en el centro del cuadrado.

Comprobará que el momento cuadripolar no varía en este caso. Observe que los momentos de orden inferior en esa distribución son nulos. En realidad ese resultado responde, con un orden más, a la deducción que se acaba de hacer.

#### 1.1.14 Dipolo real y dipolo ideal

El cálculo de los momentos permite realizar aproximaciones cuando nos alejamos de la distribución de cargas, pero también resultan extremadamente útiles cuando las dimensiones de la distribución son muy pequeñas, pues ambas situaciones son equivalentes: se satisface la condición  $|\vec{r} - \vec{r}'| \gg r'$ .

Junto al concepto de carga puntual (momento monopolar puro o monopolio ideal) se pueden considerar los de dipolo ideal y cuadripolo ideal. Ambos tienen aplicación en el estudio de las interacciones de los campos eléctricos con la materia.

El dipolo ideal puede definirse como una distribución formada por dos cargas puntuales de igual magnitud y signo opuesto (dipolo real), cuando la distancia que las separa tiende a cero, pero de manera que se mantiene constante el momento dipolar. De acuerdo con el ejemplo 1.17 (Ec. 1.41), esto implica que el valor  $q$  ha de tender simultáneamente a infinito. Como resultado se obtiene una distribución puntual, pero caracterizada exclusivamente por su momento dipolar (y por su posición), de la misma forma que el valor de su momento monopolar caracteriza completamente a la carga puntual.

El potencial creado en el espacio por un dipolo ideal es (vid. la ecuación (1.40)):

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \quad (1.43)$$

donde  $\vec{r}_0$  es la posición del dipolo. Ahora ya no se trata de una aproximación, sino del valor exacto del potencial, debido a la dimensión nula del dipolo.

En la misma forma si tomamos las cuatro cargas puntuales del ejemplo 1.18 y las colapsamos a un punto de forma que se mantenga el valor de su momento cuadripolar obtendremos un cuadripolo ideal, caracterizado exclusivamente por el valor de ese momento y su posición.

### 1.1.15 El dipolo ideal en presencia de campos eléctricos externos

Sea un dipolo ideal situado en el seno de un campo eléctrico externo producido por alguna distribución de cargas lejana. ¿Cuál es la influencia del campo sobre el dipolo?

Para verlo imaginemos que el dipolo consta de dos cargas puntuales de distinto signo separadas una distancia  $\delta$ . La energía potencial del dipolo en una determinada posición es:

$$U_{dip} = +q\phi(\vec{r}_0 + \frac{1}{2}\vec{\delta}) + (-q)\phi(\vec{r}_0 - \frac{1}{2}\vec{\delta}) = q\left[\phi(\vec{r}_0 + \frac{1}{2}\vec{\delta}) - \phi(\vec{r}_0 - \frac{1}{2}\vec{\delta})\right]$$

$$U_{dip} = q\left(-\vec{E}_{ext}(\vec{r}_0) \cdot \vec{\delta}\right) = -\vec{p} \cdot \vec{E}_{ext}(\vec{r}_0) \quad (1.44)$$

Este resultado tiene dos importantes implicaciones:

- si el campo eléctrico externo es uniforme, entonces el dipolo buscará el equilibrio (estado de energía mínima) orientándose en la dirección del campo;
- si el campo no es uniforme, el dipolo se orientará con él, pero además se desplazará buscando la zona donde el campo es más intenso.

## 1.2 El campo electrostático en presencia de medios dieléctricos

Los medios dieléctricos, o aislantes, no poseen portadores de carga libres, capaces de desplazarse a través del medio bajo la influencia de campos eléctricos; sin embargo, las moléculas que forman su estructura pueden sufrir cambios en su orientación o pequeños desplazamientos. A este efecto se le denomina *polarización* del material. Un medio dieléctrico polarizado crea a su vez un campo eléctrico que se superpone al campo excitador, dando lugar a un campo final en el equilibrio diferente al que ocuparía el espacio si no hubiese dieléctrico.

El estudio de los fenómenos electrostáticos en medios dieléctricos se realiza a partir de modelos microscópicos en los que se asume la existencia de dipolos ideales como los elementos constitutivos del material. Estos dipolos simulan el estado de polarización atómica o molecular.

Existen básicamente dos tipos de medios dieléctricos: los *dieléctricos polares*, constituidos por moléculas orientadas eléctricamente, y los *dieléctricos no polares*, en los que las moléculas tienen un momento dipolar nulo cuando sobre ellas no actúan campos externos. Los primeros no presentarán usualmente un efecto macroscópico neto de forma espontánea, porque el estado de mínima energía coincide con aquel en que las orientaciones de los dipolos elementales son arbitrarias, y el efecto global se cancela. La presencia de un campo exterior es lo que provoca una orientación preferente de los dipolos en la dirección del campo, y un efecto macroscópico medible. En el caso de los dieléctricos no polares, un

campo exterior puede todavía producir un desequilibrio microscópico de las cargas, con lo que provoca simultáneamente la creación y la orientación de los dipolos, con efectos netos apreciables.

En una primera aproximación, el simple modelo que se acaba de bosquejar es suficiente. Es claro, sin embargo, que existirán moléculas o cristales elementales cuyo comportamiento eléctrico deba caracterizarse más cuidadosamente, por ejemplo con la inclusión de cuádrupolos elementales.

En teoría de campos estamos interesados en el estudio de los efectos macroscópicos, sin ánimo de averiguar con detalle lo que ocurra a escala atómica o molecular. De hecho, el modelo atómico, por su naturaleza discreta, es el modelo opuesto a la teoría de campos clásica que, por definición, sólo trata con medios continuos. Por esto un átomo, una molécula, un portador de carga, o un grupo pequeño de ellos, no tienen una consideración particular. Es más, ni siquiera se consideran, puesto que no son capaces de producir efectos apreciables a escala macroscópica.

Cuando tomamos un diferencial de volumen o de superficie en un material dieléctrico se asume que *el número de dipolos elementales contenidos en él es muy elevado*. Las consideraciones que se hacen referentes al modelo atómico son las necesarias para construir un modelo útil y realista, que proporcione resultados válidos macroscópicamente.

La consecuencia de lo anterior es que sólo tratamos con *valores medios* de campo, o de potencial, existentes en los diferentes puntos del medio material, pero que desde luego no coinciden con los valores del campo *microscópico* o *campo local* que pueda haber en dichos puntos. Es, por otra parte, el campo medio, o campo a escala macroscópica, el que tiene interés, pues el campo local será una función complicada de la posición, cuyas fluctuaciones tienen poca relevancia para nuestro estudio.

### 1.2.1 Vector polarización

Consideremos un diferencial de volumen en un medio dieléctrico polar. En su interior existen numerosos dipolos elementales (microscópicos) con orientaciones arbitrarias. La suma de todos los momentos dipolares microscópicos es un diferencial de momento dipolar.

$$d\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i \quad (1.45)$$

Cuando el medio está inmerso en el seno de un campo eléctrico, los dipolos elementales se orientan en la dirección del campo. La inspección del momento dipolar diferencial de los diferenciales de volumen nos da información de la presencia y del valor del campo eléctrico total que está actuando sobre el material. Se define el vector polarización como la densidad de momento dipolar por unidad de volumen.

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{d\vec{p}}{dv} \quad (C/m^2) \quad (1.46)$$

Esta magnitud define completamente el estado de polarización del medio, en la misma medida que el momento dipolar es una caracterización completa de un dipolo elemental. Es un campo vectorial definido en todo el volumen del dieléctrico, que tomará habitualmente diferentes valores en los diferentes puntos del material, ya que el estado de polarización no tiene por qué ser uniforme. En figura 1.27 se representa esquemáticamente todo lo anterior.

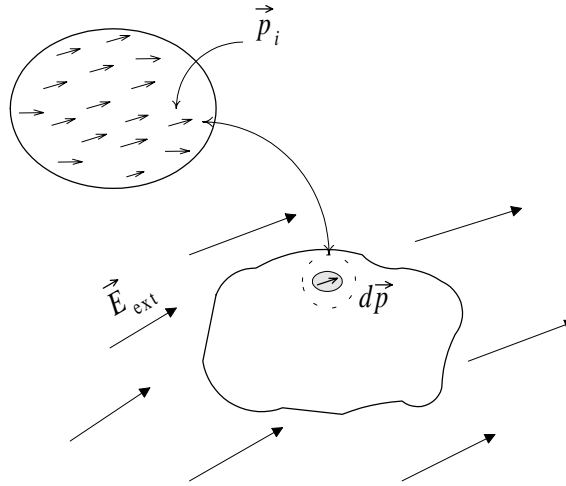


Fig. 1.27 *Dieléctrico polarizado por efecto de un campo eléctrico exterior*

El dieléctrico polarizado contribuye al campo total por efecto de la orientación mayoritaria de los dipolos elementales. La contribución del dieléctrico se puede obtener mediante el vector polarización de acuerdo con las expresiones (1.43) y (1.46):

$$d\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\vec{p} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{P}(\vec{r}') dv' \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

de donde resulta:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \quad (1.47)$$

Obsérvese que el potencial dado por la ecuación (1.47) no es el potencial presente en el espacio, sino únicamente la contribución del dieléctrico, del mismo modo que el campo eléctrico que se deduzca de éste no será el campo total presente, sino una parte de él. Conviene resaltar que en el equilibrio el dieléctrico está también, en cierta medida, autopolarizado, y unas zonas del medio influyen en las restantes para dar lugar a la polarización final, pero todo ello está incluido en el vector  $\vec{P}(\vec{r})$ .

### 1.2.2 Relación entre el vector polarización y el campo eléctrico. Tipos de dieléctricos

En Electrostática -al igual que en multitud de situaciones que se verán más adelante durante el curso, incluso cuando se consideran casos con variación temporal- buscamos siempre el estudio de las interacciones eléctricas en el equilibrio, o en estado estacionario. En el caso de los dieléctricos ocurre que, cuando son polarizados por un campo exterior, las diferentes partes del medio ejercen entre sí una influencia recíproca. *Lo importante no es, por tanto, la magnitud del campo externo que comenzó el proceso de polarización, sino el campo global que finalmente se establece en cada punto del medio*

La magnitud del efecto de polarización dieléctrica depende del tipo de material considerado. En medios *lineales, homogéneos e isótropos* se escribe:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}(\vec{r}) \quad (1.48)$$

donde  $\chi_e$  ("chi sub-e") es la susceptibilidad eléctrica del medio, adimensional y positiva.

En medios *inhomogéneos* se mantiene la misma relación, pero la susceptibilidad es función de la posición:  $\chi_e = \chi_e(\vec{r})$ .

En los llamados medios *anisótropos*, como son los materiales cristalinos no cúbicos, las peculiares fuerzas de ligadura existentes en su estructura condicionan la magnitud del efecto de polarización, de forma diferente según la dirección del campo polarizador. Existen, entonces, direcciones de fácil y de difícil polarización. Para caracterizar estos medios, la susceptibilidad se convierte en un tensor. En medios anisótropos lineales tendremos:

$$\chi_e = \begin{pmatrix} \chi_{11} & \chi_{12} & \chi_{13} \\ \chi_{21} & \chi_{22} & \chi_{23} \\ \chi_{31} & \chi_{32} & \chi_{33} \end{pmatrix} \quad (1.49)$$

y los vectores  $\vec{P}$  y  $\vec{E}$  no son paralelos en general.

Por fin, en medios *no lineales* la polarización varía fuertemente en función de la intensidad de campo aplicado, y no existe una relación sencilla entre el campo eléctrico y el vector polarización:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \epsilon_0 \chi_e(\vec{E}(\vec{r})) \vec{E}(\vec{r})$$

En este tipo de medios, de creciente interés tecnológico, suele desarrollarse la función de susceptibilidad alrededor del punto  $E = 0$  mediante una serie de Taylor:

$$P_i = \epsilon_0 \left( \chi_{ij} E_j + \chi_{ijk} E_j E_k + \chi_{ijkl} E_j E_k E_l + \dots \right)$$

donde los subíndices  $i, j, k, l (= 1, 2, 3)$  denotan las diferentes componentes. En la expresión de arriba se han omitido los sumatorios sobre los índices mudos ( $j$ ;  $j$  y  $k$ ;  $j, k$  y  $l$ , respectivamente). La aparición de tensores de diferentes órdenes indica anisotropía.

En adelante nos limitaremos al caso más usual de medios lineales e isotrópicos.

El estado de polarización de un dieléctrico está determinado por el vector polarización. Sin embargo, este vector no será usualmente un dato conocido desde el principio, por lo que debemos desarrollar con más profundidad la teoría para poder enfrentarnos a problemas reales. Con este objetivo se introduce la consideración explícita de las densidades de carga propias del dieléctrico, esto es, las que constituyen los dipolos inducidos en el material, que se denominan densidades de carga ligada. El trabajar con estas densidades de carga no reporta beneficios, usualmente, en problemas prácticos, porque, como veremos más adelante, se han desarrollado herramientas más directas y poderosas, pero sirven para cimentar la teoría en que se basan esos otros métodos.

Una porción de dieléctrico puede considerarse constituida por un continuo de dipolos elementales, tal como se ha explicado, pero también como una agrupación de carga eléctrica. Para verlo realizamos el siguiente desarrollo.

Se cumple en general:  $\nabla \cdot (\psi \vec{A}) = \nabla \psi \cdot \vec{A} + \psi \nabla \cdot \vec{A}$ . Apliquemos esa relación para el caso particular en que:

$$\psi(\vec{r}') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad \text{y} \quad \vec{A}(\vec{r}') = \vec{P}(\vec{r}')$$

obtendremos, con el operador actuando sobre las variables 'prima':

$$\nabla' \cdot \left( \frac{\vec{P}'(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot \vec{P}'(\vec{r}') + \frac{\nabla' \cdot \vec{P}'(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$



en donde se utilizó la relación:  $\nabla' \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$ .

De todo ello, utilizando la ecuación (1.47), resulta que el potencial producido por el dieléctrico polarizado es de la forma:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{s'} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot \hat{n}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{-\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (1.50)$$

Este resultado es importante, porque nos dice que un dieléctrico polarizado puede caracterizarse equivalentemente mediante dos magnitudes relacionadas con el vector polarización, que son:

$$\begin{aligned} \vec{P}(\vec{r}) \cdot \hat{n}|_S &\equiv \sigma_b(\vec{r}) \\ -\nabla \cdot \vec{P}(\vec{r}) &\equiv \rho_b(\vec{r}) \end{aligned} \quad (1.51)$$

y que se denominan, respectivamente, *densidad superficial* y *densidad volúmica de carga ligada* (*bounded*). De la ecuación (1.50) es inmediato ver que tales magnitudes realizan el papel de verdaderas densidades de carga, y un estudio más detallado, que aquí no haremos, nos demostraría que tales densidades existen y son resultado de la polarización del medio.

### 1.2.3 Ley de Gauss en medios dieléctricos. Vector desplazamiento eléctrico

El hallazgo de las densidades de carga ligadas tiene un interés conceptual y teórico elevado, aun cuando en problemas prácticos pueden no utilizarse. En este apartado las incluiremos para generalizar la ley de Gauss a aquellas situaciones en las que intervienen medios dieléctricos junto a otras distribuciones de cargas libres.

Consideremos una superficie cerrada que contiene en su interior un medio dieléctrico, en el que, a su vez, se ha introducido una distribución de cargas libres. Por lo dicho hasta ahora es claro que las cargas libres producirán un campo que polarizará al dieléctrico, y que esto provocará la aparición de ciertas densidades de carga ligada en el medio. La ley de Gauss aplicada sobre la superficie debe escribirse ahora en la forma:

$$\oint_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = \frac{Q_f + Q_b}{\epsilon_0} \quad (1.52)$$

donde  $Q_f$  y  $Q_b$  son las cargas totales libres y ligadas contenidas en el interior de la superficie considerada. Escrita en forma diferencial, tendremos, para cualquier punto del interior la relación:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f + \rho_b}{\epsilon_0} \quad (1.53)$$

de donde podemos escribir:

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho_f + (-\nabla \cdot \vec{P})$$

y

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f$$

La magnitud  $\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  resulta ser extremadamente útil, porque está estrechamente relacionada con el campo eléctrico, pero su divergencia, a diferencia del propio campo  $\vec{E}$ , sólo depende de la densidad de carga libre. Se define el vector:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (C/m^2) \quad (1.54)$$

denominado *vector desplazamiento eléctrico* y que resulta de gran utilidad para tratar problema en los que intervienen medios dieléctricos.

La relación entre el campo eléctrico y el vector polarización viene dada por la susceptibilidad del medio, según se escribió en la ecuación (1.48). Sustituyendo en la ecuación anterior llegamos a:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}(\vec{r}) \quad (1.55)$$

con lo que la relación entre el vector desplazamiento y el campo es todavía más evidente. Se define:

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e \quad (1.56)$$

como la permitividad relativa o constante dieléctrica del medio, y

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r \quad (F/m) \quad (1.57)$$

como su permitividad dieléctrica.

El vacío tiene susceptibilidad eléctrica nula y constante dieléctrica unidad. En el aire la susceptibilidad es despreciable y su constante dieléctrica se toma también la unidad en la mayoría de las situaciones. Los medios líquidos y sólidos tienen susceptibilidades apreciables y su constante dieléctrica es siempre mayor que uno.

El vector desplazamiento puede escribirse entonces en la forma:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon \vec{E}(\vec{r}) \quad (1.58)$$

Y la forma general de la ley de Gauss se escribe:

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho \quad (1.59)$$

donde se sobreentiende que  $\rho$  es únicamente la densidad de carga libre. O en forma integral:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q|_S \quad (1.60)$$

donde  $Q$  es la carga total libre encerrada por la superficie.

**Ejemplo 1.20:** Una esfera conductora de radio  $a$  posee una carga neta  $Q$ , y está rodeada de una cubierta esférica de material dieléctrico, con  $\epsilon_r = 9$  y grosor  $d$ . Calcular el campo eléctrico en todo el espacio.

Sabemos que, por la simetría del problema, la carga libre se ha de distribuir uniformemente por la superficie conductora esférica.

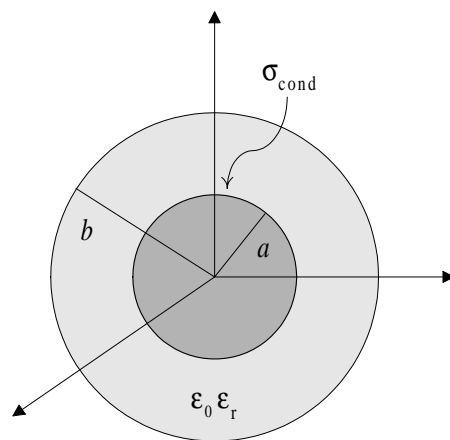


Fig. 1.28

$$\sigma_{cond}|_{r=a} = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

El campo producido por la carga libre polariza la cubierta dieléctrica, y aparecerán cargas ligadas.

Si trabajásemos con el campo tendríamos que tenerlas en cuenta. La forma de ignorarlas es utilizar el vector desplazamiento al aplicar la ley de Gauss.

Es claro que  $\vec{D}(\vec{r}) = D_r(r) \hat{r}$  en todo el espacio.

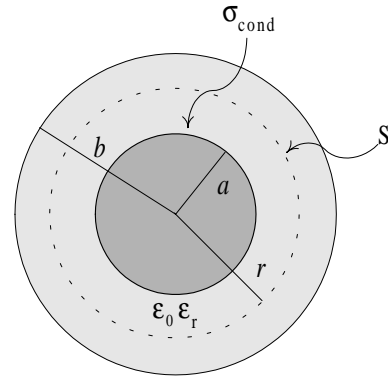
$$a < r < b$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = D_r(r) 4\pi r^2 =$$

$$= Q_f|_S = Q$$

$$D_r(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{D}(\vec{r})}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{1}{9\epsilon_0} \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$$



$$b < r$$

Queda exactamente igual en cuanto a  $\vec{D}(\vec{r})$ . El campo eléctrico en el exterior resulta:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

**Ejemplo 1.24** (Continuación): Obtenga el vector polarización y las densidades de carga ligadas del dieléctrico en el ejemplo anterior.

Tan sólo debemos aplicar las fórmulas correspondientes:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \vec{E} = \frac{8}{9} \frac{Q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

$$\rho_b(\vec{r}) = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{8}{9} \frac{Q}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{1}{r^2} \right) = 0$$

$$\sigma_b(r=a) = \vec{P} \cdot (-\hat{r})|_{r=a} = -\frac{8}{9} \frac{Q}{4\pi a^2}$$

$$\sigma_b(r=b) = \vec{P} \cdot \hat{r}|_{r=b} = \frac{8}{9} \frac{Q}{4\pi b^2}$$

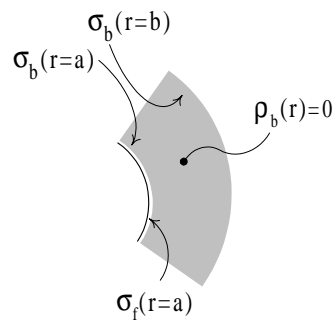


Fig. 1.29

Observe que el campo creado por las cargas ligadas se opone al campo polarizador. Esta situación es habitual, por lo que en ocasiones se habla de campo *despolarizador*.

Volveremos más adelante sobre problemas prácticos en los que intervienen medios dieléctricos. Veamos ahora algunas cuestiones adicionales.

### *Conservación de la carga en medios dieléctricos*

Si un medio dieléctrico no posee carga neta es claro que no la adquirirá por el sólo hecho de polarizarse. En consecuencia, la carga ligada total debe ser cero. Esta afirmación se prueba inmediatamente:

$$Q_b = \int_V \rho_b(\vec{r}) dv + \oint_S \sigma_b ds = - \int_V \nabla \cdot \vec{P} dv + \oint_S \vec{P} \cdot \hat{n} ds \equiv 0$$

pues ambas integrales son la misma, por el teorema de la divergencia.

### *Relación entre la carga libre y la carga ligada*

Las densidades superficiales de carga ligada aparecen siempre que se polariza un dieléctrico, como consecuencia de la terminación abrupta del medio. *La densidad volúmica de carga ligada es, sin embargo, un efecto excepcional*, que no se da en los casos más usuales. ‘Grosso modo’ puede adelantarse que la densidad volúmica aparece siempre y cuando se rompa la homogeneidad del medio, sea por su propia estructura, o por la inclusión de cargas libres.

Pueden probarse las siguientes relaciones:

- En medios homogéneos:

$$\rho_b(\vec{r}) = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \rho_f(\vec{r}) \quad (1.61)$$

- En medios inhomogéneos:

$$\rho_b(\vec{r}) = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \rho_f(\vec{r}) - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_r} \nabla \epsilon_r(\vec{r}) \cdot \vec{E}(\vec{r}) \quad (1.62)$$

En el primer caso sólo podremos encontrar carga ligada volúmica en aquellos puntos del medio donde se haya introducido carga libre. En medios no homogéneos se induce carga ligada volúmica por la propia variación de la permitividad.

### 1.2.4 Ecuación de Poisson generalizada

La relación diferencial entre el potencial eléctrico y las cargas cuando se trabaja con medios dieléctricos será, en cualquier situación:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho_f + \rho_b}{\epsilon_0} \quad (1.63)$$

Pero esta relación es poco útil, porque la densidad volúmica de carga ligada no será conocida.

En el caso de que nuestro medio sea homogéneo (utilizamos la ecuación (1.61)) obtendremos:

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho_f}{\epsilon_r \epsilon_0} = -\frac{\rho_f}{\epsilon} \quad (1.64)$$

Y por último, en medios inhomogéneos, la ecuación de Poisson tiene una forma más complicada:

$$\nabla^2 \phi + \frac{1}{\epsilon_r} \nabla \epsilon_r \cdot \nabla \phi = -\frac{\rho_f}{\epsilon} \quad (1.65)$$

**Ejemplo 1.25:** Una carga puntual de valor  $q$ , situada en el origen de coordenadas, está rodeada de un dieléctrico inhomogéneo, cuya permitividad es:

$$\epsilon_r(r) = 2 - \frac{r}{a}$$

que ocupa un volumen esférico de radio  $a$ . Obtenga el potencial eléctrico dentro y fuera del dieléctrico.

La carga puntual polariza al dieléctrico. Como éste es inhomogéneo debe esperarse, en general, que se induzca una cierta densidad volúmica de carga ligada. La resolución mediante la ecuación de Poisson resultaría complicada (Ec. 1.65).

Aprovechamos la simetría esférica del problema para utilizar la ley de Gauss:

$$\vec{D}(\vec{r}) = D_r(r) \hat{r}$$

Esto es aplicable tanto en el dieléctrico como fuera de él. Tomamos superficies gaussianas esféricas, y la carga libre contenida en ellas no varía con el radio, por lo que resulta:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r}$$

en todo el espacio.

El campo eléctrico será:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{(2 - r/a)\epsilon_0} \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r} \quad 0 < r < a$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q}{4\pi r^2} \hat{r} \quad r > a$$

A partir del campo puede obtenerse el potencial, mediante la relación:

$$\phi(r) = -\int \vec{E} \cdot d\vec{r} :$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{q}{4\pi r} \quad r > a$$

$$\phi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4a} \left( 6 + \ln(r/2a-r) - \frac{2a}{r} \right) \quad r < a$$

Como ejercicio adicional puede comprobarse que la ecuación de Poisson en el medio dieléctrico resulta:

$$\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{4a-3r}{r(2a-r)} \frac{d\phi}{dr} = 0 \quad r < a$$

y que la solución obtenida la satisface.

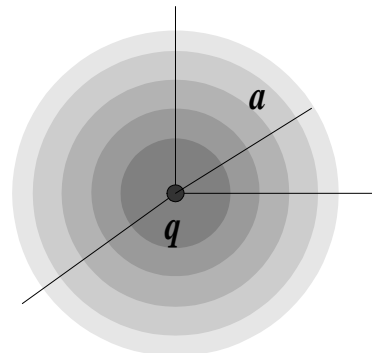


Fig. 1.30

### 1.2.5 Energía electrostática en presencia de medios dieléctricos

En el apartado 1.1.11 se trató sobre el tema de la energía almacenada por las distribuciones de carga en el vacío. El proceso seguido para llegar a las expresiones matemáticas que nos dan cuenta del valor de esa magnitud fue el de ir formando la distribución de carga desde una situación inicial de máxima dispersión e ir contabilizando los aportes de energía que se precisan, hasta alcanzar la situación final.

Cuando intervienen medios dieléctricos la situación se complica por la aparición de las densidades de carga ligada. En una primera aproximación podríamos tratar de repetir la metodología anterior, partiendo de un sistema de cargas puntuales para extender el resultado a un continuo de carga.

Si consideramos un medio dieléctrico homogéneo, que ocupa todo el espacio, y vamos situando, una a una, cargas puntuales que traemos desde el infinito, se observará que junto a cada carga puntual se forma una distribución proporcional de carga ligada, según la relación que se dedujo para dieléctricos homogéneos (Ec. 1.61):

$$\rho_b(\vec{r}) = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \rho_f(\vec{r})$$

En el caso de cargas puntuales esta relación se convierte en:  $q_b = -\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} q_f$ , que indica que junto a cada carga puntual libre aparece una carga puntual ligada.

El efecto de estas cargas puntuales adicionales es el de reducir el valor efectivo de la carga original, disminuyendo el valor del potencial y del campo creado por ésta en sus inmediaciones. Al traer nuevas cargas puntuales el potencial que se opone a ellas será el potencial conjunto creado por las que llegaron previamente y sus cargas ligadas respectivas. Este razonamiento puede extenderse a un continuo, y la energía final del conjunto resulta:

$$U = \frac{1}{2} \int_v \rho_f(\vec{r}) \phi(\vec{r}) dv$$

donde la influencia del dieléctrico se reflejará en el valor del potencial.

En un caso más realista, en el que el dieléctrico esté limitado espacialmente y pueda ser inhomogéneo, la situación es, sin embargo, básicamente la misma: al realizar los aportes de carga libre aparecerán carga ligada superficial y carga ligada volúmica, en puntos diferentes a aquellos en que se sitúa la carga libre, pero el resultado debe ser el mismo, con la única excepción de tener que incluir carga superficial libre en caso de que exista:

$$U = \frac{1}{2} \int_v \rho_f(\vec{r}) \phi(\vec{r}) dv + \frac{1}{2} \int_s \sigma_f(\vec{r}) \phi(\vec{r}) ds \quad (1.66)$$



A partir de ésta última expresión, y procediendo análogamente a como se hizo en el apartado 1.1.12, obtenemos:

$$U = \frac{1}{2} \int_{v_\infty} \vec{D} \cdot \vec{E} dv \quad (1.67)$$

que es la expresión comúnmente utilizada.

### 1.2.6 Sistemas de conductores. Condensadores

Sea un sistema formado por varios conductores, no conectados entre sí, situados en el vacío, y de geometrías arbitrarias. Sea  $Q_j$  la carga neta de cada conductor. Podemos imaginar que habrá conductores sin carga y otros cargados, y, dentro de éstos, unos tendrán carga positiva y otros carga negativa. La solución del potencial en el espacio entre los conductores es una cierta función  $\phi(\mathbf{r})$ , que satisface la ecuación de Laplace en el espacio, donde suponemos que no hay carga, y las condiciones de contorno en cada conductor. Si alteramos la carga original en un conductor, por ejemplo multiplicando su valor por un cierto factor  $k$ , variará el potencial en todo el espacio y también en todos los demás conductores. Pero ¿de qué manera?

La respuesta se sigue de atender al teorema de unicidad del potencial y al principio de superposición, aplicable también a los potenciales.

Para ello debemos partir de una situación inicial hipotética en que solamente uno de los conductores posee carga neta, por ejemplo el conductor  $i$ , con  $Q_i$  culombios. Suponiendo que efectivamente ocurre así escribamos el potencial como:

$$\phi(\vec{r}) = \phi_i(\vec{r}) + \sum_{j \neq i} \phi_j(\vec{r})$$

donde  $\phi_i(\mathbf{r})$  es el potencial producido en todo el espacio por el conductor cargado y los  $\phi_j(\mathbf{r})$  son los potenciales individuales creados por cada uno de los otros conductores, los cuales, a pesar de no poseer carga neta, también contribuyen al potencial total, porque aparecen densidades superficiales de carga debido al influjo del conductor cargado. Multipliquemos ahora la carga del conductor  $i$  por un factor  $k$ . Ocurre que la función

$$k\phi(\vec{r}) = k\phi_i(\vec{r}) + k \sum_{j \neq i} \phi_j(\vec{r})$$

también satisface la ecuación de Laplace por ser  $k$  una simple constante. Respecto a las condiciones de contorno tendremos que si el potencial se ha multiplicado por  $k$  entonces el

campo también aparecerá multiplicado por ese factor, y la densidad de carga en los conductores será ahora:

$$\sigma|_S = \epsilon_0 k \vec{E} \cdot \hat{n}|_S$$

pero esto es coherente en el caso del conductor cargado, y también en los demás, cuya carga neta seguirá siendo cero.

Como todas las condiciones se satisfacen y la solución al problema del potencial es única debe concluirse que esa es la solución. Este razonamiento podría aplicarse sucesivamente a todos los conductores, tomándolos uno a uno como el único conductor cargado del sistema. La solución final sería la suma de las soluciones parciales pensadas en esta forma.

La conclusión que se sigue es que si multiplicamos por un cierto factor la carga de un conductor entonces la contribución que ese conductor tiene en la construcción del potencial total, y, en particular, su contribución al potencial de los otros conductores, se multiplica por el mismo factor. De allí que el potencial en cada conductor debe poder escribirse como:

$$\phi_j = \sum_i p_{ij} Q_i \quad (1.68)$$

donde  $p_{ij}$  son los coeficientes de potencial. La expresión anterior afirma que para cada conductor debe ser posible encontrar unos coeficientes tales que multiplicados por las cargas netas del sistema nos den su potencial.

La expresión (1.68) podría escribirse al revés, invirtiendo la matriz:

$$Q_i = \sum_j c_{ij} \phi_j \quad (1.69)$$

A los nuevos coeficientes se les denomina coeficientes de capacidad (si  $i = j$ ) o coeficientes de inducción electrostática ( $i \neq j$ ).

Todos los coeficientes mencionados en este apartado dependen exclusivamente de la geometría del sistema de conductores. En el caso de incluir dieléctricos lineales en el sistema los coeficientes variarán, pero la situación será esencialmente la misma.

### Sistemas de dos conductores. Condensadores

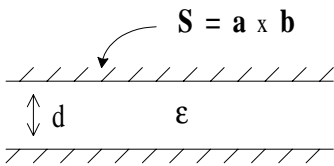
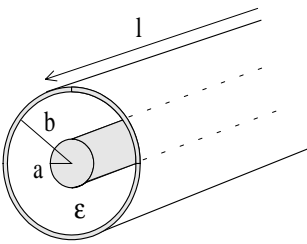
Particular interés práctico tienen los sistemas constituidos por dos conductores, y donde uno de ellos está rodeado por el otro. Forman entonces un condensador. La particularidad es que la diferencia de potencial entre ambos no puede ser modificada por las variaciones de carga en un tercer conductor externo, sino que éstas afectarán simultáneamente a los dos en la misma medida.

Los condensadores se utilizan para almacenar carga de forma transitoria en los circuitos eléctricos. La carga almacenada es proporcional a la diferencia de potencial entre sus armaduras, y la constante de proporcionalidad es la *capacidad* del condensador.

$$Q = C \Delta\phi = CV; \quad C = \frac{Q}{V} \quad (F) \quad (1.70)$$

$Q$  es la carga neta de uno de los conductores. En el otro deberá ser  $-Q$ , como puede probarse fácilmente. En el caso de incluir dieléctricos lineales entre las placas que forman el condensador la expresión anterior seguirá teniendo el mismo significado. Las posibles cargas ligadas en el dieléctrico no constituyen propiamente carga almacenada por el condensador, ya que no es carga extraída del circuito al que está conectado. La carga ligada influiría no obstante en atenuar el campo interno del condensador, y entonces con menor diferencia de potencial aplicada el dispositivo puede almacenar la misma carga. Por tanto la inclusión de dieléctricos en los condensadores aumenta su capacidad, de forma proporcional a su constante dieléctrica.

Las geometrías más típicas de los condensadores y su capacidad se muestran a continuación.

<p>Condensador plano</p> <p>( <math>a, b \gg d</math> )</p>		$C = \frac{ab\epsilon}{d}$
<p>Condensador cilíndrico</p> <p>( <math>l \gg b-a</math> )</p>		$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{b}{a}} l$

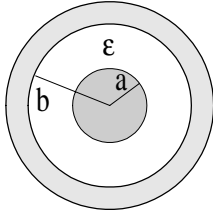
Condensador esférico		$C = \frac{4\pi\epsilon}{\frac{1}{a} - \frac{1}{b}}$
----------------------	---	--

Fig. 1.31

La energía almacenada por un condensador puede obtenerse mediante la expresión (1.67) una vez calculados los campos presentes, pero es bien sabido por teoría de circuitos que existe una expresión más simple si se conoce la capacidad, y es:

$$U = \frac{1}{2} CV^2$$

### Cuestiones de repaso:

- 1) El campo electrostático tiene siempre su origen en cargas positivas y el final en cargas negativas (o en el infinito). Explique cuál es la razón física de ese hecho.
- 2) ¿Qué condiciones se precisan para que en una determinada situación podamos utilizar la ley de Gauss para el cálculo directo del campo eléctrico?
- 3) ¿Cómo disminuye el campo eléctrico creado por las siguientes distribuciones de carga a medida que nos alejamos de ellas: a) un plano infinito de carga; b) un hilo infinito; c) una esfera cargada; d) un dipolo; e) un cuadripolo? Considere densidades homogéneas en las tres primeras.
- 4) El hecho de que el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada sea nulo no implica que el campo deba ser nulo en todos los puntos de la superficie, ni en el volumen encerrado por ella. Dé ejemplos reales que lo confirmen.
- 5) Si nos desplazamos sobre una superficie y medimos un potencial eléctrico constantemente nulo sobre ella, ¿qué podremos afirmar acerca del campo eléctrico en los puntos de esa superficie?

- 6) ¿La densidad de carga superficial libre sobre un conductor debe tener el mismo signo en cualquier punto? Demuéstrelo en caso afirmativo o proponga un contraejemplo en caso negativo.
- 7) En un conductor no podemos fijar a la vez la carga neta y el potencial, porque cualquiera de esas dos magnitudes condiciona el valor de la otra. Busque ejemplos sencillos que sostengan esa afirmación.
- 8) Los conductores (con carga neta nula) ¿atraen a las cargas eléctricas?
- 9) ¿En que situaciones es adecuado el método de las imágenes para el cálculo del potencial? ¿Qué se precisa para poder aplicar ese método?
- 10) El vector desplazamiento eléctrico ¿depende de las densidades de carga ligadas? O dicho de otro modo, ¿depende de los medios dieléctricos presentes en las inmediaciones?
- 11) Habitualmente no se incluyen explícitamente las densidades superficiales de carga en las *ecuaciones diferenciales* del campo o del potencial (Gauss y Laplace). ¿De qué modo se tienen entonces en cuenta al resolver los problemas por esos métodos?
- 12) ¿Podría en algún caso ser negativa la susceptibilidad eléctrica de un material?
- 13) En determinados medios  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$  no son necesariamente paralelos. ¿En cuáles?
- 14) Los dieléctricos (sin carga neta) ¿atraen a las cargas eléctricas de sus inmediaciones?
- 15) ¿Cómo se obtiene la energía potencial de un dieléctrico polarizado por un campo exterior?
- 16) La presencia de un dieléctrico provoca siempre una disminución de la intensidad de campo eléctrico respecto a la misma situación sin dieléctrico (se supone en los casos en que el dieléctrico no altera la distribución de líneas de campo previa). ¿Por qué?
- 17) Un condensador con una geometría y unas dimensiones dadas aumenta su capacidad proporcionalmente a la constante dieléctrica cuando introducimos un dieléctrico homogéneo entre sus armaduras. ¿Por qué?
- 18) Un condensador con un dieléctrico no lineal entre sus armaduras no respondería al concepto tradicional de condensador (aunque podría tener gran utilidad práctica) ¿Por qué?

### 1.3 El campo magnetostático en el vacío

#### 1.3.1 Introducción

Un fenómeno físico se llama estacionario cuando está en equilibrio -puede permanecer indefinidamente en esa situación si no intervienen otros factores externos- pero de tal manera que algunas variables macroscópicas varían en el tiempo. Tal es el caso habitual en el que se habla de campo magnético en condiciones estáticas, o de campo magnetostático. A diferencia de lo que ocurre en Electrostática ahora debemos considerar *las cargas eléctricas en movimiento*, ya que *es en esa situación cuando producen un campo magnético o detectan su presencia*. La primera experiencia científica equivalente a la atracción o repulsión entre cargas eléctricas (ley de Coulomb) dentro del magnetismo fue realizada por Oersted, quien comprobó la existencia de fuerzas entre hilos conductores largos cuando ambos eran recorridos por corrientes eléctricas, en 1820. Sin embargo el físico danés no comprendió ni supo formalizar en una expresión matemática el fenómeno que allí sucedía.

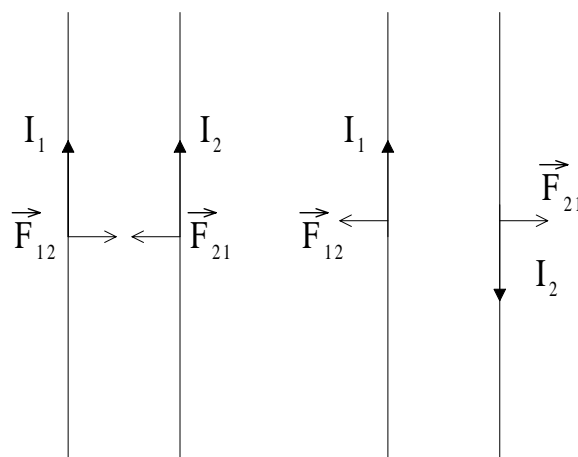


Fig. 1.32 *Atracción y repulsión entre corrientes constantes debido a interacciones de tipo magnético*

Oersted observó también que cuando una corriente suficientemente intensa atravesaba una superficie en la que se habían espolvoreado limaduras de hierro, éstas se orientaban formando círculos concéntricos alrededor del hilo. Ahora sabemos que las limaduras estaban dibujando el campo magnético producido por la corriente eléctrica, pero en aquel momento no se encontró explicación satisfactoria.

Las fuerzas de atracción y repulsión magnéticas se conocían desde la antigüedad, debido a la existencia de minerales con propiedades magnéticas, que se comportan como imanes intrínsecos. De igual manera, el campo magnético terrestre propició la invención de

la brújula en el siglo XVI. Sin embargo, el mismo nombre castellano de “brújula” sugiere el desconocimiento real que se tenía y el halo de misterio que tales fenómenos despertaban en nuestros antepasados. A principios del siglo XIX los científicos no estaban mucho mejor en cuanto a la comprensión global de los mismos.

Ampère dedujo la fórmula matemática de *la fuerza entre circuitos de corriente*, el equivalente magnético de la ley de Coulomb:

$$\vec{F}_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1))}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad (1.71)$$

donde  $\mu_0$  es la permeabilidad magnética del vacío, de valor  $4\pi \times 10^{-7} \text{ (H/m)}$ . Cada diferencial de circuito por donde circula una de las corrientes interacciona con un diferencial cualquiera del otro circuito. Eso sería suficiente para caracterizar una fuerza entre diferenciales de longitud; sin embargo, la continuidad de las corrientes precisa de la consideración de los dos circuitos completos.

### 1.3.2 Densidad e intensidad de corriente. Ley de Ohm

En teoría de campos electromagnéticos trabajamos básicamente con magnitudes definidas en amplias zonas del espacio, como son los campos escalares o vectoriales, y tratamos de establecer las relaciones que existen entre ellos. La corriente eléctrica no es una excepción. Usualmente precisaremos conocer no sólo la cantidad de carga eléctrica que atraviesa una determinada sección de conductor por unidad de tiempo, sino también la manera en que se distribuyen espacialmente esas cargas en movimiento. La densidad de corriente proporciona esa información. Su relación con la carga eléctrica es:

$$\vec{J}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) \vec{v} \quad \left(\frac{A}{m^2}\right) \quad (1.72)$$

cuando es una densidad volúmica de carga la que se desplaza a cierta velocidad  $v$ , dando lugar a la corriente eléctrica. Se habla entonces de *densidad volúmica de corriente*.

Más habitual es el caso en que la corriente esté producida por una densidad superficial de carga:

$$\vec{J}_s(\vec{r}) = \sigma(\vec{r}) \vec{v} \quad \left(\frac{A}{m}\right) \quad (1.73)$$

y se denomina entonces *densidad superficial de corriente*.

Otro modo alternativo de escribirla es en función de la concentración de portadores libres por unidad de volumen,  $N$ . Asumimos que la velocidad de las cargas puede variar de un punto a otro del volumen considerado, y resulta:

$$\vec{J}(\vec{r}) = N q \vec{v}(\vec{r}) \quad \left(\frac{A}{m^2}\right) \quad (1.74)$$

donde  $q$  es la carga de cada portador.

Se denomina *intensidad de corriente* al flujo de carga eléctrica que atraviesa por unidad de tiempo una sección determinada del medio. Se escribe:

$$I|_S = \int_S \vec{J}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} \quad (A) \quad (1.75a)$$

o, para el caso de densidades superficiales (laminares) de corriente:

$$I|_L = \int_L \vec{J}_s(\vec{r}) \cdot \hat{n} dl \quad (A) \quad (1.75b)$$

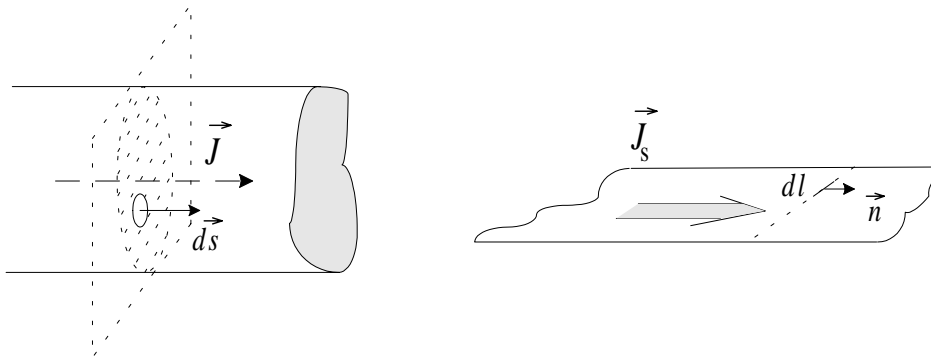


Fig. 1.33 Densidades de corriente volúmica y superficial

Con los subíndices S y L se quiere indicar que la intensidad de corriente ha de estar siempre referida a una sección particular. En problemas circuitales se sobreentiende que nos referimos a la sección del circuito. En otros casos más generales debe explicitarse, si es que no existe una sección claramente definida. La intensidad de corriente se escribe también de la forma:

$$I = \left. \frac{dq}{dt} \right|_S \quad (1.76)$$



donde se expresa la relación entre el diferencial de carga  $dq$  y el intervalo temporal  $dt$  que tarda en atravesar la sección considerada.

### Origen físico de la corriente

Las cargas eléctricas se desplazan debido a dos causas principales:

- i) el cuerpo en el que están situadas las cargas se mueve;
- ii) las cargas libres de un medio conductor son arrastradas por un campo eléctrico.

En el primer caso se habla de corrientes de *convección*, y en el segundo de corrientes de *conducción*. Estamos interesados principalmente en el segundo tipo.

Las corrientes de conducción obedecen a la *ley de Ohm*:

$$\vec{J} = g\vec{E} \quad (1.77)$$

donde  $g$  es la conductividad del medio, y cuyas unidades son  $(1/\Omega \cdot m)$ . Habitualmente se expresa la conductividad con la letra griega  $\sigma$ , pero no utilizaremos de momento ese símbolo para que no haya confusión con la densidad superficial de carga.

La conductividad es una característica propia de cada material, y puede variar de forma apreciable con la temperatura del medio. Depende a su vez de otros dos parámetros, como son la movilidad de los portadores,  $\mu$ , y su densidad volúmica:

$$g = \mu \rho \quad (1.78)$$

Utilizando esta expresión en (1.77) y comparándola con la (1.72) tenemos:

$$\vec{v} = \mu \vec{E} \quad (1.79)$$

que se denomina *velocidad de arrastre* de los portadores. En realidad, no se corresponde con la velocidad física de los portadores, ya que éstos están sometidos a un movimiento térmico aleatorio, sino que se trata de la *velocidad media en la dirección predominante*, que da lugar a una corriente macroscópica apreciable. Habitualmente la velocidad de arrastre no supera el orden de los cm por segundo.

Ocurre que, aun estando sometidos a un campo eléctrico constante, los portadores de un medio conductor no pueden acelerarse indefinidamente, debido a los choques que sufren entre sí y con los átomos del medio. Esa resistencia a su avance puede modelarse como un rozamiento viscoso, y es lo que lleva a una velocidad límite, que es la velocidad de arrastre.

La conductividad varía con la temperatura. En el caso de *medios conductores* el efecto de un aumento de la temperatura es el de incrementar la agitación térmica del medio, lo que hace aumentar el número de choques de los portadores por unidad de tiempo. Consecuentemente su movilidad y la conductividad disminuyen. En *medios semiconductores* ocurre lo mismo pero ahora es más importante el incremento de pares electrón-hueco, por lo que el efecto neto de un incremento de temperatura es el aumento de la conductividad.

### 1.3.3 Ecuación de continuidad. Corrientes estacionarias

Cualquier tipo de corriente eléctrica produce un campo magnético en sus inmediaciones. Por el momento nos interesa considerar tan *solo aquellas corrientes que no producen acumulación ni vaciamiento de carga en las secciones del conductor por las que fluyen*. A tales corrientes se les denomina *estacionarias*.

Considérese un tubo de corriente como el representado en la figura 1.34, por el que circula una cierta densidad volúmica. Evaluaremos el efecto que tiene sobre las cargas del medio el paso de dicha corriente.

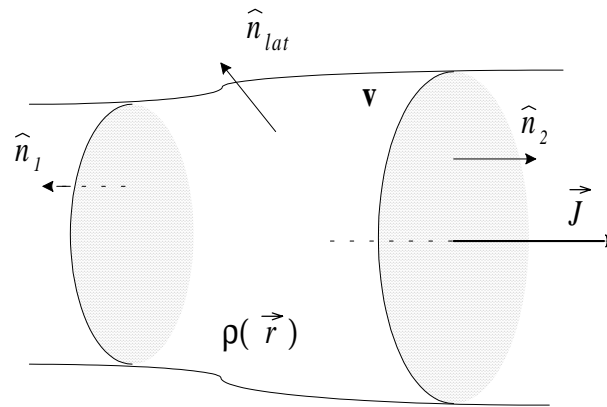


Fig. 1.34

El flujo de corriente a través de la superficie que rodea a la porción de conductor elegida es:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int \vec{J} \cdot \hat{n}_1 ds_1 + \int \vec{J} \cdot \hat{n}_2 ds_2 + \int \vec{J} \cdot \hat{n}_{lat} ds_{lat}$$

Si asumimos que la densidad de corriente es tangente a la superficie lateral en todo punto del volumen considerado y perpendicular a las secciones circulares tendremos:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int J ds_2 - \int J ds_1 = -\frac{d}{dt} Q_V \quad (1.80)$$

puesto que si existe alguna diferencia entre la corriente que atraviesa la segunda superficie y la que atraviesa la primera debe haber una variación neta de la carga en el volumen,  $Q_V$ .

Una corriente que arrastra constantemente la misma carga a través de las diferentes secciones por las que fluye se denomina *estacionaria*, y no hay variaciones de la carga a su paso. Tales corrientes se caracterizan por la expresión:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = 0 \quad \forall S \quad (1.81)$$

La expresión más general siguiendo el razonamiento anterior, para cualquier tipo de corriente, sea o no estacionaria, es:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} Q_V = -\frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r}) dv$$

y de ahí resulta:

$$\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = -\int_V \frac{\partial \rho(\vec{r})}{\partial t} dv \quad (1.82a)$$

que se denomina *ecuación de continuidad*. Por aplicación del teorema de la divergencia se obtiene la forma diferencial de esta igualdad:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (1.82b)$$

y, de ahí, que una corriente estacionaria se caracteriza por cumplir:  $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ .

### 1.3.4 Ley de Biot y Savart

Una carga puntual que se mueve con velocidad  $v$  en el seno de un campo magnético exterior sufre una fuerza magnética cuya expresión, debida a Lorentz, es:

$$\vec{F}_M = q \vec{v} \times \vec{B}_{ext} \quad (1.83)$$

La fuerza entre circuitos de corriente de Ampère (Ec. 1.71) puede expresarse también de un modo equivalente tomando diferenciales de uno de los circuitos de corriente, que pasamos a considerar *como inmerso en el campo magnético creado por el otro*.

$$d\vec{F}_{21} = dq_2 \vec{v}_2 \times \vec{B}_1 = \rho(\vec{r}) S dl_2 \vec{v}_2 \times \vec{B}_1 = I_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_1$$

donde  $S$  es la sección del circuito; y para que ambos enfoques coincidan el campo magnético creado por el primer circuito, como se comprueba fácilmente, debe escribirse en la forma:

$$\vec{B}_1(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \frac{I_1 d\vec{l}_1 \times (\vec{r} - \vec{r}_1)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \quad (1.84)$$

que se conoce con el nombre de *Ley de Biot y Savart*, y que nos permite obtener el campo magnético mediante integración directa si conocemos las corrientes que lo producen.

La forma más general de esta ley, en el caso de que no pueda hacerse la aproximación de corrientes filiformes, sino que ocupen una cierta sección, será:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \quad (1.85)$$

y la expresión de la fuerza ejercida sobre otra posible corriente situada en su seno:

$$\vec{F} = \int_V \vec{J}(\vec{r}) \times \vec{B}(\vec{r}) dv \quad (1.86)$$

lo que no es sino una extensión de la fuerza de Lorentz a todas las cargas en movimiento del circuito.

De nuevo, entonces, estamos sustituyendo el concepto de fuerza a distancia entre hilos o circuitos de corriente por el concepto de campo y de interacciones de los campos con otros circuitos.

**Ejemplo 1.26:** Calcule el campo magnético creado por un hilo de corriente muy largo por el que circula una intensidad de corriente  $I$ .

Tomaremos el origen de coordenadas sobre el propio hilo, a la altura del punto donde tratamos de calcular el campo. La expresión general del diferencial es:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

donde, siguiendo la notación habitual:  $\vec{r}$  es el punto donde calculamos el campo;  $\vec{r}'$  es el radiovector que apunta al diferencial de circuito considerado.

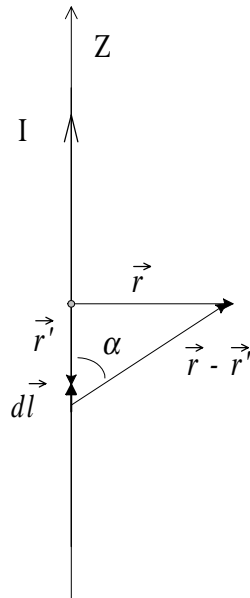


Fig. 1.35

Las expresiones de los diferentes términos que aparecen son:

$$\vec{r} = \rho \hat{\rho}$$

$$\vec{r}' = z' \hat{z}$$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = (\rho^2 + z'^2)^{1/2}$$

$$d\vec{l} = dz' \hat{z}$$

Cada diferencial de campo magnético queda de la forma:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{dz' |\vec{r} - \vec{r}'| \sin \alpha}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \hat{\phi}$$

donde  $\sin \alpha = \frac{\rho}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$

El campo total resulta: 
$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz'}{(\rho^2 + z'^2)^{3/2}} \hat{\phi},$$

y tras resolver la integral:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{1}{\rho} \hat{\phi} \quad (1.87)$$

**Ejemplo 1.27:** Utilice el resultado anterior para calcular el campo magnético creado por un plano de corriente supuestamente infinito con una densidad de corriente superficial  $\vec{J} = J_0 \hat{z}$  (Fig. 1.36).

El problema podría resolverse directamente con una integración completa del plano de corriente (Fig. 1.36) siguiendo la ley de Biot y Savart para el caso de una corriente superficial:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S'} \frac{\vec{J}_s(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} ds'$$

Sin embargo en el ejemplo anterior ya se realizó la integral según el eje Z para un hilo de corriente. Vamos a tomar el plano como formado por un continuo de hilos de corriente diferenciales, e integraremos la contribución al campo magnético total de cada uno de ellos.

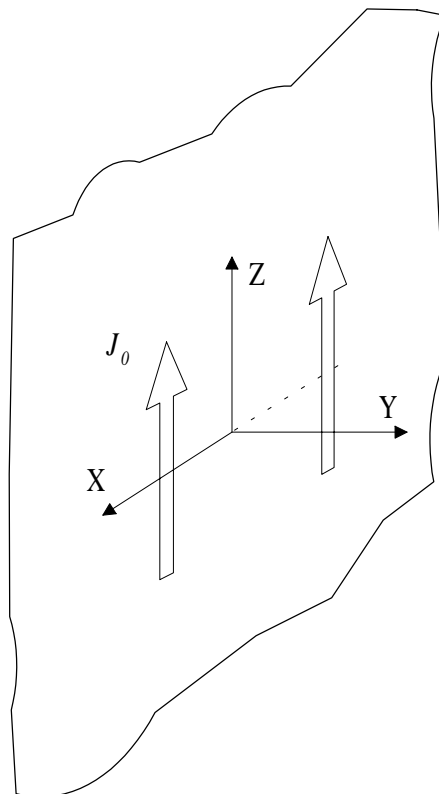


Fig. 1.36 Plano de corriente

Además existe una simetría apreciable al considerar la contribución conjunta de un par de hilos de corriente situados a ambos lados del punto donde realizamos el cálculo.

Tomemos un punto del eje Y tal que:

$$\vec{r} = y \hat{y}$$

En la figura siguiente (1.37) se aprecia que la contribución neta del plano deberá tener una única componente, de modo que podemos escribir:

$$dB_x = |d\vec{B}| \cos \alpha$$

donde

$$\cos \alpha = \frac{y}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

El resultado del ejemplo anterior nos permite escribir para un hilo diferencial:

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0}{2\pi} dI \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

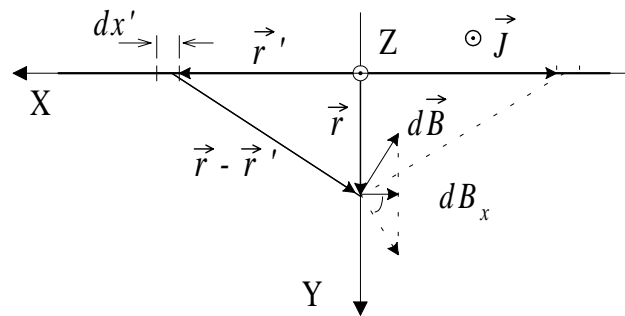


Fig. 1.37 Cancelación de las componentes del campo no paralelas al plano

El diferencial de intensidad será:  $dI = J_0 dx'$  (razónelo), y la expresión del diferencial de campo:

$$dB_x = -\frac{\mu_0}{2\pi} J_0 \frac{y dx'}{(x'^2 + y^2)}$$

y finalmente:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mp \frac{\mu_0}{2\pi} J_0 \hat{x} \quad (y > 0, y < 0) \quad (1.88)$$

Al igual que ocurría en el caso del plano infinito de carga tenemos un campo constante en todo el espacio, independiente de la distancia del plano al punto donde se mida.

### 1.3.5 Carácter solenoidal del campo magnético

Las líneas de campo magnético siguen siempre trayectorias cerradas o, como en el ejemplo anterior, que se cierran en el infinito. Un campo vectorial con esa propiedad se denomina *campo solenoidal*.

Si se compara ese comportamiento con el del campo electrostático se llega a la conclusión de que el campo magnético carece de un tipo de fuente generadora comparable a las cargas eléctricas, en las que comienza o termina siempre el campo electrostático. Esto equivale a afirmar que *no existen monopolos magnéticos*, o, lo que es lo mismo, *cargas magnéticas individualizables*. Debido al origen netamente experimental de toda la teoría clásica del electromagnetismo debe concluirse que tal afirmación no es un resultado teórico, sino una constatación experimental. Pudiera ocurrir que en situaciones particulares llegasen a encontrarse cargas magnéticas aisladas, y entonces la teoría desarrollada aquí debería ser modificada para tratar con esos casos.

Matemáticamente *el carácter solenoidal de un campo vectorial se pone de manifiesto en que su divergencia es nula en todo punto*. Podemos comprobarlo a partir de la ley de Biot y Savart.

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \cdot \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' = \int_{V'} \nabla \cdot \left( \vec{J}(\vec{r}') \times \frac{(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \right) dv'$$

aplicaremos la igualdad vectorial genérica:  $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \cdot \nabla \times \vec{B}$ , y dos de los términos que aparecen son:

$$\nabla \times \vec{J}(\vec{r}') = 0 \quad , \text{ porque el operador actúa sobre } \vec{r} \text{ y no sobre } \vec{r}' ;$$

$$\nabla \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = 0 \quad , \text{ como para el campo electrostático,}$$

por lo que resulta:

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad (1.89)$$

Esta expresión es equivalente por el teorema de la divergencia a:

$$\oint_S \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{s} = 0 \quad \forall S \text{ cerrada} \quad (1.90)$$

La última igualdad afirma que *el flujo de cualquier campo magnético a través de cualquier superficie cerrada es siempre nulo*. Una afirmación así ha de ser considerada como un resultado fundamental del magnetismo y, de hecho, de toda la teoría electromagnética, porque ocurre que esta característica se mantiene incluso en condiciones dinámicas, como se verá en el próximo capítulo.

### 1.3.6 Ley de Ampère

A diferencia de lo que ocurría con el campo electrostático, que es irrotacional (conservativo), la circulación del campo magnético a lo largo de una trayectoria cerrada no es nula en general.

De acuerdo con la expresión de la fuerza magnética de Lorentz debe concluirse que la fuerza que experimenta una carga móvil debido a la presencia de un campo magnético es siempre perpendicular a su trayectoria (a su velocidad instantánea) y, por tanto, que *el campo no realiza trabajo en ningún momento sobre la carga*:



$$\int_C \vec{F}_M \cdot d\vec{l} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_M \cdot \vec{v} dt = q \int_{t_1}^{t_2} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt \equiv 0$$

Sin embargo la circulación de  $\vec{B}$  a lo largo de una trayectoria no se relaciona directamente con el cálculo del trabajo. La *ley de Ampère* establece que la circulación de  $\vec{B}$  a lo largo de un camino cerrado es proporcional a la intensidad de corriente que atraviesa la superficie limitada por el camino:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (1.91)$$

Por aplicación del teorema de Stokes obtenemos la forma diferencial de esta ley:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (1.92)$$

que se ha de cumplir punto a punto en el espacio donde tales magnitudes estén definidas. La ley de Ampère puede obtenerse por cálculo directo a partir de la expresión integral de Biot y Savart. En esa deducción se comprueba *que la ley dada por (1.91) y (1.92) se aplica únicamente al caso de corrientes estacionarias*.

Es interesante observar que en aquellos puntos del espacio donde no hay corrientes sí que tendremos un campo magnético irrotacional. Para determinadas situaciones se aprovecha ese hecho para definir un potencial escalar magnético, del mismo modo que en electrostática. No obstante, la utilidad de tal potencial es limitada y no se empleará aquí.

### 1.3.7 Cálculo de $\vec{B}$ mediante la ley de Ampère en forma integral

Del mismo modo que se empleó la ley de Gauss en electrostática la ley de Ampère puede servir como un camino rápido para encontrar el campo magnético en situaciones con suficiente simetría espacial. Nuevamente es preciso que sepamos intuir a priori cuál será la dirección del campo magnético y de qué variables pueda depender, para aplicar este método con garantías.

Si existe una determinada trayectoria cerrada en el espacio, en la que  $\vec{B}$  es constante en módulo y paralelo a cada  $d\vec{l}$ , entonces podemos escribir:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \oint_C dl = BL = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (1.93)$$

y el valor del campo magnético se obtiene inmediatamente.

**Ejemplo 1.28:** Calcule el campo magnético creado por un conductor largo, de sección cilíndrica y radio  $a$ , por el que circula una densidad de corriente homogénea.

Por inspección de la expresión de Biot y Savart y de la geometría del problema se puede deducir que el campo magnético será de la forma:

$$\vec{B}(\vec{r}) = B_\phi(\rho) \hat{\phi}$$

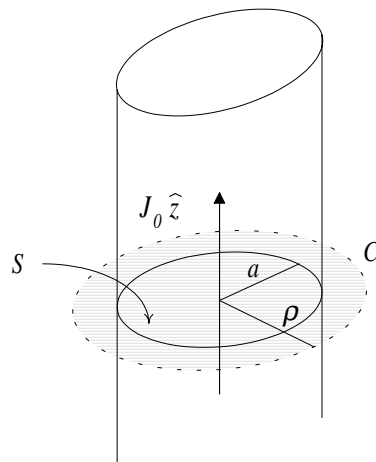


Fig. 1.38

Tomaremos como circuito para aplicar la ley de Ampère una circunferencia centrada alrededor del cable.

En la figura 1.38 se muestra el circuito para puntos del exterior del conductor.

$$d\vec{l} = \rho d\phi \hat{\phi}$$

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi \rho B_\phi(\rho)$$

$$\mu_0 \int_C \vec{J} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \pi a^2 J_0$$

$$\text{De donde el resultado es: } B_\phi(\rho) = \frac{\mu_0 J_0 \pi a^2}{2\pi \rho} = \frac{\mu_0 I}{2\pi \rho} \quad (\rho > a).$$

En puntos interiores al cable es válido el mismo planteamiento. Compruebe que el resultado es ahora:

$$B_\phi(\rho) = \frac{\mu_0}{2} J_0 \rho \quad (\rho < a)$$

Puede añadirse un comentario adicional: *el campo magnetostático no se anula en el interior de un conductor*, como acaba de verse en el ejemplo precedente. De hecho no se acierta a encontrar ninguna razón por la que tal cancelación debiera suceder. En los capítulos siguientes se comprueba que esta situación cambia al considerar campos variables en el tiempo.

**Ejemplo 1.29:** Utilice la ley de Ampère para calcular el campo magnético creado por el conductor plano del ejemplo 1.27.

Como primer paso debemos hacernos una idea intuitiva de cómo será el campo magnético, en cuanto a su dirección y en cuanto a su dependencia con las variables espaciales. Para eso nos es útil volver a considerar el plano de corriente como una sucesión de hilos paralelos con idénticas corrientes. Podemos imaginar cómo será la contribución conjunta de todos los hilos al campo magnético global

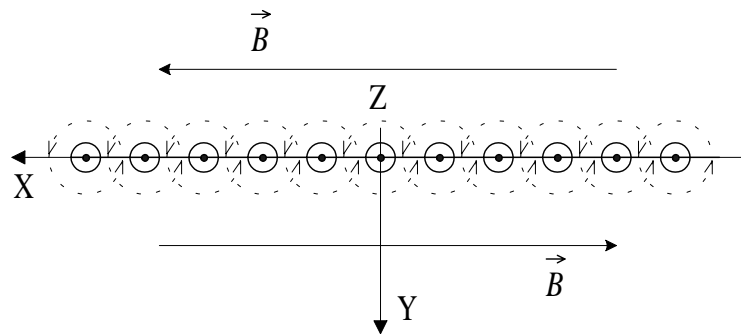


Fig. 1.41

y la única posibilidad razonable es suponer que  $\vec{B}(\vec{r}) = B_x(y) \hat{x}$ .

Elegimos un contorno en forma de rectángulo, situado simétricamente respecto al plano de corriente, con dos lados paralelos al campo magnético y los otros dos perpendiculares.

Compruebe que de esta forma la ley de Ampère da el mismo resultado obtenido en el ejemplo 1.27.

### El potencial vector, $\vec{A}$

Todo campo solenoidal puede ser expresado como el rotacional de otro campo. Podemos entonces introducir un campo vectorial auxiliar estrechamente relacionado con el campo magnético, que se denomina *potencial vector magnético*,  $\vec{A}(\vec{r})$ , de tal manera que:

$$\nabla \times \vec{A}(\vec{r}) = \vec{B}(\vec{r}) \quad (1.94)$$

En algunas áreas del electromagnetismo, en especial en problemas de radiación, el potencial vector sirve para simplificar la resolución matemática de los problemas. Se hablará de todo ello más adelante.

La definición del potencial vector magnético queda incompleta con la ecuación (1.94). Un campo vectorial, según el teorema matemático de Helmholtz, *precisa del conocimiento de su rotacional y de su divergencia, para quedar completamente definido*. En problemas estáticos se completa la definición forzando que el potencial vector tenga divergencia nula:

$$\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) = 0 \quad (1.95)$$

A esta condición se le denomina *norma de Coulomb*.

Las ecuaciones (1.94) y (1.95), junto a la ley de Ampère, llevan a una ecuación diferencial para el potencial vector de la forma:

$$\nabla^2 \vec{A}(\vec{r}) = -\mu_0 \vec{J}(\vec{r}) \quad (1.96)$$

cuya obtención se propone como ejercicio. La solución general, por similitud con la ecuación de Poisson del potencial eléctrico y su expresión integral, es:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \quad (1.97)$$

A primera vista esta expresión es más sencilla que la ley de Biot y Savart. Por tanto una vía alternativa para calcular el campo magnético a partir de las corrientes es obtener primero el potencial vector mediante (1.97), y calcular después el campo haciendo su rotacional (Ec. 1.94).

**Ejemplo 1.30:** Obtenga el potencial vector creado por una espira de corriente de radio  $a$  situada en el plano XY, por la que circula una corriente  $I$ .

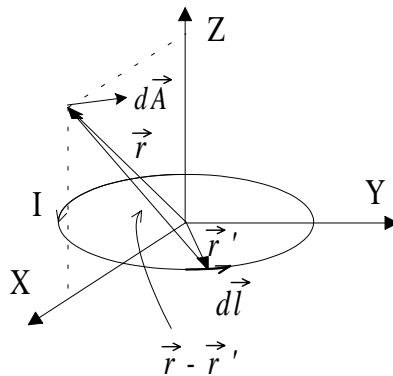


Fig. 1.42

Tomaremos, por sencillez, un punto sobre el plano XZ para hacer el cálculo. Debido a la simetría cilíndrica del problema, sirve para obtener un resultado totalmente general.

$$\vec{r} = x\hat{x} + z\hat{z}$$

$$\vec{r}' = a\hat{\rho}$$

Pasamos a coordenadas cilíndricas y resulta:

$$\vec{r}' = a \cos \varphi' \hat{x} + a \sin \varphi' \hat{y} \quad |\vec{r} - \vec{r}'| = [(x - a \cos \varphi')^2 + (-a \sin \varphi')^2 + z^2]^{1/2}$$

e integramos las contribuciones de toda la espira:

$$\vec{A}(\vec{r})|_{\varphi=0} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{I a d\varphi \hat{\phi}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

Sin embargo, se aprecia que la contribución de los diferenciales de corriente tomados dos a dos cancelan las componentes en  $x$  (Fig. 1.43).

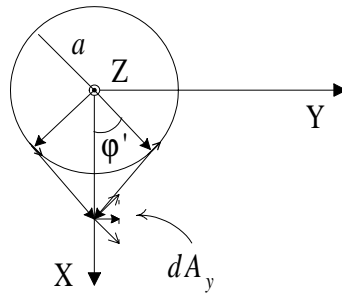


Fig. 1.43

Y, por tanto, sólo es necesario integrar  $dA_y$ :

$$dA_y = |d\vec{A}| \cos \alpha \quad \text{con} \quad \cos \alpha = \cos \varphi'$$

La integral que debe resolverse es, finalmente:

$$A_y = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi' d\varphi'}{(\rho^2 - 2a\rho \cos \varphi' + a^2 + z^2)^{1/2}}$$

que, desafortunadamente, no tiene solución analítica sencilla y deberá resolverse numéricamente. Más adelante deduciremos una solución aproximada a este problema (ejemplo 1.31).

### Cálculo numérico del campo magnético: método de los segmentos

La expresión de Biot y Savart suele derivar en integrales sin solución analítica en muchos casos reales; la ley de Ampère en forma integral sólo es útil para extraer el valor del campo magnético en situaciones de elevada simetría; por fin, el potencial vector, aun con una expresión integral aparentemente simple, tampoco proporciona un método inmediato para el cálculo de  $\vec{B}$ , como pudo comprobarse en el ejemplo anterior, donde ni siquiera una espira circular en el origen resultó un problema fácil.

Es evidente que la teoría desarrollada hasta ahora tiene un alto interés teórico y práctico, y nos permitirá seguir avanzando hacia resultados cada vez más importantes en la comprensión de los fenómenos magnéticos. Sin embargo cuando nos enfrentamos a la necesidad simple y llana de obtener el campo creado en el espacio por un bobinado con una particular geometría tendremos que recurrir a métodos numéricos de integración.

Existe un método que en esas situaciones puede reportarnos cierta comodidad, llamado *método de los segmentos* (o *sticks*), que supone un paso más de desarrollo que la integración numérica directa de la expresión de Biot y Savart. Este método se describe a continuación.

Considérese un segmento de hilo conductor de longitud  $l$  recorrido por una corriente  $I$ , situado en una posición y con una orientación arbitrarias (Fig. 1.44).

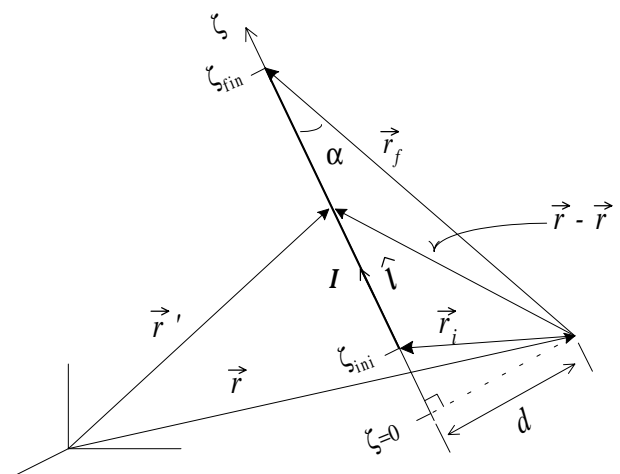


Fig. 1.44 Esquema básico utilizado en el método de los segmentos de corriente

Tal situación no es físicamente posible al no haber continuidad en la corriente, pero eso no le quita valor práctico: *si podemos obtener una expresión sencilla para el campo magnético creado por un segmento arbitrario de corriente podemos atacar otras geometrías más complicadas descomponiéndolas en una sucesión de segmentos similares.*

Definamos los siguientes radiovectores de acuerdo con la figura anterior:

- $\vec{r}$  señala al punto donde calculamos el campo;
- $\vec{r}'$  es un punto cualquiera del segmento de corriente;
- $\vec{r}_i$  y  $\vec{r}_f$  señalan el comienzo y el fin del segmento, desde el punto de cálculo;
- $\vec{l} = l\hat{l}$  es el vector en la dirección de la corriente, y de módulo igual a la longitud del segmento de corriente.

Denominamos  $d$  a la distancia (mínima) desde la recta que contiene al segmento al punto de cálculo. Se pueden probar las siguientes igualdades que se utilizarán a continuación:

$$d = \frac{|\vec{r}_f \times \vec{l}|}{l} \quad \zeta_{ini} = \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{l}}{l} \quad \zeta_{fin} = \frac{\vec{r}_f \cdot \vec{l}}{l}$$

El integrando de la ley de Biot y Savart puede expresarse en la forma:

$$d\vec{l}' \times \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = d\zeta \frac{\vec{r}_f \times \hat{l}}{l} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

con  $|\vec{r} - \vec{r}'| = (\zeta^2 + d^2)^{1/2}$ . Tras operar resulta:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\zeta_{ini}}^{\zeta_{fin}} \frac{\vec{r}_f \times \vec{l} d\zeta}{l(\zeta^2 + d^2)^{3/2}} = \dots = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\vec{r}_f \times \vec{l}}{|\vec{r}_f \times \vec{l}|^2} \left( \frac{\vec{r}_f \cdot \vec{l}}{|\vec{r}_f|} - \frac{\vec{r}_i \cdot \vec{l}}{|\vec{r}_i|} \right) \quad (1.98)$$

Esta expresión resulta eficiente como subrutina para un programa numérico de cálculo del campo magnético de uso general.

### 1.3.8 Aproximación de $\vec{B}$ a grandes distancias. Momento dipolar magnético

Frecuentemente estaremos interesados en conocer el campo magnético que se establece a grandes distancias de una distribución de corriente dada. Para disponer de una expresión general debemos proceder de forma análoga a como hicimos en electrostática (vid.

sección 1.1.13): se desarrolla el potencial vector magnético en serie de Taylor y se obtienen aproximaciones válidas mediante el empleo de los *momentos* de la fuente.

La situación en la práctica es algo diferente al caso electrostático por dos motivos: primero, porque no existen monopolos magnéticos, y *el momento de primer orden de cualquier distribución de corriente se cancela*; en segundo lugar, porque *el momento de segundo orden, o momento dipolar, raramente se anula en las distribuciones reales*, con lo que los momentos de orden superior pierden gran parte de su interés. Se demuestra que, como aproximación suficiente en la mayoría de ocasiones, se puede escribir:

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} \quad (1.99)$$

donde  $\vec{m}$  es el momento dipolar magnético de la distribución, que se define como:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_V \vec{r} \times \vec{J} dv \quad (1.100)$$

A partir del potencial vector obtenemos el campo magnético:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \nabla \times \vec{A} \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}}{r^3} \quad (1.101)$$

Las expresiones (1.99) y (1.101) son válidas siempre que se evalúen a distancias mucho mayores que la dimensión física de la distribución de corrientes.

**Ejemplo 1.31:** Calcule el momento dipolar magnético de un circuito plano de corriente que encierra un área  $S$  y por el que circula una corriente  $I$ .

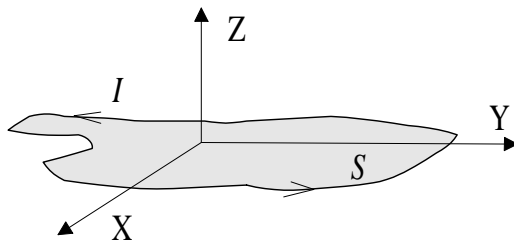


Fig. 1.45

A pesar de la aparente indefinición del problema la solución es única como se verá.

La expresión del momento dipolar para el caso de un hilo de corriente es:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \oint_C \vec{r} \times I d\vec{l}$$



La integral que se debe resolver es:  $\oint_C \vec{r} \times d\vec{l}$ , y en la figura 1.46 se muestra que, independientemente de donde situemos el origen, estamos haciendo un cálculo del área del circuito mediante triángulos rectángulos de base diferencial:

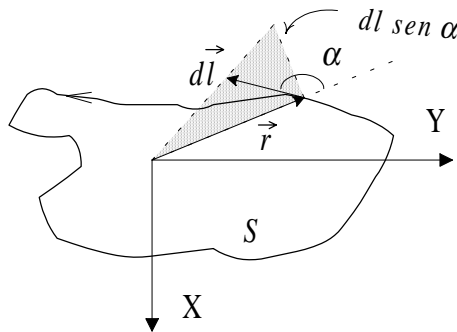


Fig. 1.46

Luego el resultado es:

$$\vec{m} = I S \hat{n} \quad (1.102)$$

donde  $\hat{n}$  es la normal al circuito en el sentido que corresponda al sentido de giro de la corriente, según el criterio de la mano derecha.

**Ejemplo 1.31:** Obtenga el campo magnético creado a grandes distancias por una espira circular de radio  $a$  por la que circula una corriente  $I$ .

Tratamos la espira como un dipolo magnético centrado en el origen.

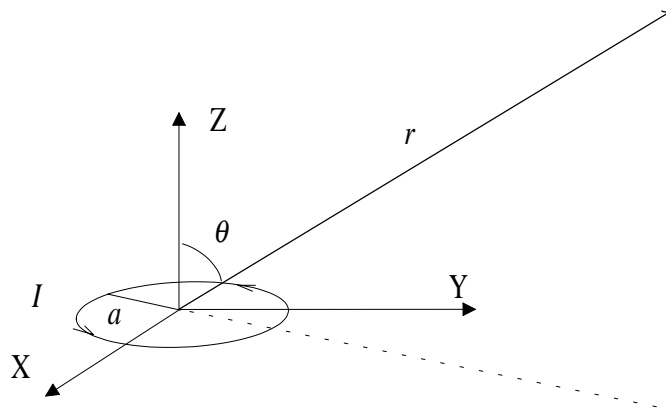


Fig. 1.47

De (1.102) tenemos:  $\vec{m} = I \pi a^2 \hat{z}$ . El potencial vector resulta:

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \pi a^2 \hat{z} \times r \hat{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \pi a^2}{r^2} \sin \theta \hat{\phi}$$

y el campo magnético:

$$\vec{B}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} [3 (m_0 \cos \theta) \hat{r} - m_0 \hat{z}]$$

o, en una forma más habitual, utilizando  $\hat{z} = \hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta$  :

$$\vec{B}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} [2 m_0 \cos \theta \hat{r} + m_0 \sin \theta \hat{\theta}] \quad (1.103)$$

Obsérvese la similitud exacta de esta expresión con la del campo eléctrico creado por un dipolo eléctrico a grandes distancias.

## 1.4 Campos magnéticos en medios materiales

Desde el punto de vista de su comportamiento frente a campos magnéticos los medios materiales pueden considerarse como formados por una infinidad de dipolos magnéticos elementales o microscópicos. Estos dipolos existen en la realidad, y son el resultado de los movimientos de traslación de los electrones del medio alrededor de los núcleos atómicos y de su rotación o *spin*. El efecto conjunto de esos movimientos en términos de desplazamiento de carga podría parecer despreciable, pero lo cierto es que a escala macroscópica los efectos son más que apreciables: de forma evidente en los imanes permanentes. La traslación alrededor de los núcleos y la rotación electrónica son verdaderas, aunque peculiares, corrientes eléctricas, cuyos efectos magnéticos pueden medirse. Cuando estas corrientes se consideran en su conjunto en un cierto volumen de material, se denominan corrientes de magnetización. En los siguientes apartados veremos resumidamente cómo se generan y cómo se caracterizan esas corrientes, y los campos magnéticos que producen.

### 1.4.1 Fuerzas sobre un dipolo magnético

Si situamos un dipolo magnético en el seno de un campo magnético exterior el circuito que constituye el dipolo experimentará una fuerza que vendrá dada por una ecuación similar a la (1.86):

$$\vec{F} = \oint_C I d\vec{l} \times \vec{B}_{ext}$$

En el caso de que el campo magnético sea *uniforme*, o con variaciones espaciales muy lentas en comparación con el tamaño del circuito tendremos:

$$\vec{F} = I \left( \oint_C d\vec{l} \right) \times \vec{B}_{ext} = 0 \quad \text{ya que} \quad \oint_C d\vec{l} \equiv 0 \quad \forall C \text{ cerrado}$$

por lo que el dipolo permanecerá en su lugar al no experimentar una fuerza neta. Si calculamos el momento de las fuerzas ejercidas sobre el circuito respecto a un cierto eje previamente definido la situación puede cambiar:

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \oint_C \vec{r}_{aje} \times d\vec{F} = I \oint_C \vec{r}_{aje} \times (d\vec{l} \times \vec{B}_{ext}) = \\ &= I \oint_C (\vec{r}_{aje} \cdot \vec{B}_{ext}) d\vec{l} - I \vec{B}_{ext} \oint_C \vec{r}_{aje} \cdot d\vec{l} = I \oint_C (\vec{r}_{aje} \cdot \vec{B}_{ext}) d\vec{l} \end{aligned}$$

Entonces el momento de fuerzas se cancela cuando  $\vec{r}_{aje}$  y  $\vec{B}_{ext}$  son perpendiculares en todo punto. En el caso de un circuito plano esto ocurre cuando el campo magnético es perpendicular al plano del circuito. Se puede comprobar que el momento resulta finalmente (siempre que el campo magnético sea uniforme):

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}_{ext} \quad (1.104)$$

por lo que el dipolo tiende a orientarse en la dirección del campo magnético externo (hasta cancelar el momento de las fuerzas magnéticas).

En los medios materiales ocurre este fenómeno: *los dipolos magnéticos no abandonan su posición por la influencia del campo, pero se orientan con él*. Entonces el material pasa a estar magnetizado y crea a su vez campos magnéticos macroscópicos.

### 1.4.2 Vector magnetización

Se define el vector magnetización en un medio material como la densidad de momento dipolar por unidad de volumen.

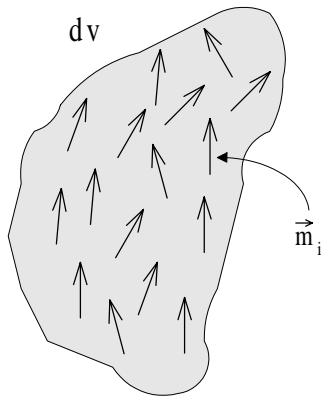


Fig. 1.48

$$\vec{M}(\vec{r}) = \frac{\sum \vec{m}_i}{dv} = \frac{d\vec{m}}{dv} \quad (\text{A/m}) \quad (1.105)$$

El vector magnetización caracteriza de forma completa al material magnetizado, de modo que si llegamos a conocer el valor de ese vector en todos los puntos del material podremos calcular inmediatamente los efectos magnéticos que puede producir en sus inmediaciones.

Utilizando la anterior ecuación junto a la (1.99) resulta inmediatamente:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\vec{M}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dv' \quad (1.106)$$

que es el potencial vector creado en todo el espacio por el material magnetizado. Si existe otro campo magnético en el espacio -el que provocó la magnetización del medio, por ejemplo- se superpondrá al calculado mediante esa expresión.

El problema de la ecuación (1.106) es que usualmente no conocemos a priori el valor del vector magnetización, por lo que no es un camino práctico para resolver problemas reales.

### 1.4.3 Densidades de corriente de magnetización

La magnetización macroscópica, medible, de un medio material es el resultado de infinidad de corrientes microscópicas que circulan, aproximadamente, en el mismo sentido y en planos paralelos. *El conjunto de esas corrientes equivale a ciertas densidades de corriente macroscópicas*, que se describen a partir del vector magnetización como:

$$\vec{J}_M(\vec{r}) = \nabla \times \vec{M}(\vec{r}) \quad \vec{J}_{SM}(\vec{r}) = \vec{M}(\vec{r}) \times \hat{n} \Big|_S \quad (1.107)$$

donde  $\vec{J}_M(\vec{r})$  es la *densidad volúmica de corriente de magnetización* y  $\vec{J}_{SM}(\vec{r})$  la *densidad superficial de corriente de magnetización*. El vector  $\hat{n}$  es el vector unitario normal a cada punto de la superficie y dirigido hacia fuera del volumen del material.

#### 1.4.4 Ley de Ampère en medios magnéticos. Intensidad de campo magnético

El comportamiento magnético de un medio material viene dado por las corrientes de magnetización creadas en él. Esto se pone de manifiesto al examinar la ley de Ampère en esta nueva situación, que ahora deberá escribirse:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_M) \quad (1.108)$$

Si hacemos ahora uso de la primera expresión dada en (1.107) tendremos:

$$\nabla \times \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) = \vec{J} \quad (1.109)$$

Esto permite definir el campo magnético  $\vec{H}$ , o intensidad de campo magnético, en la forma:

$$\vec{H} \equiv \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (A/m) \quad (1.110)$$

con lo que la forma final de la ley de Ampère para este campo es:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} \quad \text{o} \quad \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} \quad (1.111)$$

El sentido de la definición de  $\vec{H}$  es el mismo que el del vector desplazamiento  $\vec{D}$  en electrostática: *las expresiones (1.111) permiten trabajar en el seno de medios materiales de igual modo que si estuviésemos en el vacío*, teniendo en cuenta de forma explícita únicamente las corrientes libres (usualmente corrientes de conducción).

#### 1.4.5 Relación entre el campo magnético y el vector magnetización

La cuestión que falta ahora por abordar es de qué manera actúa un campo magnético externo para producir una magnetización en un material, y de qué magnitud es esa magnetización.

La primera cuestión ya se ha explicado en los apartados precedentes. Un campo externo tiende a orientar localmente los dipolos microscópicos en su misma dirección. El que el campo logre una orientación más o menos importante y cuál sea la densidad de dipolos orientables en el material dependerá ya del tipo de medio que estemos considerando.

Se establece la relación entre la intensidad de campo magnético en los diferentes puntos de un medio material y el valor del vector magnetización resultante mediante la expresión:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (1.112)$$

donde  $\chi_m$  es la llamada *susceptibilidad magnética del medio*. La mayoría de las sustancias, como agua, madera, papel, muchos minerales y muchos metales y aleaciones, como aluminio, latón, acero, plata, oro, cobre,... tienen una susceptibilidad magnética extraordinariamente pequeña. Esto significa que no se magnetizan apreciablemente aun en presencia de campos magnéticos intensos. Por contra existen metales y aleaciones altamente magnéticos. En éstos suele ocurrir que la relación entre vector magnetización y campo magnético no es lineal, y entonces debe escribirse:

$$\vec{M} = \chi_m (\vec{H}) \vec{H} \quad (1.113)$$

Limitándonos por el momento al caso lineal podemos llegar a la clásica relación entre  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$  sustituyendo la ecuación (1.112) en la (1.110):

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \chi_m \vec{H} \quad (1.114)$$

de donde se llega a:

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} \quad (1.115)$$

Se definen:

$$\begin{aligned} \mu_r &= 1 + \chi_m \\ \mu &= \mu_0 \mu_r \quad (H/m) \end{aligned} \quad (1.116)$$

como las permeabilidades relativa y absoluta, respectivamente, del material. Y de allí:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} \quad (1.117)$$

**Ejemplo 1.32:** Un hilo largo por el que circula una corriente  $I$  está rodeado por un tubo cilíndrico de radios  $a$  y  $b$  (interior y exterior, respectivamente). El tubo es concéntrico con el hilo y podemos suponerlo también muy largo. El tubo tiene una permeabilidad magnética  $\mu$ . Obtenga el campo magnético en todo el espacio.

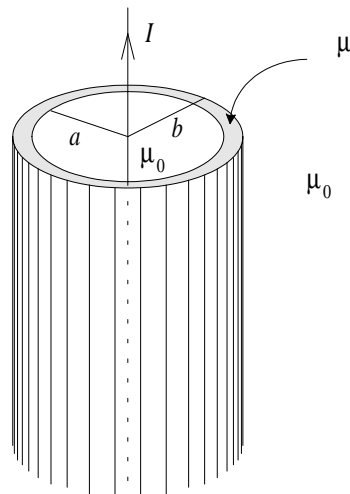


Fig. 1.49

La sucesión de acontecimientos hasta llegar al régimen estacionario es como sigue:

- La corriente  $I$  crea un campo magnético inicial alrededor del hilo, en la dirección  $\phi$ .
- Ese primer campo magnetiza al material que forma el tubo, y aparecen corrientes de magnetización.
- Las corrientes de magnetización modifican el campo creado por el hilo en, al menos, alguna región del espacio.

Procederemos a calcular el campo final que se establece en todo el espacio. Según la ley de Ampère para el vector  $\vec{H}$  la circulación de este campo a lo largo de una trayectoria cerrada sólo depende de las corrientes libres del problema. Podemos escribir:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I \Big|_S$$

para cualquier contorno cerrado  $C$ . La geometría del problema nos indica que el campo magnético debe ser de la forma:  $\vec{H}(\vec{r}) = H_\phi(\rho)\hat{\phi}$ , en cualquier zona del espacio.

La ecuación anterior aplicada a un contorno circular, a diferentes distancias del hilo, lleva a:

$$H_\phi(\rho) = \frac{I}{2\pi\rho} \quad \forall \rho$$

En particular esto es cierto para la región ocupada por el tubo de material magnético ( $a < \rho < b$ ). De ahí que las corrientes de magnetización sean:

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} = \nabla \times \chi_m \vec{H} = \dots = 0$$

$$\vec{J}_{SMa}|_{\rho=a} = \vec{M} \times \hat{n}|_{\rho=a} = \chi_m \frac{I}{2\pi a} \hat{\phi} \times (-\hat{\rho}) = \chi_m \frac{I}{2\pi a} \hat{z}$$

$$\vec{J}_{SMb}|_{\rho=b} = \vec{M} \times \hat{n}|_{\rho=b} = \chi_m \frac{I}{2\pi b} \hat{\phi} \times (+\hat{\rho}) = -\chi_m \frac{I}{2\pi b} \hat{z}$$

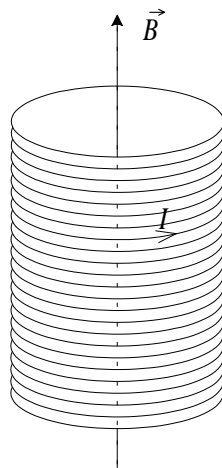
El campo magnético  $\vec{B}$  será:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 \frac{I}{2\pi \rho} \hat{\phi} \quad \text{para } \rho < a \text{ y para } \rho > b$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu \frac{I}{2\pi \rho} \hat{\phi} \quad a < \rho < b$$

Como ejercicio adicional vuelva a calcular  $\vec{B}$  a partir de la corriente original más las corrientes de magnetización, situando todas ellas en el vacío. Deberá obtenerse el mismo resultado, lo que confirma el método utilizado.

**Ejemplo 1.33:** Considérese un bobinado en forma cilíndrica, muy largo, de radio  $a$ , con cierta densidad de espiras por unidad de longitud,  $n$ , en la forma que muestra la figura, y por el que circula una corriente  $I$ . El arrollamiento es lo suficientemente denso como para suponer que todas las vueltas son espiras planas. Obtenga el campo magnético producido en el interior del bobinado.



Una aproximación adecuada es suponer que fuera de la bobina no existe campo magnético, y que éste se concentra en el interior, donde, a su vez, podemos asumir que es constante, y dirigido en la dirección del eje del cilindro.

Éstas son hipótesis válidas sólo si consideramos de hecho que la bobina es infinitamente larga.

Fig. 1.50



La forma de resolver el problema mediante la ley de Ampère es trazar un circuito en la dirección del campo:

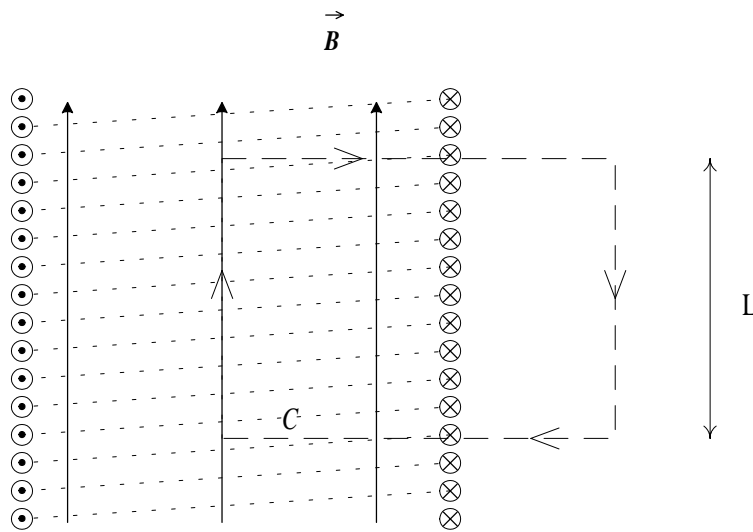


Fig. 1.51

Solamente en uno de los tramos de  $C$  existe circulación. El resultado final es:

$$B \cdot L = \mu_0 n L I \quad \rightarrow \quad \vec{B}(\vec{r}) = \mu_0 n I \hat{z}$$

**Ejemplo 1.34:** Un bobinado tiene forma toroidal, de radio medio global  $r_0$ , y radio de la sección  $a$ , con  $r_0 \gg a$ . Está formado por  $N$  espiras de cable distribuidas de forma homogénea y suficientemente densa, tal como se muestra en la figura 1.52 a), como para que el campo magnético producido pueda considerarse confinado dentro del bobinado y de valor constante en toda la sección.

- Calcule el campo magnético cuando por la bobina circula una corriente  $I$ .
- Repita el cálculo considerando que el arrollamiento se ha realizado alrededor de un núcleo de material magnético con permeabilidad  $\mu$ .
- Obtenga el campo magnético producido en una pequeña apertura de grosor  $d$  practicada en el núcleo (Fig. 1.52 b).

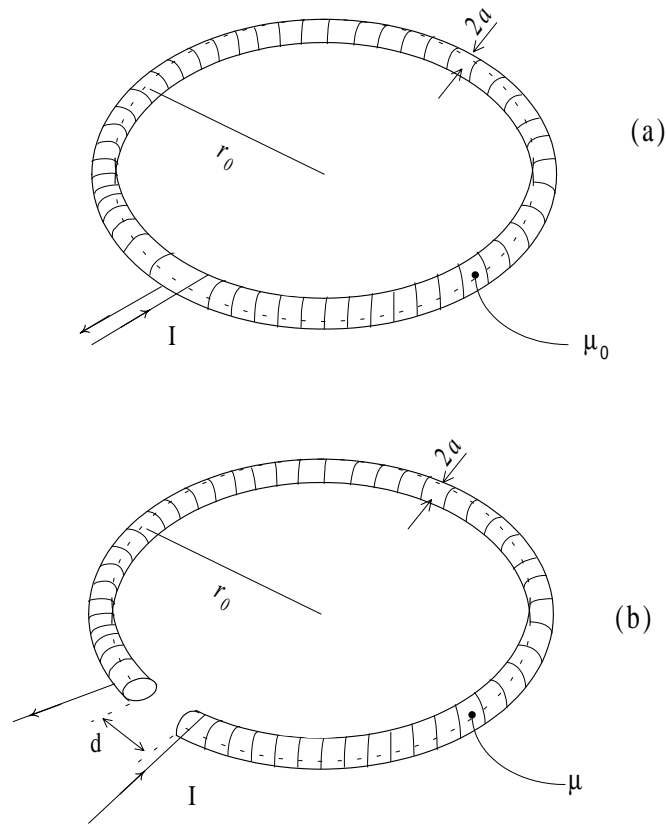


Fig. 1.52 Bobina toroidal

Podemos aplicar de nuevo la ley de Ampère para hacer todos estos cálculos.

a) El circuito elegido no es otro que la circunferencia de radio  $r_0$  que atraviesa el centro de todas las espiras, puesto que el campo magnético seguirá también esa trayectoria.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \Big|_S \rightarrow B_\phi 2\pi r_0 = \mu_0 N I$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r_0} \hat{\phi}$$

b) En caso de tener un núcleo de material magnético aparecerán corrientes de magnetización. Debemos trabajar con el campo  $\vec{H}$  ante la imposibilidad de calcular a priori tales corrientes. El resultado es:

$$\vec{H} = \frac{NI}{2\pi r_0} \hat{\phi} \quad \text{y} \quad \vec{B} = \frac{\mu NI}{2\pi r_0} \hat{\phi}$$

c) Para resolver este último apartado, que es el más interesante en la práctica, mantenemos la aproximación de que el campo magnético es constante en la sección del núcleo magnético y también ahora en el entrehierro, lo que desde luego ya es más discutible, al dejar de estar confinado el campo. Servirá, sin embargo, como primera estimación.

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_n(2\pi r_0 - d) + H_e d = NI$$

Disponemos de otra igualdad para completar el problema, que viene dada por el hecho de que *las componentes normales del campo magnético  $\vec{B}$  a un lado y otro de la superficie de separación de dos medios son siempre iguales*. Ésta es una consecuencia del carácter solenoidal de  $\vec{B}$  que se verá con detalle en el próximo capítulo junto con las demás condiciones de contorno aplicables en problemas electromagnéticos. Esa condición nos lleva a la igualdad:

$$\mu H_n = \mu_0 H_e$$

y, finalmente a:

$$H_e = \frac{\mu NI}{\mu_0(2\pi r_0 - d) + \mu d}$$

#### 1.4.6 Tipos de medios magnéticos

Los medios materiales se clasifican de acuerdo con el tipo de respuesta frente a campos externos.

En aquellos materiales en los que *el movimiento de traslación de los electrones alrededor de los átomos* tienen una influencia preponderante el valor de susceptibilidad magnética es negativo. Lo que ocurre es que las corrientes microscópicas tienden a oponerse a los cambios de flujo magnético que produce el campo magnetizador exterior. Estos medios reciben el nombre de *diamagnéticos*, y lo son, por ejemplo, el cobre, el oro, la plata, el diamante, el mercurio y el agua. En cualquier caso, el efecto es muy pequeño, y la susceptibilidad magnética oscila entre  $-10^{-5}$  y  $-10^{-8}$ .

Cuando el *efecto de rotación o spin* de los electrones supera al efecto diamagnético, el material pasa a tener una susceptibilidad positiva. Son los materiales *paramagnéticos*. Ejemplos de este tipo son: aluminio, sodio, magnesio, tungsteno y titanio. De nuevo sus valores de susceptibilidad son del orden de  $10^{-5}$ .

Los materiales de más interés desde el punto de vista industrial para aplicaciones magnéticas son los llamados *ferromagnéticos*, que se caracterizan por una elevada susceptibilidad, por una dependencia no lineal del vector magnetización con la intensidad de campo magnético y por poseer memoria de la su situación magnética previa, que da lugar al conocido ciclo de histéresis. No haremos aquí una caracterización completa de tales medios, sino que nos limitaremos a señalar algunas de sus propiedades más interesantes.

Los medios ferromagnéticos poseen unos valores de permeabilidad magnética  $\mu_r$  mucho más elevados que cualquier otro tipo de medios. Sin embargo, no se trata de un valor constante, sino de una función de la intensidad de campo  $H$  presente en el interior del material. En la figura 1.53 se representa una forma característica de esa función. En ella se muestra simultáneamente la evolución del campo  $B$ .

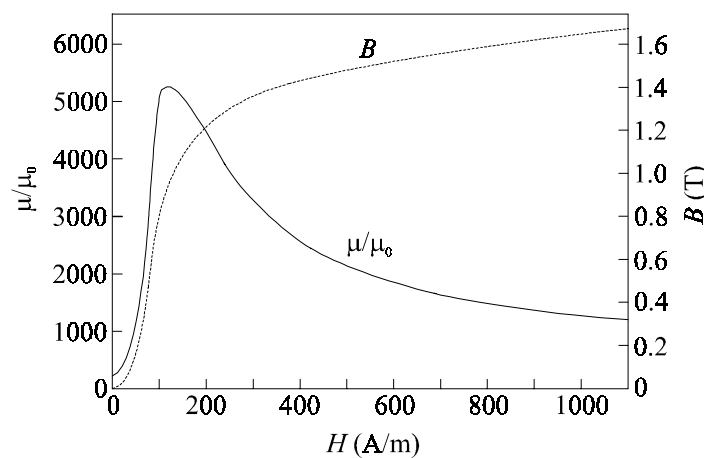


Figura 1.53: Permeabilidad y curva de magnetización de un material ferromagnético

A la gráfica  $B-H$  en el primer cuadrante se le denomina *curva de magnetización* del material. La mostrada en la figura es la correspondiente al hierro templado. El valor máximo que toma la permeabilidad relativa en este caso es de 5.200. Existen aleaciones donde este valor es todavía mucho mayor.

Las propiedades magnéticas de estos medios derivan de su estructura iónica. Los dipolos magnéticos constituyentes tienden a orientarse espontáneamente en una misma dirección porque de ese modo alcanzan una situación de energía interna mínima. Lo que impide que un material de este tipo esté permanentemente magnetizado hasta la saturación es que tal orientación de dipolos no es uniforme, sino que se forman *dominios* o pequeños volúmenes de material con orientaciones diversas, de manera que desde un punto de vista macroscópico el efecto es más moderado y admite crecimiento y disminución. En la figura 1.54 se muestra esquemáticamente un trozo de material ferromagnético sin magnetización neta y los dos procesos que en la práctica le pueden llevar a mostrar cierto grado de

magnetización por efecto de un campo externo. La teoría de los dominios fue propuesta por Weiss en 1907 y fue comprobada bastantes años más tarde de forma experimental.

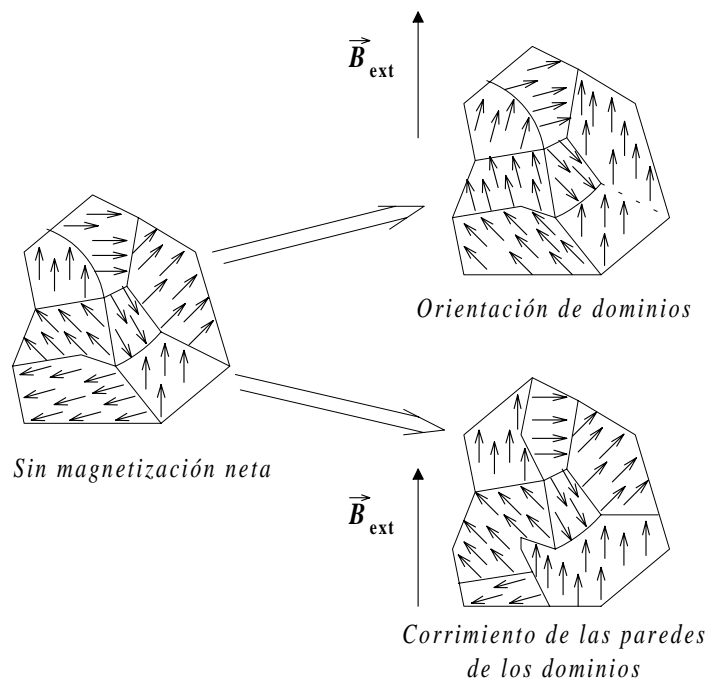


Fig. 1.54 Magnetización de un medio ferromagnético

Con estas consideraciones puede interpretarse la forma de la gráfica 1.53: en un primer momento el material se magnetiza fácilmente, hasta alcanzar un valor próximo a la saturación. A partir de ese momento un posterior crecimiento del campo  $H$  produce un crecimiento moderado y lineal de  $B$ , de acuerdo con el término  $\mu_0 H$ , porque la orientación de los dominios y, por tanto, el valor del término  $M$  de magnetización, ya no pueden mejorar. En ocasiones se representa únicamente el término  $\mu_0 M$  en función de  $H$ , lo que da lugar a una curva asintóticamente plana.

Muchos materiales ferromagnéticos tienen memoria de su estado magnético previo: cuando desaparece el campo externo los dominios mantienen en parte sus orientaciones anteriores, y el material conserva una magnetización remanente. Al invertir el sentido del campo externo aplicado se describe otra curva hasta que el material queda magnetizado en sentido contrario. Si se repite el proceso se obtiene el ciclo completo de histéresis (Fig. 1.55). El valor de  $B$  cuando  $H$  alcanza un valor nulo (disminuyendo desde la saturación) se denomina *campo remanente* o *remanencia* del material. El valor de  $H$  cuando  $B$  llega a valer cero (al aumentar  $H$  en sentido inverso desde la saturación) se denomina *campo coercitivo* o *coercitividad* del medio. Ambos valores caracterizan al material ferromagnético. Es

importante notar que en ninguno de los dos puntos anteriores  $(0, B_r)$  o  $(-H_c, 0)$  tenemos realmente al material desmagnetizado, como es evidente si recordamos la expresión más general:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \text{ ahora con } \vec{M} = \chi_m(\vec{H})$$

Cuando una pieza o una herramienta se magnetiza accidentalmente la forma que se emplea en la práctica para desmagnetizarla consiste en aplicarle un campo magnético intenso, de tipo senoidal y de amplitud decreciente, de manera que el estado magnético del material vaya recorriendo ciclos de histéresis sucesivos, cada vez más pequeños, hasta llegar de nuevo al origen de la curva B-H, en la que  $B = \mu_0 H = \mu_0 M = 0$ .

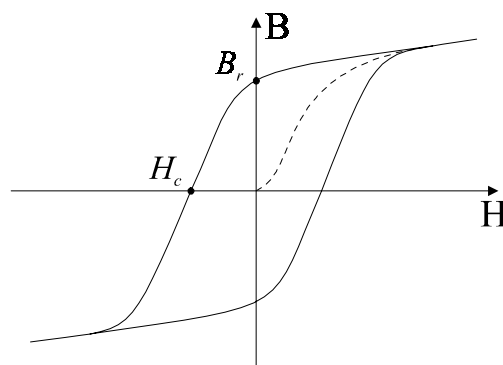


Fig. 1.53 Ciclo de histéresis y valores característicos

Cuando se desea, por el contrario, disponer de un imán permanente de buena calidad es deseable que el estado de magnetización sea estable. El valor del campo coercitivo,  $H_c$ , del material da idea de la persistencia de la magnetización frente a campos externos.

Por último debe señalarse que existe un valor de temperatura, llamado temperatura de Curie, por encima de la cual el medio pierde, al menos parcialmente, sus propiedades magnéticas. La agitación térmica se hace tan elevada que la orientación ordenada de los dipolos ya no es posible.

Algunos materiales ferromagnéticos usuales y sus características se muestran en la tabla siguiente.

Material	$B_r$ (T)	$H_c$ (A/m)	$T_c$ (°C)
Acero (al Co)	0,97	$0,19 \times 10^5$	
Ferritas cerámicas	0,39	$2,5 \times 10^5$	450
Alnico 5	1,25	$0,55 \times 10^5$	700-850
$SmCo_5$	0,9	$6,5 \times 10^5$	500-750
$Sm_2Co_{17}$	1,12	$4,7 \times 10^5$	780-850
Nd,Dy-Fe,Co-B	1,2	$9,5 \times 10^5$	500

### 1.4.7 Flujo magnético, inductancia y energía magnética

El flujo de un campo magnético a través de una superficie es:

$$\phi_M = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} \quad (\text{Wb, Weber}) \quad (1.118)$$

donde  $C$  es el contorno en que se apoya la superficie no cerrada  $S$ .

La presencia de un flujo magnético a través de la superficie limitada por un circuito denota la existencia de una corriente eléctrica y, por tanto, de *una cierta cantidad de energía disponible*. Esa corriente podría hacerse fluir a través de una resistencia, y se transformaría en calor por efecto Joule, o podría utilizarse para cargar un condensador, y se almacenaría en forma de campo eléctrico. Sin embargo, mientras no se realice ninguna de esas operaciones, la energía está almacenada en forma de campo magnético en el circuito que lo produce. Es cierto que un circuito real tendrá una resistencia no nula y por tanto la energía irá disipándose lentamente, pero también podríamos imaginar que disponemos de un anillo superconductor, en el que la corriente puede circular ininterrumpidamente sin pérdida alguna. La cuestión es ¿de qué manera podemos medir la energía asociada al campo magnético o, si se prefiere, a la corriente eléctrica?

La significación física del flujo de campo magnético fue descubierta por Faraday, y de allí que esta cuestión deba tratarse en conexión con el fenómeno de inducción electromagnética y la ley de Faraday. Se tratará de forma sistemática en el capítulo siguiente. De momento nos conformaremos con apuntar algunos resultados.

La ley de Faraday cuantifica el hecho experimental de que *una variación del flujo de campo magnético en un circuito provoca la aparición de una fuerza electromotriz (f.e.m.) en dicho circuito*. A partir de allí podemos intuir que existe una relación directa entre variación temporal de flujo magnético y energía por unidad de carga, ya que la f.e.m. tiene en realidad dimensiones de tensión (1 voltio = 1 julio/culombio). Entonces, el producto *flujo magnético x corriente* tiene dimensiones de energía.

De lo anterior, y por puro análisis dimensional del problema, podemos afirmar que cuando en un circuito por el que circula una corriente medimos un cierto flujo de campo magnético es seguro que la energía almacenada tiene que ver con ambas magnitudes. Además, el flujo magnético a que da lugar una determinada corriente depende no sólo del valor de la corriente sino también de la geometría del circuito. Interviene entonces un parámetro que se denomina *autoinductancia* del circuito, y que *mide la cantidad de flujo magnético por unidad de corriente* que el circuito puede producir. Suele escribirse en forma diferencial:

$$L = \frac{d\phi_M}{dI} \quad (H, \text{henrios}) \quad (1.119)$$

si bien en circuitos rodeados de medios lineales puede prescindirse de las derivadas. La variación de flujo magnético que produce entonces una variación de corriente es

$$d\phi_M = L dI$$

Cuando dos o más circuitos están próximos físicamente, la variación de corriente en un circuito provoca la variación del flujo magnético que atraviesa al otro, o a los otros. Se dice que los circuitos están *magnéticamente acoplados* y existe entre ellos un intercambio de energía que puede cuantificarse mediante la ley de Faraday. Cuál sea la variación de flujo magnético en un circuito 1 debido a una variación de corriente en otro circuito 2 depende de la geometría de los circuitos y de su posición relativa. Se define el *coeficiente de inductancia mutua* ( $M_{12}$ ) para dar cuenta de este efecto. Ahora podemos escribir:

$$\begin{aligned} d\phi_1 &= L_1 dI_1 + M_{12} dI_2 \\ d\phi_2 &= M_{21} dI_1 + L_2 dI_2 \end{aligned} \quad (1.120)$$

aunque se comprueba que  $M_{12} = M_{21}$  o, en general, para cualquier número de circuitos:  $M_{ij} = M_{ji}$ .

Finalmente podemos adelantar que la energía magnética almacenada en un conjunto de  $N$  circuitos magnéticamente acoplados es:

$$U_M = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \phi_i = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N I_i \sum_{j=1}^N M_{ij} I_j \quad \text{donde} \quad M_{ii} = L_i \quad (1.121)$$

y para el caso de un único circuito:  $U_M = \frac{1}{2} L I^2$ .

Pasando a una situación más general, no necesariamente circuital, puede probarse que la energía magnética se escribe en la forma:



$$U_M = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} dv \quad (1.122)$$

**Ejemplo 1.35:** Obténgase la autoinductancia del bobinado toroidal del ejemplo anterior (1.34 a).

Se calculó previamente el campo magnético existente en el interior de la bobina:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r_0} \hat{\phi}$$

El número de espiras atravesadas por el flujo magnético es  $N$  y la sección de cada una de ellas es conocida. Entonces el flujo total es:

$$\phi = N \frac{\mu_0 N I}{2\pi r_0} \pi a^2$$

donde  $a$  es el radio del solenoide. La inductancia es, por tanto:

$$L = \frac{d\phi}{dI} = \frac{\mu_0 N^2}{2r_0} a^2 \quad (H)$$

### Cuestiones de Repaso:

- 1) ¿Qué significa que el campo magnetostático sea un campo solenoidal? ¿Qué otro campo vectorial solenoidal se ha tratado en este capítulo?
- 2) ¿Qué condiciones se precisan para que en una determinada situación podamos utilizar la ley de Ampère para el cálculo directo del campo magnético?
- 3) ¿Cómo disminuye el campo magnético creado por las siguientes distribuciones de corriente a medida que nos alejamos de ellas: a) un plano infinito de corriente; b) un hilo infinito; c) un dipolo magnético. Considere densidades homogéneas en las dos primeras.

- 4) Si la circulación del campo magnético a lo largo de una trayectoria cerrada es nula ¿qué puede deducirse de ese hecho?
- 5) Escriba las unidades en el S.I. y las expresiones matemáticas que definen a los campos vectoriales siguientes:  $\vec{J}$ ,  $\vec{J}_s$ ,  $\vec{B}$ ,  $\vec{M}$ ,  $\vec{H}$ .
- 6) El campo magnético  $\vec{B}$  ¿es más o menos intenso en un medio magnético o en el vacío? Supóngase que la forma de las líneas de campo no varían por la inclusión del material. (Tómese como referencia la situación del ejemplo 1.32).
- 7) ¿Qué tipos de medios magnéticos existen? Describa brevemente sus características.
- 8) ¿Puede extraerse energía de un imán permanente? Dicho de otro modo ¿puede utilizarse para realizar un trabajo neto?
- 9) Además del método de inversiones mencionado en la sección 1.4.6 utilizado para desmagnetizar una pieza de material ferromagnético ¿qué otro método, aparentemente más directo, podría utilizarse? ¿Qué ventajas tiene el primero sobre ese segundo método?

## PROBLEMAS - CAPÍTULO 1

### Campo electrostático

1. Desde el punto de vista electrostático la Tierra puede considerarse como una esfera conductora con carga negativa y rodeada de una atmósfera cargada positivamente. El valor del campo eléctrico en la superficie es de unos 200 V/m, y a una altura de 2000 m. disminuye hasta unos 20 V/m. Hasta esa altura,  $h = 2000$  m., la densidad volúmica de carga en la atmósfera puede considerarse constante. El radio de la Tierra es  $R = 6,4 \times 10^6$  m.

- ¿Cuál es el sentido del campo eléctrico en la atmósfera?
- Obtenga la densidad de carga superficial media de la Tierra.
- Calcule la densidad de carga volúmica de la atmósfera hasta la altura  $h$  indicada.
- Si tomamos el potencial de la Tierra como referencia (cero voltios) ¿cuál será su valor a 2000 m?

(NOTA: Puede aproximarse el problema mediante una geometría plana, ya que  $h \ll R$ ).

2. Un determinado modelo atómico muestra al átomo constituido por una carga puntual de valor  $q$ , en el vacío, situada en el origen de coordenadas, rodeada de una densidad volúmica de carga  $\rho(\vec{r})$ . Las expresiones de la densidad de carga y del potencial *total* creado en el espacio son:

$$\rho(\vec{r}) = -\frac{q}{4\pi a^2} \frac{1}{r} \exp\left(-\frac{r}{a}\right) \quad \phi(\vec{r}) = K \frac{\exp(-r/a)}{r}$$

donde  $a$  es el llamado radio efectivo del átomo. Calcule:

- la carga total del átomo;
- el valor de la constante  $K$  en función de  $a$  y de  $q$ ;
- el campo eléctrico en el espacio.

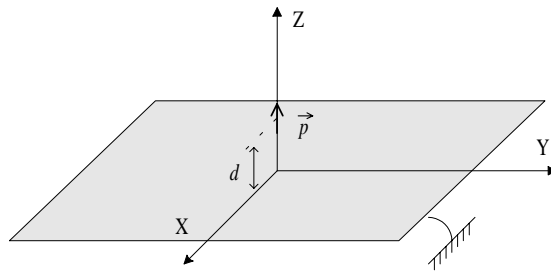
3. Una carga puntual de valor  $q$  está situada enfrente de un plano conductor extenso conectado a tierra, y a una distancia  $d$ , del mismo modo que en el ejemplo 1.14 (Fig. 1.17). A partir de los resultados que se obtuvieron entonces calcule:

- la densidad superficial de carga inducida en el plano conductor;
- la carga total que contiene esa densidad superficial;
- la fuerza que el plano realiza sobre la carga.

4. Un dipolo real de momento dipolar  $\vec{p} = q s \hat{z}$  está situado a una distancia  $d$  de un plano conductor muy extenso y conectado a potencial cero, como se muestra en la figura 1.

- a) Calcule el campo eléctrico producido en el semiespacio  $z > 0$ .
- b) Escriba la aproximación usual del campo eléctrico a grandes distancias del dipolo.

Fig. 1



5. Una corona esférica de material dieléctrico, de radio interior  $a$  y radio exterior  $b$ , posee una polarización permanente de la forma:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{r}{a} P_0 \hat{r}$$

Suponiendo que no hay carga libre en el dieléctrico calcule: a) todas las densidades de carga presentes; b) el campo eléctrico en todo el espacio; c) la diferencia de potencial entre las superficies interior y exterior de la corona.

6. Una esfera dieléctrica de radio  $R$  y situada en el origen de coordenadas tiene una polarización permanente y homogénea, en la forma  $\vec{P} = P_0 \hat{z}$ . No tiene carga libre. Resuelva ordenadamente las siguientes cuestiones:

- a) Obtenga las densidades de carga ligada volúmica y superficial;
- b) ¿qué valor toma la laplaciana del potencial dentro y fuera de la esfera?;
- c) el potencial tiene la forma

$$\phi(r, \theta) = Ar^{-n} f(\theta) \quad \text{o} \quad \phi(r, \theta) = Br^m g(\theta)$$

¿Qué expresión puede utilizar para el interior de la esfera? ¿y para el exterior?

- d) escriba las condiciones de contorno para los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{D}$ . (Vid. Capítulo 2).
- e) calcule el campo eléctrico dentro y fuera de la esfera.
- f) calcule el momento dipolar de la esfera.

7. Calcule la fuerza que ejercen entre sí las placas de un condensador plano cuando se carga mediante una diferencia de potencial  $V$ . Tómense los datos siguientes:  $d$ , separación entre placas;  $S$ , superficie de cada placa;  $\epsilon$ , permitividad del dieléctrico entre las placas (lineal y homogéneo). Despréciense los efectos de borde.

8. Considérese la estructura de la figura, formada por una esfera conductora de radio  $a$ , con dos cubiertas metálicas concéntricas, la primera de radios interior y exterior  $b$  y  $c$ , respectivamente, y la segunda de radios  $d$  y  $e$ . Entre los conductores hay aire. Se sabe que el conductor intermedio está aislado y que no posee carga neta.

- ¿Qué relación existe entre los flujos de campo eléctrico a través de dos superficies cerradas que engloban el centro del sistema y contenidas respectivamente en las zonas  $a < r < b$  y  $c < r < d$ ?
- Se conecta la esfera interior a un potencial  $V$  respecto a la cubierta externa. Calcule el campo eléctrico en todos los puntos  $0 < r < d$ .
- Calcule las densidades superficiales de carga en  $r=a$  y  $r=b$ .
- Obtenga la capacidad del sistema.

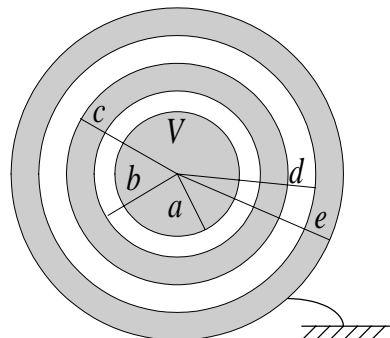


Fig. 2

9. Considérese un cable coaxial formado por un conductor cilíndrico central de radio  $a$ , y otro conductor, concéntrico con el primero, de radio interior  $b$ . Entre ambos conductores hay unas fijaciones de material dieléctrico en la forma en que se muestra en la figura. El dieléctrico es lineal y homogéneo, de permitividad  $\epsilon_1$ . El espacio restante es aire. Se conecta el conductor interior a un potencial  $V$  y el exterior a tierra. Se comprueba que la distribución de potencial que resulta entre ambos conductores sólo depende de la distancia  $\rho$  al eje  $Z$ . De acuerdo con esa información obtenga:

- La función potencial en todo el espacio comprendido entre los conductores;
- el campo eléctrico;
- la capacidad por unidad de longitud del cable.

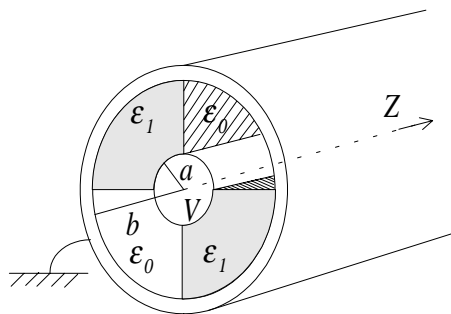


Fig. 3

10. Se desea calcular la capacidad de una línea de transmisión formada por un cable conductor cilíndrico, de radio  $R$ , situado a una altura  $h$  de tierra, y el propio plano de tierra, como se muestra en la figura 4. La tierra se comporta como un plano conductor infinito. El potencial electrostático en el espacio comprendido entre los dos conductores es de la forma:

$$\phi(x, y) = \frac{V}{\ln\left(\frac{h+D}{h-D}\right)} \left\{ \ln(x^2 + (y+D)^2) - \ln(x^2 + (y-D)^2) \right\}$$

$$\text{donde } D = \sqrt{h^2 - R^2}$$

- Compruebe que la expresión dada para la función potencial es la adecuada al problema.
- Calcule la densidad superficial de carga en el plano de tierra.
- Obtenga la capacidad por unidad de longitud de la línea.

NOTA: La ecuación de una circunferencia de radio  $R$  y centrada en el punto  $(x_0, y_0)$  es:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

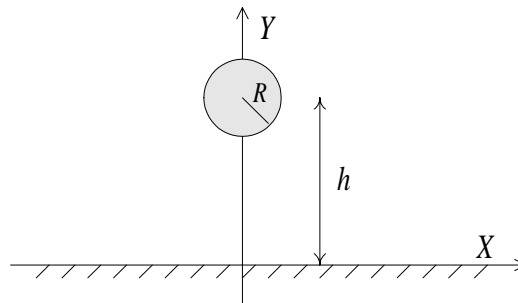


Fig. 4

**11.** Un condensador cilíndrico largo está formado por dos conductores concéntricos de radios exterior  $b$  e interior  $b/4$ , separados por un dieléctrico no homogéneo, cuya constante dieléctrica es:

$$\epsilon_r(\rho) = \frac{3}{2} \left( 1 + \frac{b}{\rho} \right)$$

En el dieléctrico no hay carga libre adicional. Conectamos el conductor interior a tierra y el conductor exterior a un potencial  $V$ . Conteste ordenadamente a las siguientes cuestiones:

- ¿Cuáles son los campos  $\vec{D}$  y  $\vec{E}$  entre las armaduras del condensador?
- ¿Cuál será la carga total del dieléctrico?
- ¿Cuál es la capacidad por unidad de longitud?
- ¿Qué cantidad de energía eléctrica almacena el condensador?

**12.** Las armaduras de cierto condensador plano son dos placas metálicas cuadradas de lado  $a = 30$  cm., distantes entre sí  $d_1 = 1$  cm. Se carga el condensador con una diferencia de potencial  $V_1 = 2000$  V.

- Obtenga la capacidad del condensador, despreciando los efectos de borde.
- Se *aisla* el condensador cargado de la fuente de tensión y *se separan* las armaduras hasta una distancia  $d_2 = 3$  cm.
  - ¿Cuánto vale la carga de las armaduras?
  - ¿Cuál es la diferencia de potencial  $V_2$  final?
  - ¿Qué trabajo hubo que realizar para separar las armaduras?
- En la posición  $d_2$  se *conectan* las armaduras a una fuente de tensión constante igual a la tensión  $V_2$  final del apartado anterior, y *vuelven a desplazarse* las armaduras a la posición inicial  $d_1$ . ¿Cuál será la carga final del condensador?.

**Campos magnetostáticos**

**13.** Dos láminas muy delgadas y extensas de un material conductor están dispuestas paralelamente, y separadas una distancia  $d$ . Cada una de ellas conduce una densidad de corriente superficial homogénea de módulo  $J_0$ , aunque de sentido contrario en una y otra lámina. Obtenga: a) el campo magnético en las tres zonas del espacio: sobre las láminas, entre ellas y debajo; b) la fuerza que realiza una lámina sobre la otra por unidad de superficie.

**14.** Una bobina de forma cilíndrica tiene radio  $a$  y longitud  $h$ , con  $N$  espiras densamente arrolladas y distribuidas uniformemente. Por ellas circula una corriente  $I$ . Calcule el campo magnético producido en el eje de la bobina mediante la Ley de Biot y Savart.

**15.** Para la misma bobina del problema anterior realice los siguientes cálculos:

- el campo magnético producido en el centro del solenoide;
- el campo magnético en el mismo punto con la suposición de que la longitud de la bobina tiende a infinito (ó  $h \gg a$ ), manteniéndose la densidad de espiras por unidad de longitud;
- la relación  $h/a$  mínima para que el resultado del apartado b) pueda tomarse como solución del problema a) con un error no mayor del 2%.

**16.** Una partícula con carga  $q$ , masa  $m$  y una velocidad inicial  $v_0$  penetra en una zona del espacio en la que existe un campo magnético uniforme, de módulo  $B$ , y dirigido perpendicularmente a la dirección inicial de la partícula. Mediante la expresión de la fuerza de Lorentz y la ley fundamental de la dinámica puede comprobarse que la trayectoria seguida por la partícula será circular. Obtenga el radio y la frecuencia de giro.

**17.** La misma partícula del problema anterior se introduce en el campo magnético con un ángulo  $\alpha$  respecto a la dirección de  $B$ . En este caso la partícula describirá una trayectoria helicoidal.

- Compruebe que la velocidad de la partícula toma la forma:

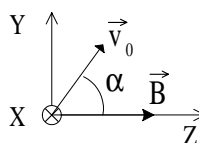
$$v_x(t) = v_0 \sin \alpha \sin \omega t$$

$$v_y(t) = v_0 \sin \alpha \cos \omega t$$

$$v_z(t) = v_0 \cos \alpha$$

- Obtenga el radio de cada vuelta;

- la velocidad lineal y la angular;
- el periodo;
- la distancia entre vueltas.



**18.** Una partícula se introduce en una zona del espacio en la que existe un campo magnético  $B$  y un campo eléctrico  $E$ , ambos uniformes. El campo eléctrico está dirigido en la dirección original de la partícula y el campo magnético es perpendicular.

- Obtenga la nueva trayectoria de la partícula.
- Compruebe que su dirección de desplazamiento neto es perpendicular a ambos campos.
- Compruebe que la velocidad media de la partícula en esa dirección es independiente del tipo de partícula cargada que se considere.

**19.** El efecto Hall se utiliza habitualmente para medir el valor de campo magnético presente en alguna zona del espacio. Este efecto consiste en la aparición de una diferencia de potencial entre dos de las caras de un trozo de material semiconductor cuando es atravesado por una corriente  $I$  en presencia de un campo magnético. De acuerdo con la figura calcule la relación entre la tensión de Hall,  $V_H$ , y el campo magnético  $B$ . (El fundamento físico del efecto Hall es de nuevo la fuerza magnética de Lorentz que experimentan los portadores de carga al moverse en el seno de un campo magnético).

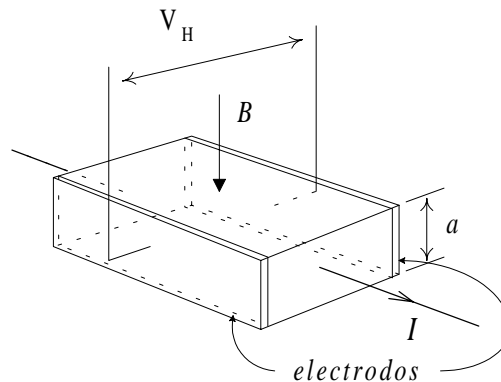


Fig. 5

**20.** La aguja magnetizada de una brújula se comporta como un dipolo magnético: en presencia de un campo magnético externo tenderá a orientarse con él. En ausencia de otros campos tenderá por tanto a mantener la orientación del campo magnético terrestre.

- Situamos la aguja a 1 cm de un hilo conductor largo (Fig. 6.a), orientado en la dirección norte-sur. Hacemos circular una intensidad de corriente de valor  $I$ , y la aguja gira un ángulo de 45 grados. Determinar el valor de la intensidad de corriente. Tómese el módulo del campo magnético terrestre de  $20 \mu\text{Tesla}$ .
- Se busca ahora *el mismo efecto* con una espira de corriente de radio 1 cm y situada a 15 cm de la aguja (Fig. 6.b). Obtenga la corriente que deberá circular por la espira para conseguirlo.

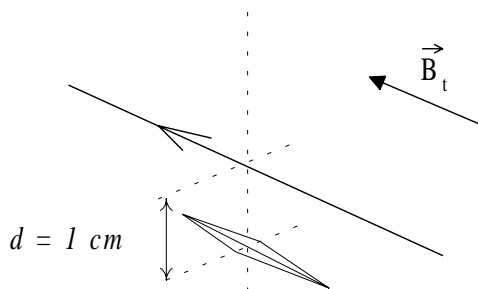


Fig. 6.a

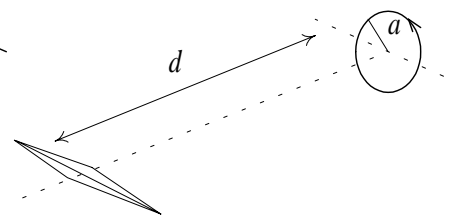


Fig. 6.b



**21.** Un imán en forma de U como el de la figura 7 ejerce una fuerza de atracción que viene dada, de forma aproximada, por la expresión:

$$F = \frac{\phi^2}{\mu_0 S}$$

donde  $\phi$  es el flujo magnético a través de la sección  $S$  del imán. Se ha supuesto que la pieza atraída tiene el mismo valor de permeabilidad magnética que el material de que está formado el imán.

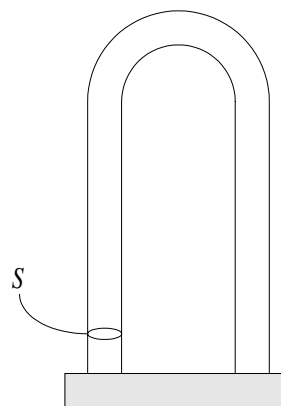


Fig. 7

- a) Trate de comprobar ‘*grosso modo*’ esa expresión mediante el cálculo de la fuerza que el imán ejerce sobre las corrientes superficiales de magnetización inducidas en el objeto.
- b) Considere un núcleo de hierro dulce de la misma forma que el imán anterior, con  $N$  espiras arrolladas en él, y por las que circula una corriente  $I$ . La longitud media total del núcleo más el entrehierro es  $l$ . Calcule el peso máximo que puede levantar el electroimán con los siguientes datos:  $l=20$  cm,  $S=1$  cm<sup>2</sup>,  $N=100$ ,  $I=0,5$  A. Utilícese  $\mu_r=2000$ .

**22.** Un motor sin escobillas (*brushless*) está formado por varios devanados independientes, con diferentes orientaciones, dispuestas en el estátor (la parte fija del motor) alrededor de un rotor formado por el eje y un imán permanente que lo rodea. Las corrientes que alimentan los devanados son variables en el tiempo. El número de devanados depende de la estabilidad que se pretenda en el giro del motor. La posición instantánea del rotor se determina de forma continua mediante células de efecto Hall, que controlan las fases de las corrientes. Trate de dibujar un esquema posible para un motor de este tipo.

**23.** Calcular la autoinductancia por unidad de longitud de un cable coaxial formado por un hilo delgado de radio  $a$  y un conductor exterior concéntrico de radio  $b$ , separados por un medio de permeabilidad magnética  $\mu$ . Suponga que ambos conductores son muy delgados en comparación con la separación  $b-a$ .

**24.** Calcule la inductancia por unidad de longitud de una línea bifilar formada por dos hilos delgados de radio  $a$ , paralelos, con una separación entre sus centros igual a  $d$ . El dieléctrico que mantiene unidos los hilos es no magnético.

## 2 Ecuaciones de Maxwell

En el capítulo anterior se trataron las leyes fundamentales que rigen la electrostática y la magnetostática sin tener en cuenta la dependencia o la variación temporal de los campos, las cargas o las corrientes. Para ello se siguió un método inductivo partiendo de la expresión de las fuerzas de Coulomb para el caso eléctrico, y de las fuerzas entre circuitos de corriente dada por Ampère para el magnético. En este segundo capítulo trataremos la situación más general en que las magnitudes consideradas cambian con el tiempo. Para ello, seguiremos un método deductivo, partiendo de cuatro leyes obtenidas de forma experimental, llamadas *ecuaciones de Maxwell*. Estas leyes relacionan entre sí el campo eléctrico, el magnético y las cargas y corrientes que los crean. Dichas ecuaciones fueron obtenidas de forma empírica por distintos científicos a lo largo del siglo XIX, y fue precisamente James Clerk Maxwell (1831-1879) quien, aparte de introducir un nuevo término en una de ellas, se dio cuenta de que con tan sólo estas cuatro leyes se describe por completo el electromagnetismo.

El capítulo se ha dividido en siete secciones con el objetivo de explicar los cimientos de la teoría electromagnética. Empezaremos presentando las ecuaciones de Maxwell en forma integral para el vacío con el objetivo de obtener una visión de la física que encierran. Sin embargo, estas ecuaciones no son útiles para resolver los problemas habituales en electromagnetismo con lo que, en la segunda sección buscaremos una formulación alternativa más útil: la forma diferencial. En la tercera sección, introduciremos las características de los medios materiales en las ecuaciones y en la sección cuarta las condiciones que deben cumplir los campos en la discontinuidad entre distintos medios. Los aspectos energéticos asociados a los campos electromagnéticos serán tratados en la sección quinta. Llegados a este punto, ya se habrá establecido la teoría necesaria para comprender los temas restantes del libro. Las dos últimas secciones constituyen dos casos particulares de especial interés: la obtención de las ecuaciones para los potenciales en régimen estático, así enlazaremos con el capítulo anterior, y las ecuaciones de Maxwell para variaciones armónicas en el tiempo, con lo que introduciremos el marco en el que se desarrolla el resto del libro.

## 2.1 Ecuaciones de Maxwell en forma integral en el vacío

En esta sección estudiaremos las ecuaciones de Maxwell en forma integral para el vacío. Estas ecuaciones son cuatro y algunas de ellas ya han sido tratadas en el capítulo anterior, sin embargo, como pretendemos que este capítulo sea autoconsistente, volveremos a tratar cada una de ellas, describiendo experimentos que ponen de manifiesto estas leyes. También trataremos otro principio fundamental como es el de conservación de la carga.

### 2.1.1 Ley de Gauss para el campo eléctrico

Supongamos que tomamos una esfera con una carga  $Q$  y la rodeamos con otra esfera conductora hueca, tal como muestra la figura 2.1a. Entonces, en las superficies de la esfera hueca se induce una carga igual a la de la esfera interna, del mismo signo en el exterior y de signo contrario en el interior. Además, la carga inducida no depende de la distancia  $r$  entre esferas. Es decir, que hay algo entre las esferas que se mantiene constante y que además es proporcional a la carga. Este algo precisamente es el “número” de líneas de campo eléctrico. Si queremos calcular el “número” total de líneas, las deberemos integrar (sumar) sobre una superficie que rodee la esfera central, es decir, calcular su flujo. Esta es precisamente la ley de Gauss: *el flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada es proporcional a la carga encerrada por dicha superficie*. Matemáticamente la escribiremos:

$$\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (2.1)$$

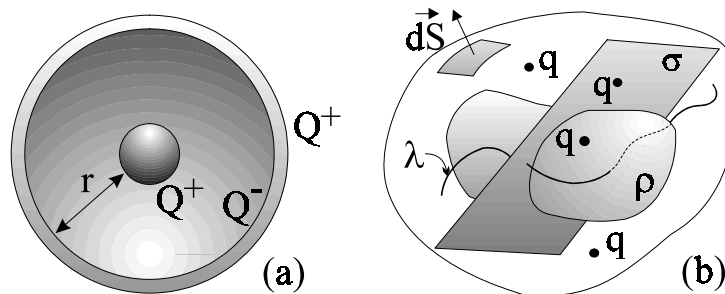


Fig. 2.1 (a) Inducción de cargas sobre superficies conductoras y (b) contribución neta de la carga total sobre la que aplicamos Gauss

¿Qué implica la ley de Gauss? En general, cuando se calcula el flujo sobre una superficie cerrada de cualquier campo vectorial, obtenemos las fuentes de dicho campo, entendiendo como fuentes los puntos donde nacen o mueren las líneas de campo. Aquí,

Gauss está identificando las fuentes del campo eléctrico, es decir las cargas y en definitiva nos está diciendo que en el interior de una superficie nacen o mueren líneas de campo tan sólo si hay cargas. En la sección 1.1.3 hay algunos ejemplos de aplicación de la ley de Gauss.

Consideraciones sobre la ley de Gauss para  $\vec{E}$ :

- a) En  $Q$ , tal como muestra la figura 2.1b, se ha incluido la contribución de la carga neta total, ya sea en forma de densidades o en forma puntual, encerrada por la superficie  $S$ . Por lo tanto, la carga total puede ser escrita como:

$$Q = \int_{V'} \rho(\vec{r}') \cdot dV' + \int_{S'} \sigma(\vec{r}') \cdot dS' + \int_{C'} \lambda(\vec{r}') \cdot dl' + \sum_i q_i$$

Con la prima ( $\vec{r}', V', \dots$ ) indicamos que integramos sobre las cargas, que además deben estar incluidas dentro de la superficie  $S$  elegida. Para un recordatorio sobre las densidades de carga consúltese la sección 1.1.2

- b)  $\epsilon_0$  es una constante de proporcionalidad llamada permitividad del vacío de valor  $\epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ .
- c) El vector  $d\vec{S}$  es perpendicular a la superficie y, por convenio, *en el caso de superficies cerradas, siempre señala hacia afuera del volumen* (Fig. 2.1b)
- d) La ecuación de Gauss es aplicable tanto a campos estáticos como variables en el tiempo. En consecuencia, nos está diciendo que la dependencia temporal del campo eléctrico será del mismo tipo que la de las cargas que lo crean.

### 2.1.2 Ley de Gauss para el campo magnético

Al igual que el campo eléctrico, ahora nos preguntaremos cuál es el flujo del campo magnético. Pues bien, *el flujo sobre una superficie cerrada del campo magnético siempre debe ser nulo*:

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.2)$$

Naturalmente, que el flujo sea nulo no implica que  $\vec{B}$  también lo sea. ¿Qué es lo que ocurre? Como hemos dicho anteriormente, si el flujo de un campo da sus fuentes, aquí Gauss implica que no hay fuentes de campo magnético, es decir, no tenemos “cargas” magnéticas o, como también se les conoce, monopolos magnéticos. En consecuencia, al no haber fuentes, las líneas de campo no nacen ni mueren en un punto, con lo que a la fuerza deben ser líneas

de campo cerradas. Entonces, si consideramos una superficie cerrada, o bien las líneas de campo están completamente rodeadas por la superficie, o bien entran en un punto y salen por otro punto diferente, con lo que su flujo será nulo.

**Ejemplo 2.1:** *Flujo a través de una superficie cerrada del campo eléctrico creado por un dipolo y del campo magnético creado por una espira.*

En la figura 2.2 se han representado las dos configuraciones propuestas y las líneas de campo que crean. En este ejemplo vemos que si calculamos el flujo a través de la superficie de color gris claro el resultado es nulo en ambos casos (entran tantas líneas como salen). A partir de aquí, se podría pensar que los dos campos son campos magnéticos, ya que se cumple la segunda ecuación de Maxwell. Sin embargo, en el primer caso el cálculo del flujo depende de la superficie tomada. Como ejemplo tomaremos la superficie gris oscuro. En el dipolo todas las líneas de campo salen de la superficie y el flujo no es nulo (toma el valor correspondiente a la carga que encierra). En cambio, para el campo magnético esto no ocurre: tomemos la superficie que tomemos las líneas de campo siempre entran en la superficie por un punto y salen por otro distinto, atravesando la región encerrada. Como conclusión, no podemos asegurar si un campo determinado es un campo magnético si no somos capaces de demostrar que su flujo es nulo para cualquier superficie.

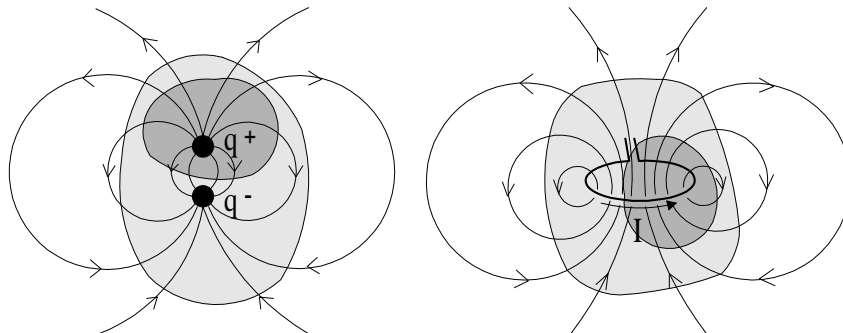


Fig. 2.2 Campos creados por un dipolo eléctrico (izquierda) y por una espira o dipolo magnético (derecha)

### 2.1.3 Ley de Faraday

Las dos leyes anteriores dan cuenta de la presencia de fuentes de campo del tipo surtidor (cargas positivas) o sumidero (cargas negativas) o la no existencia de éstas (campo magnético). Sin embargo, el campo puede ser creado por otras causas. Las ecuaciones de

Faraday, que tratamos a continuación, y la ecuación de Ampère-Maxwell tratan esta situación.

Supongamos que tenemos un circuito que rodea un imán, el cual crea un campo al que llamamos inducción magnética ( $\vec{B}$ ), además, en los extremos del circuito conectamos un voltímetro tal como muestra la figura 2.3a. En este experimento observaremos que si el imán permanece en reposo el voltímetro no detecta una diferencia de potencial entre los bornes del circuito. En cambio, si el imán se mueve, el voltímetro detecta una diferencia de potencial, es decir aparece una fuerza electromotriz (*f.e.m.*). La expresión matemática de la *f.e.m.* es:

$$f.e.m. = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

con lo cual aparece un campo eléctrico. ¿Qué es lo que produce la *f.e.m.*? Evidentemente no es tan sólo la existencia del campo magnético creado por el imán, ya que en este caso, aun con el imán en reposo tendríamos *f.e.m.* El efecto tiene que estar relacionado con la variación de  $\vec{B}$  en la región cercana al circuito. Por otro lado, se puede ver que cambiando las dimensiones del circuito, el valor de la *f.e.m.* es distinto al anterior. Al cambiar la geometría del circuito, lo que estamos haciendo es cambiar el “número” de líneas de campo que lo atraviesa, es decir, el flujo. Así obtenemos la ley de Faraday que nos dice que *la variación del flujo de campo magnético con el tiempo crea campos eléctricos*, y por lo tanto induce una *f.e.m.* en el circuito considerado. En forma matemática se escribe:

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{s} \quad (2.3)$$

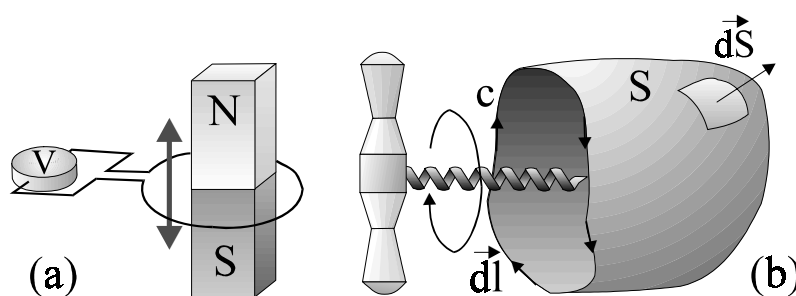


Fig. 2.3 (a) Manifestación de la ley de Faraday y (b) relación entre el sentido de cálculo de la circulación y diferencial de superficie o regla del sacacorchos

Consideraciones sobre la ley de Faraday:

- Tal como muestra la figura 2.3b, la dirección de  $d\vec{l}$  y  $d\vec{S}$  están relacionadas por la regla del sacacorchos: si giramos el sacacorchos en el sentido de  $d\vec{l}$ , su sentido de avance indicará el sentido de  $d\vec{S}$ .
- La superficie  $S$  es cualquier superficie abierta con la única condición de que su contorno sea  $C$ .
- El significado del signo negativo en el término de la derecha indica que la corriente inducida en el circuito a su vez crea un campo magnético que *se opone a la variación del flujo*, es decir, al cambio de estado (ley de Lenz). Así pues, el campo magnético creado por la corriente inducida irá en la misma dirección que  $\vec{B}$  si éste disminuye (derivada temporal negativa) y en la dirección contraria al campo si  $\vec{B}$  aumenta (derivada temporal positiva).
- La derivada temporal en ocasiones aparece dentro de la integral de flujo. El hecho de introducirla dentro significa que no consideramos las variaciones temporales del circuito de integración. En algunos ejemplos que analizamos consideramos que dicho circuito varía con el tiempo, con lo que estamos utilizando exactamente la expresión (2.3).

**Ejemplo 2.2:** Considérese un circuito rectangular como el mostrado en la figura 2.4a situado perpendicularmente a un campo magnético variable en el tiempo de la forma  $\vec{B} = B_0 \cos \omega t \hat{z}$ . Determinar la fuerza electromotriz inducida en la espira conductora.

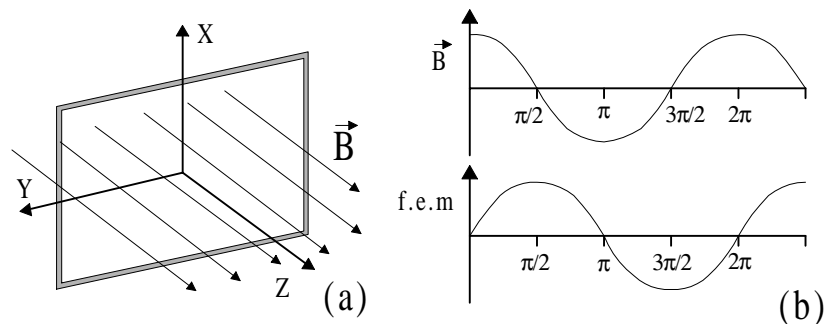


Fig. 2.4 Inducción de fuerza electromotriz sobre una espira

Primero tenemos que determinar el sentido de cálculo de la circulación del campo eléctrico. Tomaremos dicho sentido contrario a las agujas del reloj para así

tener el diferencial de superficie en la dirección del campo magnético (regla del sacacorchos, Fig. 2.3b). Así pues, tal y como hemos determinado los ejes de coordenadas, tenemos:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= B_0 \cos \omega t \hat{z} \\ d\vec{S} &= dx dy \hat{z}\end{aligned}$$

Entonces el flujo de campo magnético será:

$$\int_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_0^b \int_0^a B_0 \cos \omega t \cdot dx dy = B_0 ab \cos \omega t$$

y a partir de la ecuación de Faraday encontramos la fuerza electromotriz derivando el flujo:

$$f.e.m. = \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = ab B_0 \omega \sin \omega t \quad V$$

Este ejemplo muestra claramente la ley de Lenz. Cuando el campo magnético externo decrece (pendiente negativa del campo en la Fig. 2.4b), la fuerza electromotriz es positiva, es decir, la intensidad de corriente va en el sentido de integración que hemos tomado (figura 2.4b). El resultado, como se verá en la ley de Ampère, es que esta corriente crea un campo magnético que se suma al ya existente: se opone al descenso del campo externo. En cambio, cuando el campo magnético externo aumenta (pendiente positiva), la intensidad cambia de sentido (*f.e.m.* negativa) y crea un campo magnético contrario al campo externo: se opone al aumento del campo externo.

**Ejemplo 2.3:** *Fuerza electromotriz inducida en una espira que gira en un campo magnético constante.*

La figura 2.5 muestra un esquema de la situación planteada. Aquí la variación de flujo no es debida a la variación temporal del campo. El flujo cambiará debido a que la superficie de cálculo varía de dirección al girar la espira. El diferencial de superficie viene definido por  $d\vec{S} = dl dz \hat{n}$  donde  $dl$  es paralelo al lado horizontal de la espira,  $dz$  al vertical y el vector unitario  $\hat{n}$  es perpendicular a la superficie. La dependencia temporal de  $\hat{n}$  vendrá dada por la proyección en cada instante de tiempo sobre la base vectorial asociada a los ejes de coordenadas como:

$$\hat{n} = \cos \omega t \hat{x} + \sin \omega t \hat{y}$$



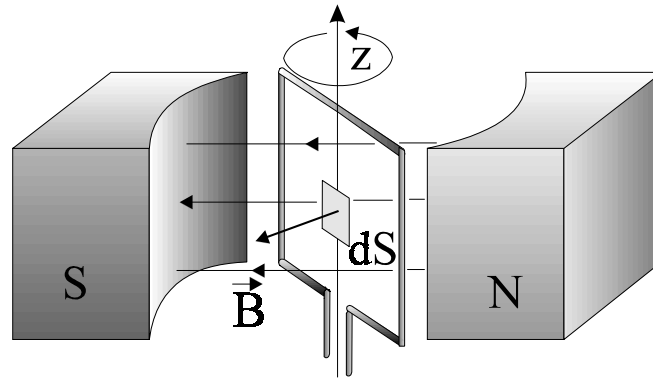


Fig. 2.5 Generador de corriente alterna

Ya estamos en disposición de calcular el flujo de campo magnético

$$\int_0^b \int_0^a B_0 \hat{x} \cdot (\cos \omega t \hat{x} + \sin \omega t \hat{y}) dl dz = ab B_0 \cos \omega t$$

Si derivamos con respecto del tiempo obtenemos la fuerza electromotriz:

$$f.e.m. = ab B_0 \omega \sin \omega t \quad V$$

El principio utilizado en este ejemplo para producir una fuerza electromotriz constituye la base de los generadores de corriente alterna.

#### 2.1.4 Ley de Ampère-Maxwell

Supongamos el montaje experimental de la figura 2.6a consistente en un hilo conductor y un imán próximo a éste. Si por el conductor no pasa corriente, no se observa ningún efecto sobre el imán. En cambio, si por el conductor pasa corriente, el imán experimentará una fuerza (se moverá). Al ser el imán un material eléctricamente neutro, la fuerza sólo puede ser de origen magnético. La ley de Ampère justifica este hecho, al afirmar que *las corrientes crean campos magnéticos*, de acuerdo con:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \int_s \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (2.4)$$

es decir, la circulación del campo magnético sobre un circuito cerrado es proporcional a la intensidad de corriente que atraviesa cualquier superficie que tenga por contorno el circuito.

Consideraciones sobre la ecuación de Ampère:

- Nuevamente, la relación entre  $d\vec{l}$  y  $d\vec{S}$  viene dada por la regla del sacacorchos (Fig. 2.4b)
- La superficie  $S$  es cualquier superficie abierta con la única condición de que su contorno sea  $C$ .
- $\mu_o$  es una constante de proporcionalidad llamada permeabilidad magnética del vacío de valor  $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H / m}$
- Aunque en el término de la derecha hemos considerado una densidad de corriente volúmica, consideraremos incluidas todas las contribuciones de corrientes que atraviesen dicha superficie, es decir, intensidades y densidades superficiales (ver la sección 1.3.2), con lo cual el término de la derecha podría escribirse en función de una intensidad total  $I$  como:

$$\mu_o I = \mu_o \left( \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \int_l \vec{J}_s \cdot \hat{\tau} dl + \sum_k I_k \right)$$

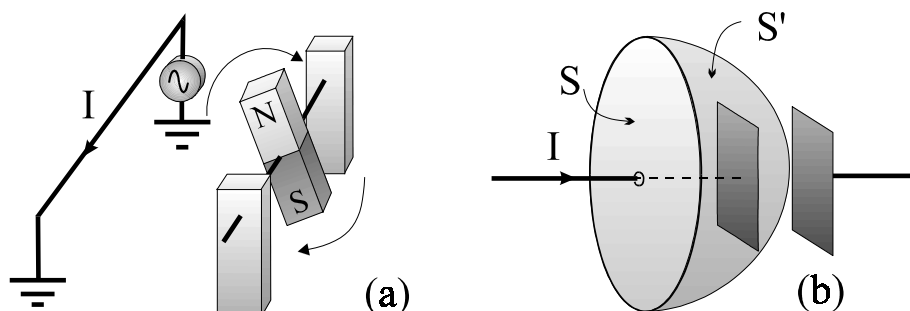


Fig. 2.6 (a) Manifestación del campo magnético creado por una corriente y (b) caso práctico en que la ecuación de Ampère no se cumple al cambiar de superficie

Ahora bien, ¿la ecuación de Ampère es una ley universal? Para responder esta pregunta aplicaremos Ampère en el ejemplo de la figura 2.6b, donde se considera un hilo conductor que llega a las placas de un condensador durante el proceso de carga. Si nos situamos sobre el conductor y elegimos un circuito  $C$  y una superficie de cálculo  $S$ , la superficie está atravesada por una intensidad y como hemos comentado se cumple:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o I$$

En cambio, si tomamos la superficie de cálculo  $S'$  que pasa por el condensador, vemos que ésta no está atravesada por ninguna corriente, luego:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$

Con lo cual, al obtener resultados distintos, no se cumple la ecuación de Ampère.

La solución a esta incongruencia fue dada por Maxwell al darse cuenta de que a la ecuación de Ampère le falta un término. Dicho término debía estar relacionado con la concentración de carga en las placas del condensador y su desplazamiento de un lado al otro del condensador (de la teoría de circuitos sabemos que para que pase corriente por un circuito con condensadores, dicha corriente debe variar con el tiempo, y por lo tanto también las cargas en las placas del condensador). A este nuevo término se le llamó corriente de desplazamiento. Añadiendo el nuevo término, la ahora ley de Ampère-Maxwell viene dada por:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \left( I + \epsilon_o \int_s \frac{\partial E}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right) \quad (2.5)$$

Consideraciones sobre el término de Maxwell:

- a) El nombre de corriente de desplazamiento es una designación histórica. Este término en general no está relacionado con ninguna corriente, aunque en el ejemplo considerado sí lo está.
- b) La introducción de este término fue propuesta por Maxwell tras una deducción teórica a partir del principio de conservación de la carga que trataremos en la siguiente sección, donde se comenta el proceso seguido por el científico.
- c) El término de Maxwell tiene una gran importancia dentro del electromagnetismo ya que predice la existencia de ondas electromagnéticas. Si nos fijamos en las ecuaciones de Faraday y de Ampère-Maxwell vemos que los campos variables en el tiempo, una vez creados por las corrientes y las cargas, pueden sustentarse el uno al otro. Es decir, un campo magnético variable en el tiempo, según Faraday, crea un campo eléctrico, que a su vez también variará en el tiempo y, según Maxwell, éste crea un campo magnético, con lo cual el ciclo generador queda cerrado. De esta manera, los campos pueden subsistir sin la necesidad de cargas ni corrientes, y por lo tanto, pueden propagarse. Este es el principio de la propagación de ondas electromagnéticas, predicho teóricamente por Maxwell y más tarde demostrado experimentalmente por Hertz.

**Ejemplo 2.4** Tenemos un condensador plano compuesto de dos discos. Considerando los efectos de bordes, el campo eléctrico en su interior puede ser aproximado por:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \left[ 1 - \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \right] \sin \omega t \hat{z} \quad \rho < \rho_0$$

donde  $\rho_0$  es el radio efectivo de los discos. Encontrar el campo magnético entre las placas del condensador.

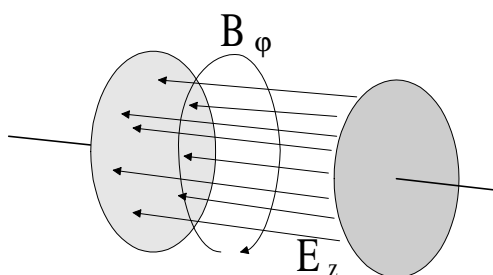


Fig. 2.7 Líneas de campo eléctrico y magnético entre las placas de un condensador

Para resolver este problema utilizaremos la ley de Ampère-Maxwell. La figura 2.7 muestra un esquema del condensador y los campos. Por cuestiones de simetría, supondremos que el campo magnético sólo puede tener componentes en la dirección de la coordenada  $\varphi$ . Para encontrar el módulo, calculamos la variación temporal del campo eléctrico

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \omega \left[ 1 - \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \right] \cos \omega t \hat{z}$$

Y a partir de aquí tendremos que calcular el flujo. Para ello realizaremos la integral en la zona en que la expresión del campo tiene validez tomando como contorno una circunferencia de radio  $\rho$

$$\begin{aligned} \mu_0 \varepsilon_0 \int_S \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}(\vec{r}, t) \cdot d\vec{S} &= \mu_0 \varepsilon_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\rho E_0 \omega \left[ 1 - \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \right] \cos \omega t \hat{z} \cdot \rho d\rho d\varphi \hat{z} = \\ &= \mu_0 \varepsilon_0 2\pi \omega E_0 \left[ \frac{\rho^2}{2} - \left( \frac{\rho^4}{4\rho_0^2} \right) \right] \cos \omega t \end{aligned}$$

Este resultado, según Maxwell debe ser igual a la circulación del campo magnético en el contorno de la superficie de integración. Por simetría, el campo magnético en el contorno es constante con lo que la circulación queda:

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} B \hat{\phi} \cdot \rho d\phi \hat{\phi} = 2\pi \rho B$$

donde se ha tomado el sentido de integración siguiendo la regla del sacacorchos. Comparando los dos resultados podemos aislar y encontrar el campo magnético en el volumen interior del condensador como

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \mu_0 \epsilon_0 \omega E_0 \left[ \frac{\rho}{2} - \left( \frac{\rho^3}{4\rho_0^2} \right) \right] \cos \omega t \hat{\phi}$$

### 2.1.5 Principio de conservación de la carga.

Como se ha comentado, las ecuaciones de Maxwell describen todo el electromagnetismo; sin embargo, existe un principio fundamental anterior a la deducción de las ecuaciones de Maxwell: el principio de conservación de la carga. Este principio dice que *la carga total no se crea ni se destruye y si hay variaciones en una región determinada del espacio es porque la carga abandona dicha región* (hay corrientes). Este principio viene descrito por la llamada *ecuación de continuidad* que, en forma integral se expresa como:

$$-\frac{d}{dt} Q = \oint_s \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (2.6)$$

Es decir, la variación de carga en el interior de una superficie cerrada es igual a la intensidad de corriente que atraviesa esta superficie (flujo). Este principio está implícito en las ecuaciones de Ampère-Maxwell y de Gauss para el campo eléctrico. Vamos a deducir la ecuación de continuidad, aunque este cálculo tan sólo tiene interés para aquellos estudiantes inquietos que quieran profundizar en el electromagnetismo. En su deducción tenemos que aplicar Ampère-Maxwell para dos superficies distintas  $S_1$  y  $S_2$  pero con el mismo contorno  $C$  (ver Fig. 2.8), es decir:

$$\begin{aligned} \oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 \int_{S_1} \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \\ &= \mu_0 \int_{S_2} \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \end{aligned} \quad (2.7)$$

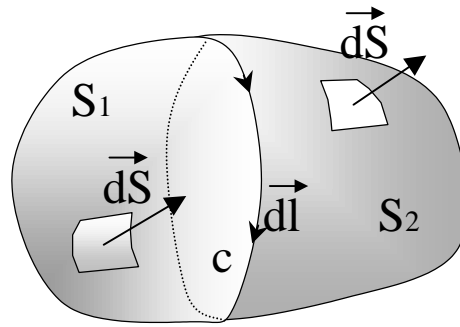


Fig. 2.9 Superficies necesarias en la deducción de la ecuación de continuidad

Es evidente que los dos miembros de la derecha deben de ser iguales (recordemos que no dependen de la superficie) y que los diferenciales de superficie en ambos casos siguen la regla del sacacorchos. En la Fig. 2.8 se observa que ambas superficies encierran un volumen; así, podemos transformar las integrales para una superficie abierta en una integral para una superficie cerrada. Para ello, los diferenciales de superficie deben apuntar hacia fuera con lo que simplemente debemos cambiando el sentido de  $d\vec{S}$  para la superficie  $S_2$  y sumar ambas integrales. El resultado es:

$$\oint_s \left( \vec{J} + \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = \int_{S1} \left( \vec{J} + \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} - \int_{S2} \left( \vec{J} + \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

donde el signo negativo de la integral para  $S_2$  viene de invertir la dirección de  $d\vec{S}$ . Sin embargo, de (2.7) sabemos que los dos miembros de la derecha son iguales, con lo que se cumple

$$\oint_s \left( \vec{J} + \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} = 0 \quad (2.8)$$

Separando este resultado en dos integrales tenemos:

$$\oint_s \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \oint_s \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_o \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \frac{\partial}{\partial t} Q \quad (2.9)$$

donde, al aplicar Gauss en la última igualdad, se ha encontrado la ecuación de continuidad.

En esta sección hemos partido de las ecuaciones de Gauss y Ampère-Maxwell para deducir la ecuación de continuidad. El proceso que siguió Maxwell para deducir el término de corriente de desplazamiento fue justamente el contrario al mostrado aquí: a partir de Gauss y la ecuación de continuidad completó la ecuación de Ampère. Además, utilizó la forma diferencial de las ecuaciones de continuidad y de Gauss en la deducción.

### 2.1.7 Ecuaciones fundamentales del electromagnetismo

Como resumen de la sección, las ecuaciones de Maxwell en el vacío donde se ha considerando todas las cargas y corrientes presentes en la región de cálculo son:

$$\begin{aligned}\oint_s \vec{E} \cdot d\vec{S} &= \frac{Q}{\epsilon_0} && \text{Ley de Gauss para } \vec{E} \\ \oint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} &= 0 && \text{Ley de Gauss para } \vec{B} \\ \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} &= -\frac{\partial}{\partial t} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S} && \text{Ley de Faraday} \\ \oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 \left( I + \epsilon_0 \int_s \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \right) && \text{Ley de Ampère-Maxwell}\end{aligned}$$

Se debería añadir la ecuación de continuidad, aunque ésta ya esté incluida en las ecuaciones de Maxwell:

$$-\frac{d}{dt} Q = \oint_s \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Durante toda la sección hemos hablado de los campos, sus propiedades y relaciones; sin embargo, en ningún momento hemos hablado del efecto que producen los campos sobre las cargas. Este efecto no está incluido en las ecuaciones de Maxwell y viene determinado por la expresión de la fuerza de Lorentz:

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{E}(\vec{r}, t) + \vec{v} \times \vec{B}(\vec{r}, t)) \quad (2.10)$$

donde  $\vec{v}$  es la velocidad de la carga y el signo “ $\times$ ” indica producto vectorial.

## 2.2 Ecuaciones de Maxwell en forma diferencial

En la sección anterior hemos tratado las ecuaciones de Maxwell en forma integral. Esta representación de las ecuaciones de Maxwell es útil para obtener una interpretación de

la física que encierran los fenómenos electromagnéticos. Sin embargo, estas ecuaciones sólo pueden ser utilizadas en problemas muy concretos en que la geometría del sistema presenta simetrías que facilitan la integración. Si nos fijamos en los problemas de la sección 2.1, los hemos podido resolver porque presentaban una geometría sencilla y era fácil resolver las integrales que aparecían. Así pues, se hace necesario obtener otras relaciones más potentes y más fácilmente aplicables para cualquier caso, es decir, que no dependan de la geometría. Pero atención, estas relaciones deben conservar la misma información que presentan las ecuaciones ya vistas, el problema sigue siendo el mismo: describir el electromagnetismo. La solución consiste en derivar a partir de la forma integral unas relaciones entre los campos y sus fuentes *para cada punto del espacio*. Como resultado obtenemos las ecuaciones en función de los operadores divergencia y rotacional. Estos son operadores diferenciales siendo ésta la razón por la que las nuevas ecuaciones reciben el nombre de ecuaciones de Maxwell en forma diferencial. Por supuesto, la nueva formulación conserva la misma física que su forma integral, ya que las hemos derivado a partir de éstas, y como *sólo dependen de cada punto del espacio* son independientes de la geometría y, por lo tanto, mucho más útiles. En esta sección vamos a recordar los operadores diferenciales que nos aparecen, insistiendo en su significado físico, para después derivar las ecuaciones en forma diferencial. Para ello utilizaremos el teorema de la divergencia y de Stokes.

### 2.2.1 Significado de divergencia y rotacional

El teorema de la divergencia es un teorema matemático que se cumple para cualquier campo vectorial. Este teorema relaciona el flujo de un campo sobre una superficie cerrada con la integral sobre el volumen encerrado por la superficie de una magnitud llamada divergencia. Es decir:

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div } \vec{A} \cdot dv \quad (2.11)$$

donde  $\vec{A}$  es cualquier campo vectorial. Para interpretar el teorema y el significado de divergencia, la podemos aislar como:

$$\text{div } \vec{A} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta V} \quad (2.12)$$

Este resultado muestra que la divergencia es el flujo que atraviesa una superficie cerrada, pero que además, al estar dividido por  $\Delta V$ , es una densidad de flujo. Pero, ¿qué significado tiene la divergencia? Para contestar esta pregunta debemos partir del concepto de densidad de flujo (Ec. 2.12) y recordar que el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada nos da las fuentes en su interior. De (2.12) se ve que la divergencia se calcula sobre una superficie cada vez más pequeña (hacemos el límite), de manera que al final obtenemos el flujo que surge de un único punto, por lo tanto, la divergencia nos dice *si en un punto*



determinado hay una fuente del campo, o dicho de otra manera, si en este punto nacen o mueren líneas de campo.

La divergencia es un operador diferencial, y para encontrar su expresión en un sistema de coordenadas determinado debemos partir de la ecuación (2.12). De esta manera podemos encontrar la divergencia para coordenadas cartesianas como:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint_{\Delta S} \vec{A} \cdot d\vec{S}}{\Delta V} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Normalmente, al igual que la definición del gradiente de un campo escalar, la divergencia se escribe en función del operador  $\vec{\nabla}$  (nabla) utilizado en análisis vectorial. Este operador en coordenadas cartesianas viene definido por

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z}$$

con lo que la divergencia puede definirse a partir del producto escalar entre el operador  $\vec{\nabla}$  y el campo vectorial, es decir:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} &= \left( \frac{\partial}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{z} \right) \cdot (A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}) = \\ &= \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \end{aligned}$$

A partir de este momento, para referirnos a la divergencia de un campo utilizaremos la notación  $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$  en vez de  $\operatorname{div} \vec{A}$ .

En ocasiones es conveniente utilizar otro tipo de coordenadas que en general serán curvilíneas, como es el caso de las coordenadas cilíndricas o esféricas. La expresión de la divergencia en esos sistemas de coordenadas puede consultarse en el anexo B.

**Ejemplo 2.5:** Dado el campo vectorial expresado en coordenadas esféricas

$$\vec{A} = \frac{k}{r^n} \hat{r}$$

comprobar el teorema de la divergencia considerando el volumen entre dos esferas concéntricas de radios  $R_1$  y  $R_2$ .

Primero calcularemos el flujo a través de las superficies  $\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$  con lo que necesitamos conocer la expresión del diferencial de superficie, que será:

$$d\vec{S} = r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \cdot \hat{n}$$

donde  $\hat{n}$  debe ser un vector unitario que señala hacia el exterior del volumen. Como muestra la figura 2.9, la dirección de  $\hat{n}$  depende de la superficie tomada

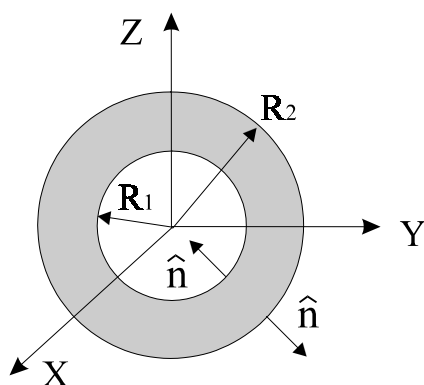


Fig. 2.9

$$R_1 \rightarrow \hat{n} = -\hat{r}$$

$$R_2 \rightarrow \hat{n} = \hat{r}$$

A continuación integramos para cada una de las superficies

$$\begin{aligned} \int_{S_{R1}} \vec{A} \cdot d\vec{S} &= \\ \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{k}{R_1^n} R_1^2 \hat{r} \cdot (-\hat{r}) \sin \theta \, d\theta \, d\varphi &= \\ -4\pi \frac{k}{R_1^{n-2}} \end{aligned}$$

$$\int_{S_{R2}} \vec{A} \cdot d\vec{S} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{k}{R_2^n} R_2^2 \hat{r} \cdot \hat{r} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = 4\pi \frac{k}{R_2^{n-2}}$$

con lo cual el flujo queda:

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = 4\pi k \left[ \frac{1}{R_2^{n-2}} - \frac{1}{R_1^{n-2}} \right]$$

Para comprobar el teorema de la divergencia falta obtener la integral de volumen de la divergencia. Así pues, la divergencia en coordenadas esféricas es:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \cdot \frac{k}{r^n} \right) = \frac{1}{r^2} (2-n) \frac{k}{r^{n-1}} = (2-n) \frac{k}{r^{n+1}}$$

e integrando

$$\begin{aligned}\int_v \nabla \cdot \vec{A} dV &= \int_{R_1}^{R_2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (2-n) \frac{k}{r^{n+1}} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = 4\pi(2-n)k \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r^{n-1}} = \\ &= 4\pi k \left[ \frac{1}{R_2^{n-2}} - \frac{1}{R_1^{n-2}} \right]\end{aligned}$$

obtenemos el mismo resultado que en el caso anterior, con lo que se satisface el teorema.

La expresión del campo utilizada en el ejemplo corresponde a campos centrales. En concreto, cuando  $n=2$ , corresponde a una carga puntual en el origen, y como resultado el flujo total sería nulo, ya que en el volumen entre las dos esferas no hay carga. El campo para  $n>2$  corresponde a un modelo simplificado del campo creado por un átomo, en que el campo creado por el núcleo (carga central positiva) es paulatinamente apantallado por la nube electrónica (carga negativa) que lo rodea.

El otro operador que aparece en la forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell es el rotacional y, para conocer su significado, debemos utilizar el teorema de Stokes. El teorema de Stokes se cumple para cualquier campo vectorial y nos relaciona la circulación a lo largo de un circuito cerrado con un flujo a través de cualquier superficie abierta que tenga como contorno dicho circuito. En concreto, la circulación del campo vectorial con el flujo de su rotacional. Matemáticamente se escribe:

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S} \quad (2.13)$$

donde el sentido de giro de la circulación y el del diferencial de superficie están relacionados por la regla del sacacorchos. Para obtener el significado del rotacional, lo expresaremos en función de la circulación. Entonces el rotacional en la dirección perpendicular a la superficie  $\Delta S$  viene dado por:

$$\text{rot} \vec{A} \big|_{\hat{n}} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l}}{\Delta S} \quad (2.14)$$

Aquí nos encontramos con una densidad de circulación (está dividido por  $\Delta S$ ). Al hacer el límite, el resultado será la densidad superficial de circulación alrededor de un punto, o lo que es lo mismo, la cantidad de campo que gira a su alrededor. Un ejemplo del significado de rotacional lo tenemos en dinámica de fluidos. Si consideramos un fluido en un canal, la velocidad en el centro del canal será máxima, mientras que si nos acercamos a las paredes disminuirá debido al rozamiento y la viscosidad del fluido (los vectores de velocidad son más pequeños en la figura 2.10a). Para ver que efecto tiene esta no uniformidad del

campo, introduciremos una pequeña rueda con aspas en el canal y la colocaremos en distintas posiciones. Si la colocamos en el centro, la rueda no girará ya que la velocidad a ambos lados de la rueda es la misma y el momento de las fuerzas resultante es nulo. En cambio, en cualquier otro punto excepto en el centro, la velocidad en un lado de la rueda será mayor que en el otro, con lo cual el momento de las fuerzas no es nulo y la rueda girará. Entonces diremos que el campo de velocidades tiene un rotacional no nulo fuera del centro, cuyo valor dependerá de lo rápido que gire la rueda. El ejemplo también ilustra cuál es la causa de la existencia del rotacional: la no uniformidad del campo en alguna de las direcciones transversales a éste. Si el campo tuviera un valor constante o tan sólo variable en la dirección del vector, no habría desigualdad entre las fuerzas a ambos lados de la rueda y ésta no giraría. Así pues, *el rotacional nos detecta la no uniformidad del campo*.

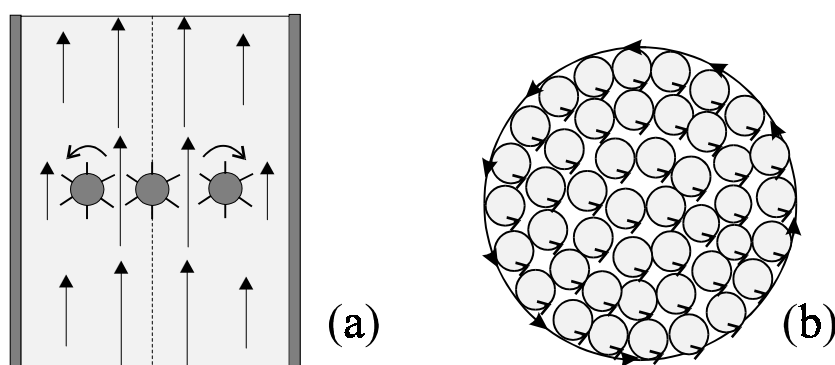


Figura 2.10 (a) Significado de rotación en dinámica de fluidos y (b) resultado de sumar el rotacional

Volvamos al concepto de densidad superficial de circulación. En la figura 2.10b vemos de forma esquemática cómo la suma de pequeñas circulaciones da la circulación en el contorno, ya que en el interior, la circulación alrededor de dos puntos consecutivos se contrarresta en la zona de contacto. Esto es precisamente lo que nos dice el teorema de Stokes: si integramos ésta sobre la superficie, el resultado final es la circulación en el contorno.

Nuevamente si queremos encontrar una expresión para el rotacional debemos partir de la ecuación (2.14). Entonces el rotacional es:

$$\text{rot } \vec{A} = \left( \frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) \hat{x} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

En coordenadas cartesianas, este resultado del rotacional se puede escribir como el producto vectorial del operador nabla por el campo

$$\text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

ecuación en la que aparece la nomenclatura que utilizaremos para definir el operador rotacional :  $\nabla \times \vec{A}$ .

Cuando calculamos el rotacional en otras coordenadas, el resultado no es directamente el producto vectorial entre el operador nabla y el vector, sino que nuevamente aparecen los coeficientes métricos que multiplicaban las coordenadas angulares. El rotacional en coordenadas cilíndricas es:

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\phi & A_z \end{vmatrix}$$

y para coordenadas esféricas

$$\nabla \times \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r \hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ A_r & r A_\theta & r \sin \theta A_\phi \end{vmatrix}$$

La forma desarrollada de ambas expresiones se muestra en el anexo B.

**Ejemplo 2.6:** Dado el campo vectorial  $\vec{A} = xyz \hat{x} + x^2 y \hat{y}$  comprobar el teorema de Stokes para un camino cerrado sobre el plano  $z=1$ , dada por la curva  $y = 1 - x^2$  y la intersección con  $y=0$ .

Empezaremos calculando la circulación de nuestro campo, que dividiremos en dos partes: integral sobre  $y=0$  y sobre  $y = 1 - x^2$

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{l} = \int_{y=0} \vec{A} \cdot d\vec{l} + \int_{y=1-x^2} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

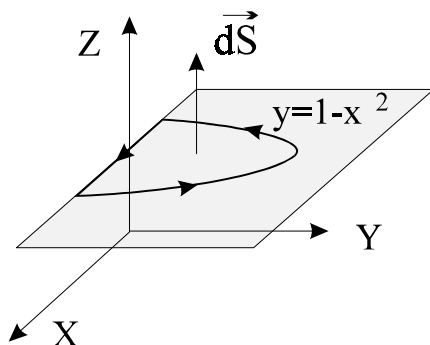


Fig. 2.11

En la primera integral, el campo es nulo cuando  $y=0$ , con lo que el resultado será nulo. Para resolver la segunda integral necesitamos encontrar el diferencial de longitud. En coordenadas cartesianas el diferencial de longitud viene dado por:

$$d\vec{l} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$$

Como estamos en el plano  $z=1$  no hay variación en  $z$  con lo que  $dz=0$ . A continuación pondremos  $dy$  en función de  $dx$  sacando diferenciales a la ecuación de la curva

$$dy = d(1 - x^2) = -2x dx$$

con lo que el diferencial de longitud queda  $d\vec{l} = (\hat{x} - 2x \hat{y}) dx$ . Si introducimos el diferencial en la segunda integral obtenemos

$$\int_{y=1-x^2} (xyz \hat{x} + x^2 y \hat{y})(\hat{x} - 2x \hat{y}) dx = \int_1^{-1} (x(1-x^2) \hat{x} + x^2(1-x^2) \hat{y})(\hat{x} - 2x \hat{y}) dx$$

donde en la expresión del campo se ha escrito la coordenada  $y$  en función de  $x$  y la coordenada  $z$  se ha sustituido por 1. Haciendo el producto escalar la integral resultante es

$$\int_1^{-1} (x - 3x^3 + 2x^5) dx = 0$$

Con este resultado ya hemos encontrado la circulación. Para comprobar el teorema de Stokes debemos encontrar el flujo del rotacional, que viene dado por:

$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xyz & x^2 y & 0 \end{vmatrix} = xy \hat{y} + (2xy - xz) \hat{z}$$

El diferencial de superficie será  $d\vec{S} = dx dy \hat{z}$ , donde el sentido se ha tomado según la regla del sacacorchos. Si calculamos el flujo

$$\int_{-1}^1 \int_0^{y=1-x^2} (xy \hat{y} + (2xy - xz) \hat{z}) \cdot \hat{z} dy dx = \int_{-1}^1 \int_0^{y=1-x^2} (2xy - xz) dy dx = 0$$

obtenemos el mismo resultado que para la circulación, con lo que hemos comprobado el teorema.

En este ejemplo se ha calculado la circulación para un camino cerrado de un campo y ha dado un resultado no nulo. Como se vio en estática, cuando esto ocurre diremos que el campo no es conservativo. Desde otro punto de vista, de Stokes vemos que si el rotacional de un campo es nulo, automáticamente la circulación será nula para cualquier camino cerrado, con lo cual el campo es conservativo. Esta es la razón por la que a un campo conservativo también se le llama irrotacional.

### 2.2.3 Forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell

En los dos apartados anteriores hemos introducido los teoremas de la divergencia y Stokes. A continuación obtendremos la forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell utilizando estos dos teoremas.

La ecuación de Gauss para el campo eléctrico la podemos escribir en función de la densidad de carga volúmica como:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

De esta ecuación vemos que Gauss nos está relacionando un flujo con otra integral de volumen. Si aplicamos el teorema de la divergencia a la integral de flujo, obtenemos:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV$$

igualdad que se debe cumplir para cualquier volumen, y la única posibilidad para que se cumpla para cualquier volumen es que las dos funciones dentro de la integral sean la misma. Así pues, podemos escribir:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.15)$$

que corresponde a la ley de Gauss en forma diferencial para el campo eléctrico. Esta ecuación muestra que la fuente del campo eléctrico en un punto es la densidad de carga, o dicho de otra manera, que en un punto determinado nacen o mueren líneas de campo si su densidad de carga no es nula.

**Ejemplo 2.7:** Tenemos una esfera de radio  $R$  con una densidad de carga volúmica  $\rho = kr$ . Encontrar el campo eléctrico dentro y fuera de la esfera.

Este es un típico ejemplo de aplicación de la ecuación de Gauss para el campo eléctrico en forma integral. Sin embargo también se puede utilizar su forma diferencial. La geometría del problema hace lógica la utilización de coordenadas esféricas; además, por simetría sólo tendremos componente en la dirección radial  $r$ . La expresión de la divergencia para el vector desplazamiento entonces se reduce a

$$\begin{aligned} r < R & \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = \frac{kr}{\epsilon_0} \\ r > R & \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = 0 \end{aligned}$$

Si resolvemos la ecuación para  $r < R$  tenemos

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = \frac{kr^3}{\epsilon_0} \Rightarrow r^2 E_r = \frac{kr^4}{4\epsilon_0} + C$$

Como que para  $r = 0$  ambos miembros de la igualdad han de ser nulos, la constante de integración debe ser nula:  $C = 0$ . Así, el campo en el interior de la esfera es:

$$\vec{E} = \frac{kr^2}{4\epsilon_0} \quad r < R$$

Falta resolver la ecuación para  $r > R$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = 0 \Rightarrow r^2 E_r = B \Rightarrow E_r = \frac{B}{r^2} \quad r > R$$

donde falta por determinar la constante de integración  $B$ . Como se justificará en la sección 2.4, este caso se resuelve teniendo en cuenta que el campo debe de ser igual a un lado y a otro de la superficie de la esfera. Así, para  $r = R$  se cumple



$$\frac{k R^2}{4\epsilon_0} = \frac{B}{R^2} \Rightarrow B = \frac{k R^4}{4\epsilon_0}$$

con lo que el campo eléctrico en el exterior de la esfera es:

$$\vec{E} = \frac{k}{4\epsilon_0} \frac{R^4}{r^2} \hat{r}$$

Vamos a aplicar ahora el teorema de la divergencia a la ley de Gauss para el campo magnético, y así obtener su forma diferencial. Siguiendo el mismo razonamiento visto para el campo eléctrico, obtenemos:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.16)$$

resultado que muestra que, al ser la divergencia nula en cualquier punto del espacio, no hay fuentes de tipo surtidor o sumidero y las líneas de campo no nacen ni mueren en ningún punto particular, con lo que deben de ser cerradas.

**Ejemplo 2.8:** Tenemos un campo magnético del cual conocemos dos de sus componentes

$$B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot S}{r^3} \sin \theta \quad B_z = 0$$

Encontrar la componente  $B_r$ .

Para encontrar la componente del campo magnético que falta aprovecharemos el hecho de que su divergencia siempre es nula. La divergencia en coordenadas esféricas, y teniendo en cuenta que la componente  $B_z$  es nula, queda:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 B_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(r \sin \theta B_\theta)}{\partial \theta} = 0$$

con lo cual ambos términos han de ser iguales pero de signo contrario. Introduciendo  $B_\theta$  en la expresión de la divergencia tenemos:

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(r \sin \theta B_\theta)}{\partial \theta} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{IS}{r^4} \cos \theta$$

con lo cual

$$\frac{\partial}{\partial r}(r^2 B_r) = -\frac{\mu_0}{2\pi} \frac{IS}{r^2} \cos\theta \Rightarrow r^2 B_r = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{IS}{r} \cos\theta \Rightarrow B_r = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{IS}{r^3} \cos\theta$$

donde se ha hallado la componente radial del campo magnético.

Continuaremos la transformación de las ecuaciones de Maxwell con la ley de Faraday que, si recordamos, en forma integral es:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

Si aplicamos el teorema de Stokes a la circulación, la ecuación puede escribirse

$$\int_S \nabla \times \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

donde de nuevo la igualdad debe cumplirse para cualquier superficie y, por lo tanto, los campos sobre los que se calcula el flujo deben ser iguales. Suprimiendo las integrales se obtiene la ley de Faraday en forma diferencial:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (2.17)$$

Esta ecuación nos está diciendo que el rotacional del campo eléctrico, es decir, su no uniformidad o circulación en un punto, es debida a la variación temporal del campo magnético, con lo cual, el campo eléctrico en régimen dinámico no es conservativo.

**Ejemplo 2.9:** Encontrar el campo magnético asociado al siguiente campo eléctrico:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{V}{\ln(a/b)} \cdot \frac{\sin(\pi z/l)}{\rho} \cos(\omega t) \hat{\rho}$$

Por definición un campo eléctrico debe cumplir las ecuaciones de Maxwell. y en concreto Faraday. Así, podemos utilizar Faraday para encontrar el campo magnético. Para ello, calcularemos el rotacional en coordenadas cilíndricas

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_\rho & 0 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial E_\rho}{\partial z} \hat{\phi} = \frac{V}{\ln(a/b)} \frac{\pi \cos(\pi z/l)}{\rho} \cos(\omega t) \hat{\phi}$$

resultado que debe ser igual a la variación temporal del campo magnético. Integrando respecto del tiempo obtendremos el campo magnético:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} &= \frac{V}{\ln(a/b)} \frac{\pi \cos(\pi z/l)}{\rho} \cos(\omega t) \hat{\phi} \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{B} &= \left[ \frac{-V}{\ln(a/b) l \omega} \frac{\pi \cos(\pi z/l)}{\rho} \sin(\omega t) + C \right] \hat{\phi} \end{aligned}$$

donde  $C$  es una constante de integración independiente del tiempo que permite la posible existencia de campos estáticos.

La siguiente transformación es para la ley de Ampère-Maxwell que en forma integral la podemos escribir

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_S \mu_0 \left( \vec{J}_v + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

donde hemos escrito la intensidad de corriente en función de la densidad de corriente volúmica. Si aplicamos Stokes a la circulación obtenemos:

$$\oint_S \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S \mu_0 \left( \vec{J}_v + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S}$$

Y como la igualdad debe cumplirse para cualquier superficie, la ecuación de Ampère-Maxwell en forma diferencial es:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{J}_v + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad (2.18)$$

Así pues, las no uniformidades del campo o la circulación en un punto tendrán dos posibles causa, la variación temporal del campo eléctrico (similar al caso de Faraday) o la existencia de corrientes en dicho punto.

**Ejemplo 2.10:** Encontrar para qué valor de la pulsación  $\omega$  las expresiones para los campos eléctrico y magnético encontradas en el ejemplo anterior cumplen las ecuaciones de Maxwell en una zona sin corrientes ni cargas.

El hecho de que se cumpla las ecuaciones de Maxwell implica que si tomamos la expresión encontrada del campo magnético, aplicando Ampère-Maxwell debemos reencontrar la expresión original del campo eléctrico. Si calculamos el rotacional obtenemos:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{B} &= \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho \hat{\phi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \rho B_{\phi} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{\partial B_{\phi}}{\partial z} \hat{\rho} = \\ &= \frac{-V}{\ln(a/b)} \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{1}{\omega} \frac{\sin(\pi z/l)}{\rho} \cos(\omega t) \hat{\rho} \Rightarrow\end{aligned}$$

sin considerar las constantes de integración, el campo eléctrico es:

$$\begin{aligned}\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \frac{-V}{\ln(a/b)} \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{1}{\omega \mu} \frac{\sin(\pi z/l)}{\rho} \cos(\omega t) \hat{\rho} \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{E} &= \frac{-V}{\ln(a/b)} \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{1}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0} \frac{\sin(\pi z/l)}{\rho} \sin(\omega t) \hat{\rho}\end{aligned}$$

En esta expresión del campo aparecen unas constantes que no aparecían en la expresión inicial. Sin embargo, ambas expresiones deben ser iguales para que cumplan las ecuaciones de Maxwell y efectivamente sean campos eléctricos. Comparando vemos que debe cumplirse

$$\left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \frac{1}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0} = 1$$

y aislando obtenemos que la pulsación debe ser  $\omega = \pi / l \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ .

Por último, queda por transformar la ecuación de continuidad que en forma integral era

$$-\frac{d}{dt}Q = \oint_s \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Si aplicamos el teorema de la divergencia y escribimos la carga en forma de integral de la densidad, tenemos:

$$-\frac{d}{dt} \int_V \rho \, dV = \int_V \nabla \cdot \vec{J} \, dV$$

ecuación que debe cumplirse para cualquier volumen, con lo cual los términos en el interior de las integrales son iguales y la ecuación de continuidad en forma diferencial queda

$$-\frac{d}{dt} \rho = \nabla \cdot \vec{J} \quad (2.20)$$

## 2.3 Ecuaciones de Maxwell en medios materiales

La materia está compuesta por átomos y estos átomos los podemos considerar como un núcleo con carga positiva rodeado de una nube de electrones. Los electrones siempre están en movimiento alrededor del núcleo y girando sobre sí mismos. Como vemos, desde un punto de vista electromagnético la materia está constituida de cargas y corrientes. Como tal, los campos electromagnéticos afectarán al medio desplazando las cargas y modificando las corrientes. A su vez, la nueva disposición de cargas y corrientes modificará los campos. Tener en cuenta todas estas contribuciones por separado es una tarea prácticamente imposible. En consecuencia, se hace necesario obtener unas ecuaciones de Maxwell que incluyan de forma sencilla estas cargas y corrientes siguiendo criterios de promediado. El resultado será las ecuaciones de Maxwell para medios materiales que describirán la relación entre los campos macroscópicos (no tienen en cuenta la distribución exacta de cargas y corrientes). A continuación introduciremos estas ecuaciones sin insistir en la deducción matemática ya que se ha realizado en las secciones 1.2 y 2.2. En el análisis, clasificaremos los materiales en tres tipos: conductores, dieléctricos y magnéticos.

### 2.3.1 Campos en presencia de medios conductores

Los conductores son materiales caracterizados por la presencia de electrones libres o de conducción. Estos electrones los podemos considerar como una aportación de cada átomo al conjunto del material sin estar localizados en un punto determinado. De esta manera, forman una nube de electrones constantemente en movimiento que se verán afectados por la presencia de campos externos. El flujo electrónico inducido por campos externos es lo que se conoce como corrientes de conducción. Nuestro objetivo es caracterizar este comportamiento

para cada material. Así pues, debemos analizar el movimiento electrónico en presencia de un campo eléctrico, por lo que utilizaremos la ley de Newton

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = -e \cdot \vec{E}$$

donde  $m$  indica la masa de electrón y  $-e$  su carga. Resolviendo la ecuación, la velocidad de los electrones queda:

$$\vec{v} = -\frac{e \cdot \vec{E}}{m} t \quad m / s$$

Conocida la densidad de electrones por unidad de volumen  $N$ , la densidad de carga será  $-eN$ . Entonces podemos encontrar la densidad de corriente como:

$$\vec{J} = (-e \cdot N) \cdot \vec{v} = \frac{N \cdot e^2 \vec{E}}{m} t \quad A / m^2$$

Esta expresión muestra que la densidad de corriente es proporcional al campo eléctrico y que aumenta indefinidamente con el tiempo. Este razonamiento es erróneo ya que las corrientes no pueden hacerse infinitas. Además, experimentalmente se ve que adquieren un valor determinado que depende de cada material. ¿Cuál es la razón por la que no aumenta indefinidamente? La respuesta es que se producen choques entre los electrones móviles y los átomos fijos, con lo cual serán frenados periódicamente y se llegará a un equilibrio. El efecto de frenado se puede caracterizar por un tiempo  $\tau$  que depende de cada material y que nos indica el tiempo promedio entre choque y choque. Así, la densidad de corriente queda:

$$\vec{J} = \frac{N \cdot e^2 \tau}{m} \vec{E} = \sigma \cdot \vec{E} \quad (2.21)$$

En esta ecuación aparece el parámetro fundamental por el que caracterizaremos las propiedades conductoras de un material: la conductividad  $\sigma$ . Algunos valores típicos de conductores y aislantes vienen dados en la tabla 2.1.

Si queremos incluir los efectos de la conductividad en las ecuaciones de Maxwell, la densidad de corriente de conducción debe ser introducida en la ecuación de Ampère-Maxwell quedando:

$$\oint_c \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_o \int_s \left( \sigma \vec{E} + \epsilon_o \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \quad (2.22)$$

Material	Conductividad ( $\Omega \cdot m$ ) <sup>-1</sup>
Plata	$6.1 \cdot 10^7$
Cobre	$5.7 \cdot 10^7$
Oro	$4.1 \cdot 10^7$
Aluminio	$3.5 \cdot 10^7$
Agua del mar	4
Silicio	$3.9 \cdot 10^{-4}$
Agua destilada	$10^{-4}$
Vidrio	$10^{-12}$
Cera	$10^{-17}$

Tabla 2.1 Conductividad de algunos materiales

Al hablar de conductores, nos referiremos a ellos haciendo la distinción entre buen conductor y conductor perfecto. Las características del buen conductor las trataremos en la sección 3.5.

Un conductor perfecto es un medio idealizado en que  $\sigma \rightarrow \infty$ , es decir, en que no hay colisiones y la velocidad de los electrones es infinita. En muchas de las aplicaciones que estudiaremos, por simplicidad, nos interesará considerar los conductores perfectos. Así pues, debemos analizar las consecuencias que tendrá considerar una conductividad infinita. Para extraerlas nos tendremos que fijar en la ecuación (2.22), ya que debe seguir cumpliéndose. Una conductividad infinita, al cumplirse la igualdad, implica que el campo magnético debe ser infinito, situación que es físicamente imposible. Si queremos evitar que el término de la derecha dé infinito, el campo eléctrico que aparece en la ecuación debe ser nulo y así contrarrestarla conductividad infinita. Precisamente, la principal característica de los conductores perfectos es que *el campo eléctrico en su interior es nulo*, propiedad que será reafirmada en la sección 2.5.2 desde un punto de vista energético. Vamos a ver que consecuencias se deducen de la nulidad del campo eléctrico dentro de un conductor perfecto:

- De la ley de Faraday vemos que si el término de la izquierda es nulo, y por lo tanto también el término de la derecha, el campo magnético debe ser independiente del tiempo para que la derivada se anule. Así pues, *dentro de un conductor perfecto sólo pueden haber campos magnetostáticos*.
- En la aproximación estática el campo eléctrico es el gradiente de la función potencial; luego, si el campo es nulo, se cumple  $\nabla\Phi = 0$ . En consecuencia, el potencial eléctrico debe ser constante en todo el volumen, y por lo tanto un *conductor perfecto es un volumen equipotencial*. Además, desde un punto de vista matemático, al ser el campo eléctrico el gradiente del potencial, siempre es perpendicular a las superficies equipotenciales, *el campo exterior sobre la superficie del conductor siempre es*

*perpendicular a ésta*. Esta última propiedad también es aplicable a campos dinámicos y será justificada en la sección 2.4.1.

- c) En el interior de un conductor perfecto no pueden haber cargas, en caso contrario se crearía un campo eléctrico. Debe entenderse entonces que existen dos densidades volúmicas de carga, una negativa, formada por la nube de electrones libres, y otra positiva, debida a la red iónica, que se cancelan punto a punto en el interior del conductor.
- d) Que en el interior de un conductor no haya carga neta no significa que en un conductor no pueda haberlas: en un conductor perfecto las cargas están siempre sobre su superficie en forma de densidad de carga superficial.
- e) Existe una relación biunívoca entre la densidad de carga superficial y el campo eléctrico exterior: la carga se distribuirá de manera que contrarreste el campo exterior, manteniendo el campo nulo dentro del conductor. Esta relación la encontraremos nuevamente en la sección 2.4.1.

### 2.3.2 Materiales dieléctricos

Los dieléctricos son materiales eléctricamente neutros en que los electrones están ligados a los átomos o moléculas que lo forman. Así pues, los electrones no pueden trasladarse libremente y por lo tanto no crearán corrientes de conducción, es decir, son materiales aislantes. El efecto de los campos eléctricos sobre estos materiales se limita a un pequeño desplazamiento de las cargas respecto sus posiciones originales. Como se vio en el capítulo primero, este efecto se conoce con el nombre de *polarización*. Aquí, vamos a repetir los conceptos básicos de este fenómeno, pero desde un punto de vista más intuitivo, y ver como caracterizarlo.

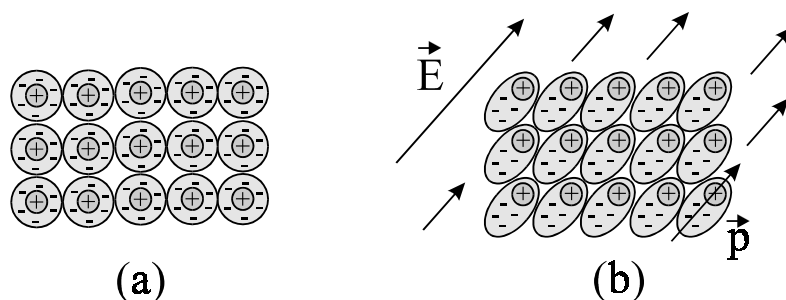


Fig. 2.12 Ejemplo de polarización eléctrica



La figura 2.12 muestra de forma esquemática el efecto de la polarización. En un primer momento tenemos los átomos neutros, uno junto a otro, de manera que la carga total es nula. Bajo la acción de un campo eléctrico, las cargas negativas y positivas se desplazarán en sentidos contrarios formando cada átomo un dipolo eléctrico de momento dipolar  $\vec{p} = q \cdot \vec{\delta}$ . El material en su conjunto también presentará un momento dipolar total inducido que será la suma de los momentos de los átomos, entonces diremos que el material está *polarizado*. El valor del momento dipolar del material para un campo eléctrico dado, aparte de las características del material, dependerá de sus dimensiones, con lo cual, en caso de conocerlo, no define el estado del material. Por esta razón, es preferible conocer y trabajar con densidades de momento dipolar o *Polarización*:

$$\vec{P}(\vec{r}) = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta v} = \frac{d\vec{p}}{dv} \quad (C/m^2) \quad (2.2.3)$$

**Ejemplo 2.12:** Efecto de la introducción de un material dieléctrico en un condensador de placas planas:

Para entender cómo nos afecta la polarización o la aparición de cargas ligadas en el cálculo de los campos eléctricos vamos a considerar el efecto de introducir un material entre las placas de un condensador.

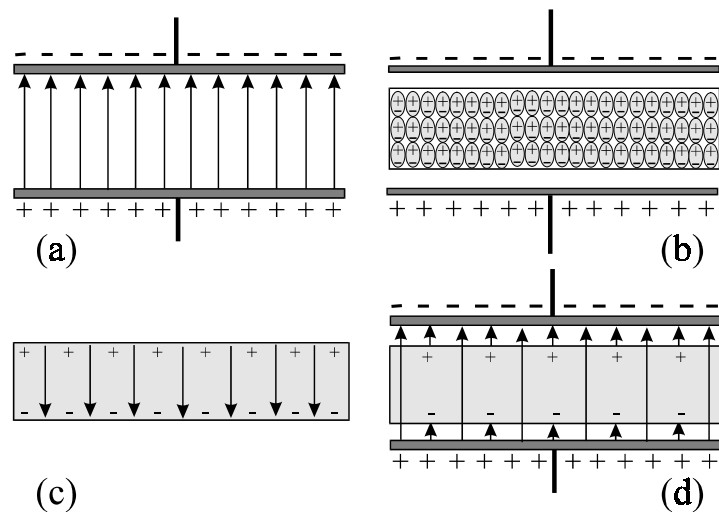


Figura 2.13 Origen del aumento de capacidad en un condensador debido a la introducción de un dieléctrico

La figura 2.13a representa un condensador plano donde se han trazado las líneas de campo eléctrico. En la siguiente figura, donde se ha introducido un dieléctrico, vemos como el material, que consideraremos compuesto por una infinidad de átomos, se polariza. La carga total del material es nula, como lo era inicialmente (igual número de cargas positivas y negativas). Sin embargo, en el interior del material podemos agrupar la carga negativa de un dipolo con la positiva del dipolo que está inmediatamente debajo. El resultado de esta agrupación se muestra en la figura 2.17c, donde aparece una densidad de carga en las superficies superior e inferior del dieléctrico, con lo que el material crea un campo que va en sentido contrario al creado por el condensador. Si sumamos los dos campos, como muestra en la figura 2.17d, las líneas de campo en el interior del material disminuirán respecto las que había en el condensador sin dieléctrico, es decir, disminuye el campo total en el interior del condensador. En consecuencia, la diferencia de potencial entre placas también disminuye y por lo tanto su capacidad aumenta ( $C=Q/V$ ).

Este ejemplo muestra cómo la existencia de una polarización está relacionado con la aparición de densidades de carga en el material. A estas cargas la llamaremos ligadas y las indicamos por el subíndice *b* (*bounded*), siendo una consecuencia del desplazamiento de las cargas que forman el dieléctrico. Esta denominación se da en contraposición a la carga libre, indicada por el subíndice *f* (*free*) y que no es propia del material pero que puede introducirse de forma artificial. La expresión matemática de las densidades de carga ligada superficiales y volúmicas se dedujeron en la sección 1.2 y vienen dadas por

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n} \qquad \rho_b = -\nabla \cdot \vec{P} \qquad (2.2.4)$$

donde  $\hat{n}$  es un vector unitario normal a la superficie del material y dirigido hacia el exterior. En la figura 2.14 podemos ver el significado de estas expresiones. La simple existencia de dipolos implica la aparición de densidades de carga superficiales, pero como muestra la figura 2.14a será máxima en las superficies perpendiculares a la dirección de  $\vec{P}$  y mínima en las paralelas ya que tendremos tanto cargas positivas como negativas. Así que, cuanto mayor sea el ángulo entre  $\vec{P}$  y  $\hat{n}$ , menor será la densidad de carga superficial, como se ve si contamos las cargas que tocan a las distintas superficies en la figura 2.14a.

La densidad de carga volúmica está asociada a la no uniformidad o no homogeneidad de la polarización que puede ser debida a variaciones estructurales de la materia o a la presencia de densidades de carga libre. En la figura 2.14b se muestra un caso de material no homogéneo donde la polarización es mayor en la parte superior (hay más moléculas) que en la inferior del material. Si agrupamos las cargas entre distintos dipolos (los rodeados por la línea) una de las cargas negativas no queda contrarrestada, con lo que aparecerá una densidad de carga volúmica neta. Dicho de otra manera, el aumento de la polarización es debido a la presencia de esta carga, es decir, es la fuente de la polarización, con lo cual debe estar relacionado por la divergencia

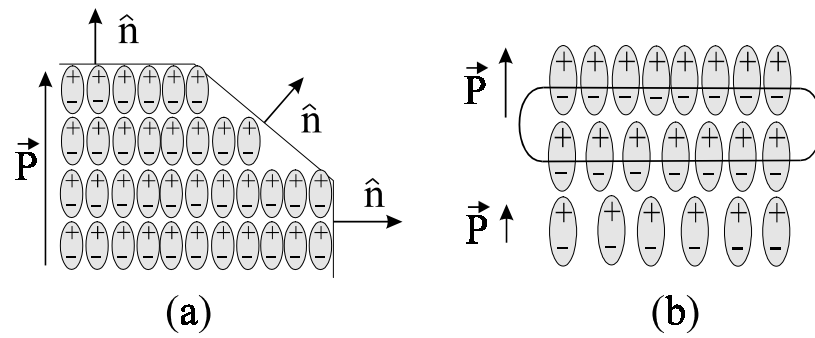


Fig. 2.14 Significado de las densidades de carga ligada

Si queremos obtener las ecuaciones de Maxwell para medios materiales deberemos introducir (2.24) en aquellas ecuaciones en que aparezcan las cargas, en concreto en la ecuación de Gauss para el campo eléctrico. Como vimos en la sección 1.2.3, la ley de Gauss entonces se escribe:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \quad \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_f \quad (2.25)$$

donde  $\rho_f$  y  $Q_f$  son respectivamente la densidad de carga y la carga total libre en el interior de la superficie, y  $\vec{D}$  es el vector desplazamiento definido como

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \quad (C/m^2) \quad (2.26)$$

Si observamos la nueva ecuación de Gauss, vemos que sólo depende de las cargas libres, es decir, no consideramos los efectos del material; luego en el cálculo de la divergencia o del flujo tampoco nos afectará la presencia del material. Esta es la razón por la que introducimos el vector desplazamiento, porque *necesitamos una magnitud, como es la divergencia de  $\vec{D}$ , que no dependa de las características del material.*

El siguiente paso consiste en buscar una definición más compacta del vector desplazamiento en función del campo eléctrico. Para ello debemos recordar que la polarización es un efecto inducido por el campo eléctrico; luego tiene que ser una función dependiente de éste, y por supuesto de las características del material. Si queremos determinar esta función, que no conocemos, la podemos descomponer en series de Taylor, con lo que la polarización queda:

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \left( \chi_e^{(1)}(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t) + \chi_e^{(2)}(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) + \right. \\ \left. + \chi_e^{(3)}(\vec{r}) \vec{E}(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) \vec{E}(\vec{r}, t) + \dots \right)$$

donde  $\chi_e^{(i)}$  son los coeficientes de Taylor (adimensionales) que reciben el nombre de susceptibilidad eléctrica del medio y deben ser hallados experimentalmente. Es importante darse cuenta que *la susceptibilidad eléctrica sólo depende del medio y por lo tanto lo caracteriza*. En general, son tensores donde el valor de los coeficientes depende del material y de la posición  $\vec{r}$  y el superíndice indica el orden. Según las características de la susceptibilidad podemos clasificar los materiales en los siguientes grupos:

- a) Medios lineales: Como vemos la polarización incluye términos en los que aparecen potencias del campo eléctrico. Entonces diremos que el medio es no lineal. Si la susceptibilidad de orden mayor a uno ( $i > 1$ ) es nula entonces el medio es lineal ya que la dependencia de la polarización con el campo eléctrico es lineal.
- b) Medios isotrópicos: El hecho de que la susceptibilidad sea un tensor implica que las propiedades del material dependen de la dirección del campo eléctrico. Si esto no ocurre y la polarización del medio es independiente de la dirección del campo, diremos que el medio es isotrópico. Entonces cada uno de los tensores puede ser substituido por funciones escalares.
- c) Medios homogéneos: Los coeficientes del tensor susceptibilidad son funciones que dependen de la posición con lo que las propiedades del material dependerán del punto considerado. Si las propiedades son las mismas para cualquier punto del material, como por ejemplo en un cristal perfecto, diremos que el medio es homogéneo. Entonces los coeficientes del tensor son constantes.

A lo largo del libro, por cuestiones de simplicidad, nos limitaremos a medios lineales isotrópicos y homogéneos, con lo que  $\chi_e$  es un escalar. Entonces la relación entre campo eléctrico y polarización se reduce a

$$\vec{P}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}(\vec{r}, t) \quad (2.2.7)$$

Podemos aprovechar este resultado e introducirlo en la expresión del vector desplazamiento para obtener éste directamente en función de las características del material y del campo eléctrico

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = \epsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}$$

de donde podemos definir dos nuevos parámetros que caracterizan y describen las propiedades del medio material: la permitividad relativa del medio

$$\epsilon_r = (1 + \chi_e)$$

y la permitividad del medio

$$\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0 \quad (F/m)$$

En definitiva hemos encontrado que los medios dieléctricos pueden ser caracterizados por la susceptibilidad  $\chi_e$ , la permitividad relativa  $\epsilon_r$  o la permeabilidad del medio  $\epsilon$

Como resultado, para medios lineales isótropos y homogéneos, el vector desplazamiento puede escribirse simplemente en función del campo eléctrico como

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (2.28)$$

con lo que la ecuación de Gauss simplemente queda:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon}$$

De esta manera, los medios dieléctricos lineales isótropos y homogéneos pueden ser analizados como si estuviéramos en el vacío, pero substituyendo  $\epsilon_0$  por  $\epsilon$ . En la sección 1.2 puede encontrarse ejemplos resueltos en los que intervienen medios dieléctricos.

Volviendo al ejemplo del condensador, ahora podemos dar otra interpretación de por qué aumenta la capacidad. La capacidad para un condensador plano puede escribirse en función de sus dimensiones como  $C = \epsilon S / d$ , donde  $d$  es la distancia entre conductores y  $S$  su superficie. En este caso la capacidad aumenta porque al introducir un material aumenta la permitividad del medio, mientras que en la interpretación inicial era debido a la disminución de la diferencia de potencial.

### 2.3.3 Materiales magnéticos

A escala microscópica la materia está formada por electrones en movimiento, por lo tanto crearán y se verán afectados por los campos magnéticos. En esta sección trataremos cómo estas corrientes contribuyen al campo macroscópico total. Todos los materiales contienen electrones en movimiento; luego desde un punto de vista estricto todos los materiales son magnéticos. Sin embargo para nosotros, los materiales magnéticos son aquellos en que los efectos magnéticos macroscópicos son importantes.

De forma simplificada, los materiales pueden ser considerados como un conjunto de pequeñas espiras. El efecto de los campos magnéticos sobre el material consiste en una reorientación de las espiras (Fig. 2.15); entonces diremos que el material está *magnetizado*.

Las espiras están caracterizada por el momento dipolar magnético  $\vec{m} = I \cdot \vec{S}$ , y el momento magnético total del material será la suma de los momentos de cada espira. Para caracterizar los efectos magnéticos utilizaremos la densidad de momento magnético o *magnetización*:

$$\vec{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{m}}{\Delta v} = \frac{d \vec{m}}{d v} \quad (\text{A/m}) \quad (2.29)$$

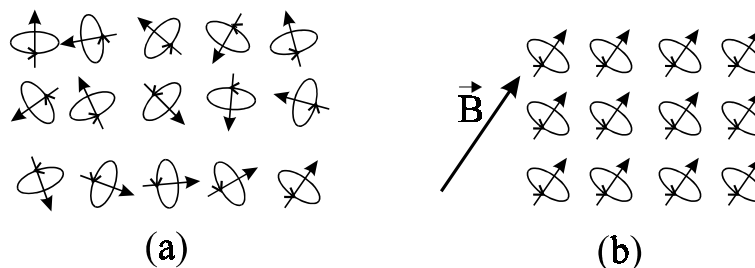


Figura 2.15 Ejemplo de magnetización

**Ejemplo 2.13:** Efecto de los materiales magnéticos sobre el campo creado por una bobina.

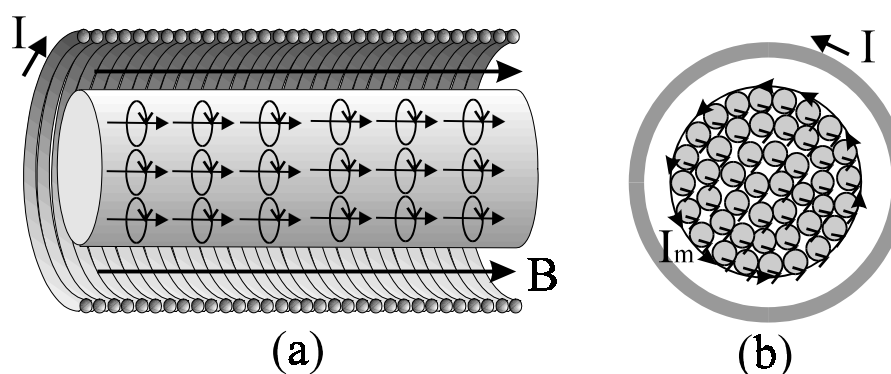


Fig. 2.16

Para entender cómo afecta la magnetización vamos a considerar los efectos de un material magnético dentro de una bobina. En la figura 2.16a vemos cómo el campo en el interior de la bobina magnetiza el material, orientando las espiras en una misma dirección. Si hacemos un corte transversal (Fig. 2.16b) vemos cómo en el interior del material las corrientes en las espiras se anulan en el punto de contacto con la vecina. Esto no ocurre con las espiras situadas en la superficie del material, ya que éstas tendrán un lado que coincidirá con la superficie del material y no estará contrarrestada. Si consideramos la aportación de todas las espiras que están en la superficie el resultado será la aparición de una densidad de corriente en la superficie

del material a la que llamaremos de magnetización  $I_m$ . Esta densidad de corriente va en la misma dirección que las corrientes de la bobina  $I$ , con lo que en este ejemplo el campo magnético creado por el material se suma al campo creado por la bobina.

La expresión que nos da las densidades de corriente de magnetización superficial y volúmica ya vistas en el capítulo anterior son:

$$\vec{J}_{SM} = \vec{M} \times \hat{n} \quad \vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} \quad (2.30)$$

donde nuevamente  $\hat{n}$  es un vector unitario normal a la superficie del material dirigido hacia el exterior. El significado de estas expresiones lo vemos en la figura 2.17. En el primer caso, ya vimos que las espiras inducen corrientes superficiales, sin embargo, estas corrientes aparecerán si el vector magnetización es perpendicular a  $\hat{n}$ . Como muestra la figura, en la base del cilindro ambos vectores son paralelos con lo que la densidad de corriente superficial debe ser nula y, efectivamente, la disposición de las espiras muestra que no hay una contribución neta. De esta manera vemos que  $\vec{M}$  y  $\hat{n}$  deben estar relacionados por el producto vectorial.

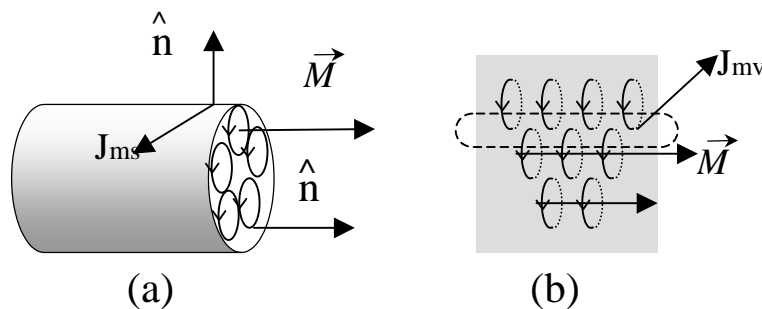


Fig. 2.17 Interpretación de las densidades de corriente de magnetización

Las densidades de corrientes volúmicas aparecen cuando hay algún tipo de no uniformidad del medio o de los campos externos. La figura 2.17b muestra la creación de estas corrientes debido a la no uniformidad del medio. Si nos fijamos en la zona rodeada por una línea de puntos, el número de corrientes elementales que atraviesan la superficie de color gris es mayor en el sentido hacia dentro del papel que hacia a fuera. Como resultado aparecerá una densidad de corriente volúmica que atraviesa la superficie. La figura también muestra que este efecto está relacionado con la no uniformidad de la magnetización (el tamaño del vector aumenta al desplazarnos verticalmente) y en la sección anterior vimos que no uniformidad implica la existencia de un rotacional. En este caso el rotacional de la magnetización es directamente la densidad de corriente de magnetización volúmica.

El siguiente paso es considerar el efecto de los materiales magnéticos sobre los campos. Para ello, debemos introducir las densidades de corriente de magnetización en las ecuaciones donde aparezcan densidades de corriente, es decir, en Ampère-Maxwell. A parte de esta densidad de corriente, debemos considerar otras dos posibles contribuciones: la densidad de corriente libre y la densidad de corriente dipolar. La primera corresponde al movimiento de los electrones libres debido a la acción de un campo externo y la indicaremos por  $\vec{J}_f$ . La segunda está relacionada con la variación temporal de la posición de las cargas ligadas, es decir, las oscilaciones de los dipolos, y vendrá dada por:

$$\vec{J}_b = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

Introduciendo todas estas contribuciones para la densidad de corriente en la ecuación de Ampère-Maxwell y utilizando el procedimiento seguido en el capítulo anterior, el resultado es

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (2.3.1)$$

donde sólo aparecen de forma explícita las corrientes libres.  $\vec{H}$  es la intensidad de campo magnético o simplemente campo magnético y viene definido por

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (A/m)$$

aunque la forma habitual de encontrarlo escrito es

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (2.32)$$

La ecuación (2.3.1) constituye la ley de Ampère-Maxwell en medios materiales. Su principal característica es la independencia respecto de las características magnéticas del material, gracias a la introducción del campo  $\vec{H}$ , y tan sólo dependerá de las corrientes libres.

Al igual que en dieléctricos, podemos desarrollar en serie de Taylor la dependencia de  $\vec{M}$  respecto de  $\vec{H}$ , dependencia que para medios lineales isótropos y homogéneos se reduce a

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (2.3.3)$$



que corresponde al primer término del desarrollo de Taylor, donde  $\chi_m$  es el coeficiente susceptibilidad magnética. Introduciendo (2.3 3) en la ecuación (2.32) obtenemos

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H} = \mu\vec{H} \quad (2.3 4)$$

donde de forma similar a los dieléctricos se define la permeabilidad magnética relativa  $\mu_r$  y la permeabilidad del medio  $\mu = \mu_r\mu_0$ . Estos parámetros, junto con  $\chi_m$ , caracterizan las propiedades magnéticas del medio.

Nuevamente, en medios lineales isótropos y homogéneos, la presencia de medios materiales puede ser tratada simplemente substituyendo en las ecuaciones  $\mu_0$  por  $\mu$ . En el ejemplo 2.13 se vio que el campo magnético en una bobina con un medio magnético aumentaba debido a la aparición de corrientes de magnetización. Por otro lado, el campo magnético de una bobina puede obtenerse a partir de la ley de Ampère para medios materiales como  $B = \mu n I$ . Este resultado permite una nueva interpretación: el campo aumenta al aumentar la permeabilidad del medio.

**Ejemplo 2.14:** En un medio magnético lineal isótropo y homogéneo de permeabilidad relativa  $\mu_r$  tenemos un flujo de densidad de corriente libre  $\vec{J}_v = K / \rho \hat{z}$  ( $A/m^2$ ). Encontrar la corriente de magnetización inducida.

En este ejercicio tenemos una densidad de corriente volúmica que inducirá corrientes de magnetización. Al no considerar los límites del medio y no haber superficies no podemos tener densidades de corrientes superficiales. La densidad de corriente de magnetización vendrá dada por:

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$$

con lo que deberemos encontrar la expresión para  $\vec{M}$ . Procediendo como en el ejemplo 2.7 tenemos:

$$\left. \begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \\ \vec{B} &= \mu_0\mu_r\vec{H} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \vec{M} = \vec{H}(\mu_r - 1)$$

con lo que deberemos encontrar  $\vec{H}$  aplicando Ampère

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f$$

Nuestro problema tiene simetría cilíndrica; luego calcularemos las corrientes que atraviesan una superficie circular de radio  $\rho$

$$I_f = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_0^\rho \int_0^{2\pi} \frac{K}{\rho} \rho d\rho d\varphi = 2\pi \rho K$$

Por simetría, nuestro campo  $\vec{H}$  debe tener una única componente en la dirección de la  $\varphi$  y además debe ser constante por lo que la circulación queda:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_\varphi 2\pi \rho$$

Igualando las dos ecuaciones, el campo magnético obtenido es  $\vec{H} = K\hat{\varphi}$ , con lo cual la magnetización será

$$\vec{M} = K(\mu_r - 1)\hat{\varphi}.$$

Para terminar falta calcular el rotacional de la magnetización que en coordenadas cilíndricas es:

$$\vec{J}_{m_V} = \nabla \times \vec{M} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M_\rho & \rho M_\varphi & M_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho M_\varphi) \right] \hat{z} = \frac{1}{\rho} K(\mu_r - 1) \hat{z}$$

Este ejemplo muestra cómo en un caso en que tenemos un medio homogéneo pueden aparecer unas corrientes de magnetización por el simple hecho de tener una densidad de corriente libre. De forma similar, una densidad de carga libre puede generar cargas ligadas, tal y como se vio en el ejemplo 1.25 del capítulo anterior.

### 2.3.4 Ecuaciones fundamentales del electromagnetismo en medios materiales

En las 2.3.2 y 2.3.3 hemos obtenido las ecuaciones de Gauss para el campo eléctrico y la de Ampère-Maxwell en presencia de medios materiales. Las otras ecuaciones, Gauss para el campo magnético y Faraday, serán válidas tanto en presencia de medios materiales como en el vacío, ya que no aparecen en su expresión cargas ni corrientes que pudieran ser afectadas por las características del medio. Por lo tanto las ecuaciones de Maxwell teniendo en cuenta la presencia de medios materiales serán:

<u>forma integral</u>	<u>forma diferencial</u>
$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$
$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$	$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

donde en ninguna de ellas es necesario tener en cuenta las cargas y las corrientes que forman la materia. A estas ecuaciones deberían añadirse las ecuaciones

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

denominadas *relaciones constitutivas de la materia*, ya que su forma exacta determinará las propiedades electromagnéticas de un determinado medio y es donde aparece la relación existente entre las cargas ligadas y corrientes de magnetización y los campos externos, es decir la respuesta del material. Para medios lineales isótropos y homogéneos las relaciones constitutivas se reducen a

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

Donde las características del material vendrá determinadas por  $\epsilon_r$  y  $\mu_r$ .

## 2.4 Condiciones de contorno

En la sección 2.2 hemos deducido las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial y en la 2.3 para medios materiales. Indirectamente, en su obtención, hemos asumido que el medio es infinito y que estará caracterizado por una determinada conductividad, una permitividad y una permeabilidad. Sin embargo, en la práctica tendremos cambios de medio con lo cual nuestros campos se verán afectados en las superficies de separación. Las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial no describen qué ocurre en las superficies de separación entre medios, ya que relacionan entre sí los campos y sus fuentes en un punto, pero no tienen en cuenta lo que ocurre en otro punto justo a su lado. La información sobre los campos en las superficies de separación la tendremos que buscar en la forma integral de las ecuaciones de Maxwell, ya que éstas sí dan información sobre el comportamiento global en una región determinada. El resultado será unas relaciones entre las distintas componentes de los campos, llamadas condiciones de continuidad, de frontera o, en general, condiciones

de contorno. El proceso que seguiremos a continuación, consiste en tomar cada una de las ecuaciones de Maxwell en forma integral y ver que información se deriva en las superficies de separación entre dos medios o superficies con cargas y corrientes.

### 2.4.1 Continuidad de los campos eléctricos

La información sobre continuidad de los campos eléctricos aparece en la ecuación de Gauss para el campo eléctrico y la ecuación de Faraday. Empezaremos con la primera de ellas, que en forma integral y para medios materiales se escribe:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$

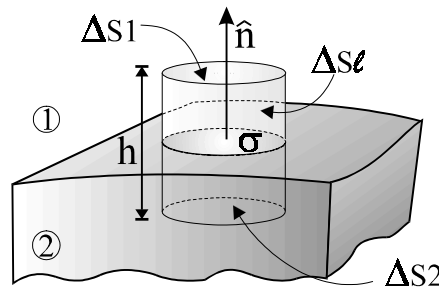


Fig. 2.18 Superficie para el cálculo de Gauss

Para el cálculo del flujo tomaremos un elemento de superficie cilíndrico que atraviese la superficie de separación entre los dos medios (Fig. 2.18). El flujo sobre la superficie cerrada la podemos descomponer en el flujo a través de cada uno de sus lados con lo que tendremos

$$\oint_{\Delta S} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{\Delta S1} \vec{D}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \int_{\Delta S2} \vec{D}_2 \cdot d\vec{S}_2 + \int_{\Delta Sl} \vec{D}_l \cdot d\vec{S}_l$$

donde con el subíndice identificamos el campo o la superficie en cada uno de los medios.

Como estamos interesados en el comportamiento en la superficie de separación, no interesa tener flujo sobre la superficie lateral. Así, tenemos que disminuir la superficie lateral  $\Delta S_l$ , con lo que haremos tender a cero la altura del cilindro  $h \rightarrow 0$ , igualando, además, las superficies superior e inferior  $\Delta S1 = \Delta S2 = \Delta S$ . Falta el cálculo del flujo para  $\Delta S1$  y  $\Delta S2$ , para ello, tomaremos un vector unitario  $\hat{n}$  normal a la superficie de separación entre ambos medios y dirigido al medio 1. Entonces, el flujo queda:

$$\oint_{\Delta S} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{\Delta S} \vec{D}_1 \cdot \hat{n} dS + \int_{\Delta S} \vec{D}_2 \cdot (-\hat{n}) dS =$$

$$= \int_{\Delta S} \hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) dS \quad (2.35)$$

con lo que ya hemos calculado el primer miembro de la ecuación de Gauss. Falta por calcular la carga libre total dentro del volumen. En general será:

$$Q = \int_V \rho dV + \int_{\Delta S} \sigma dS$$

correspondiente a la densidad de carga volúmica y la densidad de carga superficial que pueda haber dentro del cilindro. Al hacer  $h \rightarrow 0$  el volumen también tiende a cero, con lo que la contribución a la densidad de carga volúmica se anula y sólo queda la densidad de carga superficial. A partir de aquí, igualando con (2.35), obtenemos

$$\int_{\Delta S} \hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) dS = \int_{\Delta S} \sigma dS$$

Esta igualdad debe cumplirse para cualquier superficie por lo que las dos funciones dentro de las integrales deben ser iguales. Así obtenemos la condición de contorno para las componentes normales del vector desplazamiento:

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma \quad (2.36)$$

Para entender esta ecuación debemos pensar que, al multiplicar escalarmente por  $\hat{n}$ , sólo sobreviven la componente normal a la superficie de separación de  $\vec{D}$ . Así pues, *la diferencia (si existe) entre las componentes normales del vector desplazamiento, en los puntos entre dos medios materiales es debida a una densidad superficial de carga libre.*

Como hemos comentado, la ecuación de Faraday en forma integral nos va a proporcionar más información sobre la continuidad de los campos eléctricos:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Para ello, como muestra la figura 2.19, aplicaremos esa ley sobre un elemento de circulación que atraviese la superficie. En el cálculo necesitamos definir dos vectores unitarios:  $\hat{n}$ , que es normal a la superficie entre medios, tangente al circuito y dirigido al medio 1, y  $\hat{t}$ , que es normal al circuito y tangente a la superficie entre medios. Utilizaremos estos dos vectores para indicar cualquier dirección en nuestros cálculos. Entonces, la circulación la podemos descomponer en la integral de línea sobre cada uno de sus lados:

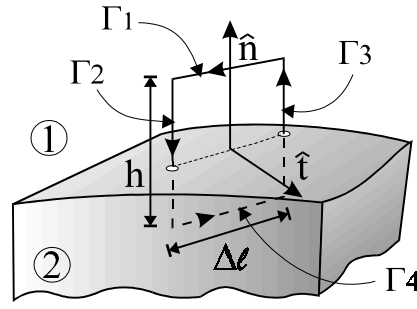


Fig. 2.19 Circuito para el cálculo de Faraday

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma_1} \vec{E}_1 \cdot (\hat{t} \times \hat{n}) dl_1 + \int_{\Gamma_2} \vec{E} \cdot (-\hat{n}) dl_2 + \int_{\Gamma_3} \vec{E}_2 \cdot (\hat{n} \times \hat{t}) dl_3 + \int_{\Gamma_4} \vec{E} \cdot \hat{n} dl_4 = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{t} dS \quad (2.37)$$

Como estamos interesados en conocer los campos sobre la superficie, haremos tender  $h \rightarrow 0$ ; así, los términos de circulación sobre  $\Gamma_2$  y  $\Gamma_4$  podrán ser despreciados y los dos lados restantes se igualan  $\Gamma_1 = \Gamma_3 = \Delta l$ . Además, la superficie sobre la que calculamos la variación del flujo de campo magnético,  $S = h \Delta l$ , al tomar  $h \rightarrow 0$  la podremos despreciar. Así pues, la ecuación (2.37) en estas condiciones se reduce a:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\Delta l} \vec{E}_1 \cdot (\hat{t} \times \hat{n}) dl + \int_{\Delta l} \vec{E}_2 \cdot (\hat{n} \times \hat{t}) dl = 0$$

Como esta igualdad debe cumplirse para cualquier valor de  $\Delta l$ , la única solución es que:

$$\vec{E}_1 \cdot (\hat{t} \times \hat{n}) \Delta l - \vec{E}_2 \cdot (\hat{t} \times \hat{n}) \Delta l = 0$$

Un aspecto importante de este resultado, es que al eliminar las integrales esta relación es independiente del circuito de cálculo elegido, con lo que siempre se cumple. Esta ecuación nos relaciona los campos a ambos lados de la superficie de separación, sin embargo, vamos a encontrar una expresión más útil. Si utilizamos la propiedad vectorial

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) \quad (2.38)$$

y después simplificamos, obtenemos la condición de contorno para las componentes tangenciales del campo eléctrico en una forma más compacta:

$$\hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad (2.39)$$

Para entender esta ecuación, debemos recordar que, al hacer el producto vectorial, las componentes del campo paralelas a  $\hat{n}$  se anulan; luego, la ecuación (2.39) nos indica que *las componentes tangenciales del campo eléctrico a una superficie de separación entre dos medios siempre son continuas (iguales)*.

**Ejemplo 2.15:** Tenemos dos dieléctricos lineales isótropos y homogéneos con permitividad relativa  $\epsilon_{r1}$  y  $\epsilon_{r2}$ , respectivamente. La superficie de separación se encuentra en el plano  $y = 0$  con una densidad de carga  $\sigma$ . Encontrar el campo eléctrico sobre la superficie del segundo medio si sabemos que el campo sobre la superficie en el medio 1 es  $\vec{E}_1|_s = E_{1x}\hat{x} + E_{1y}\hat{y} + E_{1z}\hat{z}$ .

Primero debemos encontrar el vector normal a la superficie, que, como muestra la figura, es  $\hat{n} = -\hat{y}$ . La primera condición de contorno se aplica sobre el vector desplazamiento, luego, teniendo en cuenta que  $\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$ , tenemos

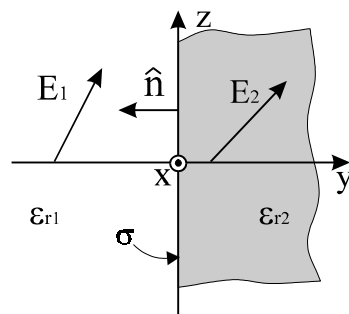


Fig. 2.20

$$-\hat{y} \cdot (\epsilon_{r1} \epsilon_0 \vec{E}_1 - \epsilon_{r2} \epsilon_0 \vec{E}_2) = \epsilon_0 (-\epsilon_{r1} E_{1y} + \epsilon_{r2} E_{2y}) = \sigma$$

donde sólo sobreviven las componentes en la dirección normal  $y$ . Aislando la componente  $y$  del campo en el medio 2 obtenemos:

$$E_{2y}|_s = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_{r2}} + \frac{\epsilon_{r1}}{\epsilon_{r2}} E_{1y}$$

Las componentes  $x$  y  $z$  las encontraremos aplicando la condición de contorno

$$\hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = -\hat{y} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = (E_{1x} - E_{2x})\hat{z} - (E_{1z} - E_{2z})\hat{x} = 0$$

con lo que cada una de las componentes del vector resultante deben ser nulas, así pues

$$E_{1x} = E_{2x}$$

$$E_{1z} = E_{2z}$$

De los resultados anteriores podemos escribir el campo eléctrico en el medio 2 pero en la superficie de separación como:

$$\vec{E}_2|_S = E_{1x}\hat{x} + \left( \frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_{2r}} - \frac{\epsilon_{1r}}{\epsilon_{2r}} E_{1y} \right) \hat{y} + E_{1z}\hat{z}$$

**Ejemplo 2.16:** Campo eléctrico sobre la superficie de un conductor perfecto con densidad de carga superficial  $\sigma$  (no confundir con conductividad  $\sigma = \infty$ )

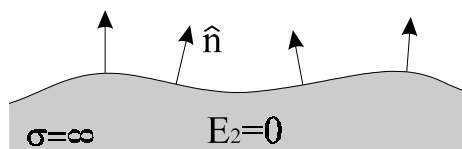


Fig. 2.21

Recordemos que en el interior de un conductor perfecto el campo eléctrico es nulo, con lo que las condiciones de contorno se reducen a

$$\vec{n} \times \vec{E}_1 = 0$$

$$\hat{n} \cdot \vec{D}_1 = \sigma$$

La primera de estas expresiones muestra que sobre la superficie de un conductor perfecto no tenemos componentes tangenciales, es decir, el campo eléctrico siempre es normal a la superficie de un conductor perfecto. La segunda expresión la podemos escribir como

$$\epsilon \hat{n} \cdot \vec{E}_1 = \sigma$$

Esta expresión muestra que existe una relación biunívoca entre la componente normal del campo eléctrico y la densidad de carga superficial. Estos resultados en conductores perfectos coinciden con los obtenidos en electrostática, que, como ya se comentó en la sección 2.3.1, aquí justificamos para campos variables en el tiempo.

## 2.4.2 Continuidad de los campos magnéticos

Procederemos como para los campos eléctricos, analizando la información contenida en la ecuación de Gauss para el campo magnético y para la ecuación de Ampère-Maxwell. La primera de ellas es:



$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Para ello tomaremos el mismo elemento de superficie de la figura 2.18. Entonces tendremos el flujo como

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{\Delta S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \int_{\Delta S_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_2 + \int_{\Delta S_l} \vec{B} \cdot d\vec{S}_l = 0$$

donde si tomamos  $h \rightarrow 0$  y hacemos las mismas suposiciones que en la sección 2.4.1, obtenemos

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad (2.40)$$

que nos da la condición de contorno para la componente normal de los campos inducción magnética. Esta nos dice que las *componentes campo  $\vec{B}$  normales a la superficie de separación entre dos medios del siempre deben ser continuas.*

Por último analizaremos qué ocurre con las componentes tangenciales de los campos magnéticos. Para ello analizaremos la información contenida en la ecuación de Ampère-Maxwell:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

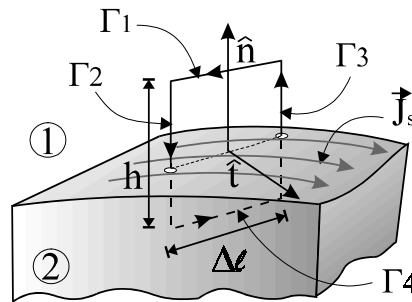


Fig. 2.22 Circuito para el cálculo de Ampère-Maxwell

En el cálculo elegiremos un circuito como el de la figura 2.22 que en general estará atravesado por una densidad de corriente. Al igual que para las componentes tangenciales del campo eléctrico definiremos dos vectores unitarios  $\hat{n}$  y  $\hat{t}$  que serán respectivamente normal y tangente a la superficie de separación. Entonces la circulación puede escribirse:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma_1} \vec{H}_1 \cdot (\hat{t} \times \hat{n}) dl_1 + \int_{\Gamma_2} \vec{H} \cdot (-\hat{n}) dl_2 \\ \int_{\Gamma_3} \vec{H}_2 \cdot (\hat{n} \times \hat{t}) dl_3 + \int_{\Gamma_4} \vec{H} \cdot \hat{n} dl_4$$

Si hacemos tender  $h \rightarrow 0$ , obtenemos

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{\Delta l} \vec{H}_1 \cdot (\hat{t} \times \hat{n}) dl + \int_{\Delta l} \vec{H}_2 \cdot (\hat{n} \times \hat{t}) dl = \\ = \int_{\Delta l} (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot (\hat{t} \times \hat{n}) dl \quad (2.41)$$

Falta calcular los otros términos. Respecto al término de corriente de desplazamiento al hacer  $h \rightarrow 0$  tenemos que la superficie de integración  $S = h\Delta l$  se hace cada vez menor, con lo que el resultado final será nulo:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = 0$$

Por lo que respecta a las corrientes, las podemos descomponer en una densidad volúmica más otra superficial:

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J}_v \cdot \hat{t} dS + \int_{\Delta l} \vec{J}_s \cdot \hat{t} dl \quad (2.42)$$

donde al disminuir la superficie sólo sobrevive el término de densidad de corriente superficial. Igualando (2.41) y (2.42) obtenemos

$$\int_{\Delta l} (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot (\hat{t} \times \hat{n}) dl = \int_{\Delta l} \vec{J}_s \cdot \hat{t} dl$$

Utilizando la relación vectorial (2.38) y teniendo en cuenta que la igualdad debe cumplirse para cualquier  $\Delta l$  obtenemos la cuarta condición de contorno:

$$\hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s \quad (2.43)$$

En este caso, *las componentes tangenciales del campo magnético en la superficie de separación entre dos medios pueden ser discontinuas siendo la causa (o la consecuencia) la densidad de corriente superficial.*

En las condiciones de contorno es importante tener presente que el vector  $\hat{n}$  se ha tomado siempre apuntando al medio 1, o si no la dirección de  $\vec{J}_s$  o el signo de la densidad de carga serían erróneos.

**Ejemplo 2.17:** Un medio magnético con permeabilidad relativa  $\mu_r$  está separado del vacío por una superficie  $y = 0$  por donde pasa una densidad de corriente superficial  $\vec{J}_s = J_x \hat{x}$ . Hallar el campo magnético en la superficie del material si el campo justo sobre la superficie pero en el vacío es

$$\vec{H}|_S = H_{x1} \hat{x} + H_{y1} \hat{y} + H_{z1} \hat{z}.$$

Definiremos como medio 1 el vacío y como medio 2 el material magnético tal como muestra la figura 2.23. En esta situación el vector normal a la superficie de separación será  $\hat{n} = -\hat{y}$  y las condiciones de contorno que deben cumplir serán:

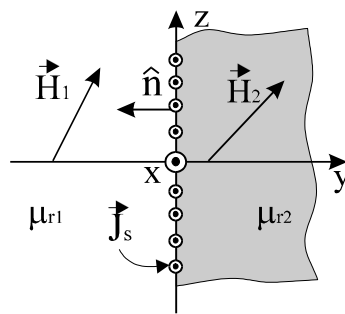


Fig. 2.23

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$$

De la primera de ellas tenemos:

$$\hat{n} \cdot (\mu_{r1} \mu_0 \vec{H}_1 - \mu_{r2} \mu_0 \vec{H}_2) = 0$$

$$\Rightarrow -H_{y1} + \mu_{r2} H_{y2} = 0 \Rightarrow H_{y2} = \frac{H_{y1}}{\mu_{r2}}$$

De la segunda:

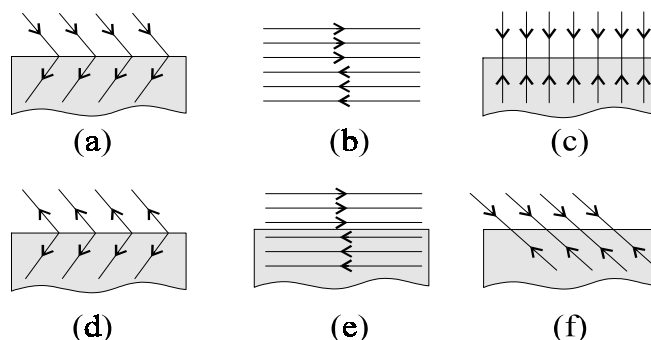
$$-\hat{y} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = J_x \hat{x} \Rightarrow (H_{x1} - H_{x2}) \hat{z} - (H_{z1} - H_{z2}) \hat{x} = J_x \hat{x}$$

donde, igualando componentes, obtenemos  $\Rightarrow \begin{cases} H_{x2} = H_{x1} \\ H_{z2} = J_x + H_{z1} \end{cases}$

con lo que el campo magnético justo en la superficie, pero en el medio material, y es:

$$\vec{H}_2|_S = H_{x1} \hat{x} + \frac{H_{y1}}{\mu_{r2}} \hat{y} + (H_{z1} - J_x) \hat{z}$$

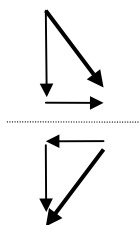
**Ejemplo 2.18:** Determinar cuál de los siguientes esquemas corresponden a campos eléctricos, magnéticos o ninguno de los dos.



Las líneas con flechas representan líneas de campo, y de distinto color se ha pintado el medio material, mientras que el vacío lo está de blanco. En la superficie de separación pueden haber densidades de carga o corriente superficiales.

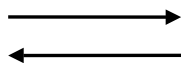
Para saber si un determinado campo vectorial corresponde a un campo eléctrico o magnético éste debe cumplir las ecuaciones de Maxwell. Como no conocemos la expresión matemática correspondiente a los campos del esquema tenemos que utilizar otra herramienta. Las condiciones de contorno se derivan de las ecuaciones de Maxwell con lo que son una alternativa en la situación presente. Las líneas de campo tan sólo dan información de la dirección y no de la magnitud; así pues, nos fijaremos en la primera para determinar que condiciones de contorno pueden cumplirse, y a partir de aquí el tipo de campo.

a)



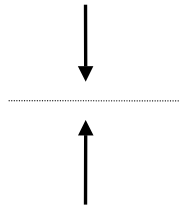
Si descomponemos las líneas de campo en su componentes normal y tangente a la superficie, tal como muestra el esquema, vemos que las componentes tangenciales son discontinuas (apuntan en distinta dirección) mientras las componentes normales son continuas (apuntan en la misma dirección). Estas son las características o condiciones de continuidad de un campo magnético y como ambas condiciones se cumplen simultáneamente podría corresponder a un campo  $\vec{B}$  o  $\vec{H}$ .

b)



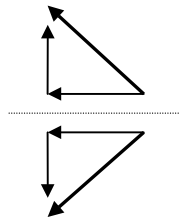
El esquema no muestra una superficie de separación entre las líneas de campo. En cambio, sí aparece una transición abrupta (discontinuidad) de la dirección del campo. Las condiciones de contorno nos dicen que si tenemos discontinuidad de los campos debe haber una superficie de separación con cargas o corriente. Este no es el caso; luego no puede corresponder a un campo eléctrico ni magnético.

c)



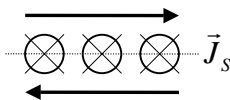
En el tercer esquema tan sólo tenemos componentes normales discontinuas. Las condiciones de contorno para el campo eléctrico permiten la discontinuidad de las componentes normales, que estará asociada a una densidad de carga superficial. Al no tener información sobre las componentes tangenciales, podemos determinar que este caso corresponde a un campo  $\vec{E}$  o  $\vec{D}$ . En concreto, podría ser el campo creado por una superficie infinita con una densidad de carga superficial negativa y constante.

d)



La descomposición de las líneas de campo muestra que las componentes tangenciales son continuas (mismo sentido) mientras que las componentes normales son discontinuas (sentido contrario). Estas dos características son las condiciones de contorno que debe cumplir los campos eléctricos; luego corresponde a un campo  $\vec{E}$  o  $\vec{D}$ .

e)

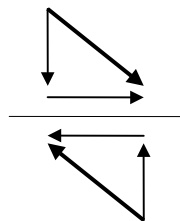


En este caso sólo tenemos componentes tangenciales que son discontinuas. Los campos que permiten la discontinuidad de las componentes tangenciales son los campos magnéticos, debido a una densidad de corriente superficial. Al aplicar la condición de contorno

$$\hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$$

la densidad de corriente debe ir hacia dentro del papel.

f)



La descomposición en el último caso muestra que ni las componentes tangenciales ni las normales son continuas. De las condiciones de contorno sabemos que las dos componentes de los campos no pueden ser simultáneamente discontinuas; luego el esquema no puede corresponder a un campo electromagnético.

## 2.5 Energía de los campos electromagnéticos

El gran interés que tiene el estudio de los campos electromagnéticos es debido a una razón fundamental: la capacidad que tienen de transportar energía. Este hecho tiene una gran importancia ya que es el responsable de que la energía del sol llegue a nosotros en forma de campos electromagnéticos, como es la luz, y permita la existencia de vida sobre la Tierra. Ya desde un punto de vista tecnológico, para transmitir información de un punto a otro

necesitamos “escribirla” sobre algún soporte y transportarla. El soporte óptimo es la energía y el medio de transporte más eficaz los campos electromagnéticos. Esto hace que todos los sistemas de comunicación actuales estén basados en ellos. Como veremos en el capítulo 3, el transporte de energía está asociado a la propagación de ondas electromagnéticas. En esta sección veremos qué ocurre con la energía suministrada a los campos electromagnéticos, utilizando criterios de conservación de la energía y las ecuaciones de Maxwell. El proceso en la deducción de las distintas contribuciones energéticas es lo que se conoce como teorema de Poynting.

### 2.5.1 Potencia aplicada sobre portadores de carga

El primer paso de nuestro análisis energético será estudiar el intercambio energético entre la materia y los campos electromagnéticos. Recordemos que la materia está compuesta de cargas. Así pues, este intercambio estará relacionado con el trabajo que realizarán los campos sobre las cargas o al contrario, las cargas contra los campos.

El trabajo sobre una carga puntual  $q$  que se desplaza un  $d\vec{r}$  vendrá dado por

$$dW_q = \vec{F} \cdot d\vec{r} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r}$$

donde vemos que la fuerza que realiza el trabajo sobre las cargas es la fuerza de Lorentz. El trayecto recorrido lo podemos poner en función de la velocidad de la carga como  $d\vec{r} = \vec{v} dt$ , con lo que el trabajo quedará:

$$dW_q = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = q \vec{E} \cdot \vec{v} dt \quad (2.44)$$

expresión que se ha obtenido teniendo en cuenta que  $\vec{v} \times \vec{B}$  y  $\vec{v}$  son ortogonales entre sí. El resultado es importante, ya que muestra que *el campo magnético no realiza trabajo sobre las cargas* (o la materia), o sea, que no puede ser utilizado para aumentar la energía de las cargas. El trabajo total dependerá del tiempo que los campos actúen sobre las cargas. Así pues, nos será más cómodo trabajar con potencias. De (2.44) podemos definir la potencia que actúa sobre una carga

$$P_q = \frac{dW_q}{dt} = q \vec{E} \cdot \vec{v}$$

Falta generalizar la expresión para el conjunto del material, para ello consideraremos que el número de cargas por unidad de volumen es  $N$  y que todas tienen una velocidad  $\vec{v}$ . Entonces podemos definir la potencia realizada por los campos sobre un diferencial de volumen como

$$dP = Nq \vec{E} \cdot \vec{v} dV$$

El movimiento de las cargas será debido a los campos, luego creará una corriente de conducción. Teniendo en cuenta que la densidad de corriente de conducción es  $\vec{J}_c = Nq \vec{v}$ , podemos definir la potencia realizada por los campos sobre las cargas por unidad de volumen (densidad de potencia sobre las cargas) como

$$\frac{dP}{dV} = \vec{J}_c \cdot \vec{E} \quad W/m^3 \quad (2.45)$$

En el proceso que hemos seguido hemos considerado que los campos suministran energía a la materia; así diremos que los campos disipan energía. Si hiciéramos una analogía con teoría de circuitos, estaríamos en la zona de carga y de hecho (2.45) representa las pérdidas óhmicas en el material. Estaremos en esta situación siempre que las corrientes vayan en la dirección de los campos como son las corrientes de conducción. Cuando la energía pasa de la materia a los campos, diremos que estamos generando campos electromagnéticos, es decir, desde un punto de vista de teoría de circuitos estamos en la zona de generador. En este caso las corrientes (cargas) van en sentido contrario de los campos, con lo que las cargas pierden energía cinética y puede pasar a los campos. La potencia suministrada a los campos será

$$P = - \int_V \vec{J}_g \cdot \vec{E} dV$$

donde el signo negativo simplemente indica que las corrientes y los campos van en sentido contrario, con lo cual generamos campos electromagnéticos.

### 2.5.2 Principio de conservación de la energía. Teorema de Poynting

“La energía no se crea ni se destruye, sólo se transforma”. Este es uno de los principios básicos de la física y lo aplicaremos al electromagnetismo. El principio de conservación en el caso en que la materia suministre una densidad de potencia a un volumen  $V$ , puede ser escrito de forma matemática como

$$- \int_V \vec{J}_g \cdot \vec{E} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V U dV + \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} + \int_V \vec{J}_c \cdot \vec{E} dV \quad (2.46)$$

donde  $U$  es la densidad de energía electromagnética y  $\vec{P}$  la densidad de flujo de potencia. El término de la izquierda nos está dando la potencia total suministrada por el generador (subíndice  $g$ ) al volumen y que será invertida en los tres términos de la derecha. El primero de ellos corresponde al aumento de energía electromagnética que experimenta la región (o el

volumen  $V$ ). El aumento lo expresamos como la derivada temporal y la energía total como la integral de  $U$  sobre el volumen. En el segundo término, al integrar  $\vec{P}$  obtenemos la potencia total que atraviesa la superficie que encierra el volumen, es decir, la potencia que abandona la región. Por último, tenemos el término que ya conocemos y que incluye las pérdidas óhmicas. Resumiendo, (2.46) nos está diciendo que la potencia suministrada a una región determinada por el material le puede suceder tres cosas: puede aumentar la energía electromagnética presente en la región, puede transformarse en pérdidas óhmicas y el resto de potencia que no contribuye a estas dos es porque abandona el volumen.

El siguiente paso es determinar las expresiones de  $U$  y  $\vec{P}$ , desarrollo que constituye el teorema de Poynting. Imaginemos que se alcanza una situación de equilibrio en el interior de nuestro volumen, donde unos portadores ceden energía a los campos y otros la capturan en una cierta proporción. En cualquier caso, podemos asumir que la corriente es única. Escribiremos  $\vec{J} = \vec{J}_g + \vec{J}_c$ , prescindiendo del papel concreto del portador en cada instante, con lo que (2.46) queda

$$-\int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV = \int_V \frac{\partial U}{\partial t} dV + \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad (2.47)$$

De la ecuación de Ampère-Maxwell podemos aislar  $\vec{J}$  como

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

por lo que el término de la izquierda en (2.47) queda

$$\begin{aligned} -\int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV &= -\int_V \vec{E} \cdot \left( \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dV = \int_V \left( \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} \right) dV = \\ &= \int_V \left( \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} + \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \right) dV \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha utilizado la propiedad vectorial

$$\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \nabla \times \vec{a} - \vec{a} \cdot \nabla \times \vec{b}$$

Ya sólo queda utilizar la ley de Faraday para eliminar el rotacional del campo eléctrico y aplicar el teorema de la divergencia en el último término, con lo que obtendremos la expresión final que nos interesa:



$$-\int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV = \int_V \left( \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV + \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} \quad (2.48)$$

Si comparamos esta expresión con (2.47) podremos identificar la expresión de  $U$  y  $\vec{P}$ , con lo que obtenemos:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

que nos da la variación de densidad volúmica de energía, y la expresión para la densidad de flujo de potencia (o densidad de energía por unidad de tiempo o y superficie)

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (W/m^2) \quad (2.49)$$

más comúnmente llamado vector de Poynting.

Vamos a analizar estos resultados, empezando por la variación de energía electromagnética. Si queremos aislar  $U$  debemos integrar la ecuación diferencial en derivadas parciales. La integración será posible dependiendo de la expresión de las relaciones constitutivas del medio. Para medios lineales isótropos y homogéneos tenemos

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \epsilon \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \epsilon |\vec{E}|^2 \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \right)$$

Siguiendo el mismo proceso para la parte correspondiente a los campos magnéticos, la densidad de energía electromagnética para medios lineales isótropos y homogéneos queda

$$U = \frac{1}{2} \epsilon |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2} \mu |\vec{H}|^2 = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \quad (J/m^3) \quad (2.50)$$

Este resultado muestra que la densidad de energía almacenada en los campos electromagnéticos la podemos dividir en dos: densidad de energía eléctrica  $U_e$  y magnética  $U_m$ . La expresión de cada una de estas componentes quedará:

$$U_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \quad U_m = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$$

Falta discutir las implicaciones del vector de Poynting. Como comentamos al principio de la sección, desde el punto de vista de las comunicaciones estamos interesados en el transporte de energía. Pues bien, precisamente el vector de Poynting nos indica la energía por unidad de tiempo y de superficie que se propaga y, además, su dirección. Desde el punto

de vista de las telecomunicaciones, éste es el resultado del desarrollo anterior que más interesa.

**Ejemplo 2.19:** Los terminales de una batería se encuentran conectados entre sí por un hilo conductor de conductividad  $\sigma$  ( $\Omega^{-1}m^{-1}$ ) (Fig. 2.24a). Lejos del generador podemos considerar un segmento del hilo aproximadamente como un cilindro de radio  $a$  inmerso en un campo eléctrico uniforme  $\vec{E} = E_0 \hat{z}$ , con  $E_0$  constante (Fig. 2.24b). Calcular las pérdidas óhmicas y el flujo del vector de Poynting.

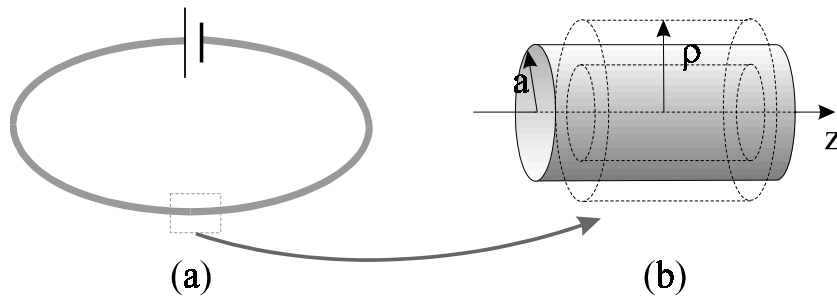


Fig. 2.24

Las pérdidas óhmicas vendrán dadas por  $\int_V \vec{J}_C \cdot \vec{E} dV$

Por otro lado, la ley de Ohm nos dice que dentro el conductor  $\vec{J}_C = \sigma \vec{E}$ , con lo cual, a partir de la expresión del campo y tomando el volumen de integración mostrado en la figura 2.24b, las pérdidas para una longitud  $l$  vendrán dadas por

$$\int_V \vec{J}_C \cdot \vec{E} dV = \int_V \sigma E_0^2 dV = \int_{z=0}^l \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^a \sigma E_0^2 \rho d\rho d\phi dz = \sigma E_0^2 a^2 \pi l$$

Teniendo en cuenta que, al ser los campos constantes, la intensidad la podemos escribir  $I = \sigma A E_0$ , donde  $A = \pi a^2$  es el área de la sección del conductor, que la resistencia es  $R = l / \sigma$  obtenemos el resultado familiar de

$$\int_V \vec{J}_C \cdot \vec{E} dV = I^2 R$$

Para calcular el vector de Poynting necesitamos conocer el campo magnético alrededor del cable. Para ello aplicaremos Ampère

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

para  $\rho < a$ , con lo que obtenemos

$$H_\phi \cdot 2\pi\rho = \sigma E_0 \cdot \pi\rho^2 \Rightarrow \vec{H} = \frac{\rho}{2} \sigma E_0 \hat{\phi}$$

y para  $\rho > a$

$$H_\phi \cdot 2\pi\rho = \sigma E_0 \cdot \pi a^2 \Rightarrow \vec{H} = \frac{a^2}{2\rho} \sigma E_0 \hat{\phi}$$

Ahora ya estamos en disposición de calcular el vector de Poynting para la región en el interior y el exterior del conductor:

$$\rho < a \quad \vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} = E_0 \hat{z} \times \frac{\rho}{2} \sigma E_0 \hat{\phi} = -\frac{\rho}{2} \sigma E_0^2 \hat{\rho}$$

$$\rho > a \quad \vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} = E_0 \hat{z} \times \frac{a^2}{2\rho} \sigma E_0 \hat{\phi} = -\frac{a^2}{2\rho} \sigma E_0^2 \hat{\rho}$$

El signo negativo del vector de Poynting indica que el flujo de potencia es hacia el conductor. Si encontramos cuál es la potencia total que fluye hacia el conductor, deberemos integrar el vector de Poynting sobre las superficies de la figura 2.24b.

$$\text{Para } \rho < a \quad \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \int_0^l \int_0^{2\pi} -\frac{\sigma E_0^2}{2} \rho^2 dz d\phi = -\sigma E_0^2 \pi \rho^2 l$$

$$\text{y para } \rho > a \quad \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \int_0^l \int_0^{2\pi} -\frac{\sigma E_0^2}{2} a^2 dz d\phi = -\sigma E_0^2 \pi a^2 l = -I^2 R$$

Como vemos para  $\rho > a$  (fuera del conductor) obtenemos el mismo valor que para las pérdidas óhmicas pero cambiado de signo. Este resultado muestra como la energía electromagnética almacenada en los campos fluye hacia el conductor. Mientras estamos fuera del conductor el flujo es constante (independiente de la distancia entre la superficie de cálculo y el conductor), pero dentro del conductor el flujo disminuye con  $\rho$ , ya que parte de la energía pasa de los campos a la materia debido a las pérdidas óhmicas (se disipa en forma de calor). Así, estamos ante un ejemplo de conservación de la energía en que, al estar en un caso estático, no aparece una variación de la energía almacenada en los campos y como estamos fuera del generador el principio de conservación se reduce a

$$\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} + \int_V \vec{J}_C \cdot \vec{E} dV = 0$$

Vamos a discutir que sucedería en el ejemplo anterior si el hilo estuviera formado con un conductor perfecto. Si nos fijamos en las expresiones del vector de Poynting dentro y fuera del conductor, dependen de  $\sigma E^2$ . Si el conductor es perfecto, es decir  $\sigma = \infty$ , y el campo eléctrico no es nulo, este resultado implicaría que el flujo de potencia es infinito. Evidentemente, la potencia y, por lo tanto, la energía de ningún sistema puede ser infinita. En consecuencia, si queremos tratar el caso idealizado de conductores perfectos, el campo en el interior del conductor debe ser nulo, resultado que ya se vio en la sección 2.3.1 y que aquí reafirmamos.

## 2.6 Aproximación estática de las ecuaciones de Maxwell

En el primer capítulo se ha analizado la parte del electromagnetismo conocida como estática. Ésta no considera las variaciones en el tiempo de las fuentes ni de los campos, que es lo mismo que afirmar que estamos suficientemente lejos de cualquier régimen transitorio. La estática no constituye una parte aislada del electromagnetismo, también está descrita por las ecuaciones de Maxwell. En el primer capítulo vimos que la mayoría de los fenómenos estáticos pueden abordarse mediante las ecuaciones de Poisson y de Laplace para los potenciales eléctricos y el potencial vector más unas determinadas condiciones de contorno. Aquí vamos a deducir las ecuaciones para los potenciales a partir de Maxwell, con lo que enlazaremos con el capítulo anterior, demostrando que constituye un régimen particular del electromagnetismo descrito por Maxwell. En esta sección no se resolverán ejemplos ya que en el capítulo primero hay gran cantidad de ellos.

La primera consecuencia de la no dependencia con el tiempo de los campos es que las derivadas temporales en las ecuaciones de Maxwell se anulan, con lo cual las ecuaciones quedan

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= 0 & \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} & \vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \end{aligned}$$

donde además hemos escrito las relaciones constitutivas del medio.

Una vez escritas podemos observar una segunda consecuencia de gran importancia: *las ecuaciones para los campos eléctricos y magnéticos están desacopladas y, por lo tanto, pueden existir por separado dando lugar a la electrostática y la magnetostática.*

En total serán cuatro ecuaciones diferenciales en derivadas parciales para el campo eléctrico y cuatro más para el campo magnético, cuya solución tendrá significado físico si

cumple unas determinadas condiciones de contorno. A continuación analizaremos por separado los campos electrostáticos y los magnetostáticos con un objetivo: reducir el número de ecuaciones que describen los campos aunque sea a costa de aumentar el orden de la derivada.

### 2.6.1 Electrostatica

El sistema de ecuaciones que debemos resolver para encontrar los campos eléctricos, como ya hemos indicado, es:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\end{aligned}\tag{2.51}$$

Para resolver este sistema tenemos que conocer la relación entre el campo eléctrico y el vector desplazamiento que vendrá dada por la relación constitutiva del medio. La ecuación de Faraday para electrostática nos dice que el rotacional del campo eléctrico es nulo y de análisis vectorial sabemos que

$$\nabla \times (\nabla \Phi) = 0$$

Es decir, el rotacional del gradiente de una función o campo escalar siempre es nulo. Aplicándolo al campo eléctrico, como su rotacional es nulo, tenemos que siempre puede ser definido como el gradiente de un campo escalar  $\Phi$  al que llamaremos potencial eléctrico:

$$\vec{E} = -\nabla \Phi\tag{2.52}$$

El significado físico del potencial eléctrico, aunque lo hemos definido desde un punto de vista matemático, es la energía potencial que tiene una carga de valor unidad y positiva en el seno de un campo eléctrico. Este tema es ampliamente tratado en el capítulo anterior. En dinámica, el rotacional del campo eléctrico no es nulo (ec. de Faraday), con lo cual, el campo eléctrico no vendrá dado por (2.52). La expresión del potencial para campos dependientes con el tiempo será hallada en el capítulo 6 dedicado a radiación.

Falta introducir información dada por (2.52) en la ecuación de Gauss, pero para ello necesitaremos conocer la relación constitutiva del medio. Para medios lineales isótropos y homogéneos ésta es  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ , con lo que tendremos

$$\nabla \vec{D} = \epsilon \nabla \vec{E} = \epsilon \nabla (-\nabla \Phi) = -\epsilon \nabla^2 \Phi = \rho$$

y de aquí obtenemos la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.53)$$

que en el caso de tener una densidad de carga volúmica nula se reduce a la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.54)$$

donde  $\nabla^2 = \Delta$  es el operador diferencial laplaciana, que se definió en la sección 1.1.8, aplicado sobre un campo escalar.

Una vez encontradas las ecuaciones de Poisson y Laplace, los problemas de electrostática consisten en resolver estas ecuaciones para unas determinadas condiciones de contorno, y una vez encontrado el potencial, aplicando (2.52) determinar los campos eléctricos. Un aspecto importante en la resolución de las ecuaciones de Poisson y Laplace es el teorema de unicidad tratado ampliamente en la sección 1.1.10.

### 2.6.2 Magnetostática

Las ecuaciones que rigen la magnetostática son

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \end{aligned} \quad (2.55)$$

Con lo que volvemos a tener un total de cuatro ecuaciones en derivadas parciales más la relación constitutiva del medio entre  $\vec{H}$  y  $\vec{B}$ .

De análisis vectorial sabemos que la divergencia del rotacional de un vector siempre es nula

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

Como la divergencia del campo magnético es siempre nula, podemos afirmar que es el rotacional de otro campo vectorial

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.56)$$

donde  $\vec{A}$  recibe el nombre de potencial vector. A diferencia del potencial eléctrico, el potencial vector no está relacionado con ninguna magnitud física, simplemente es una consecuencia de las propiedades matemáticas de los campos vectoriales que nos facilitará la

resolución. Otra diferencia con respecto al potencial eléctrico es que (2.56) es válida tanto para campos en estática como en dinámica.

Teniendo en cuenta que en medios lineales isótropos y homogéneos  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  e introduciendo (2.56) en la ecuación de Ampère, obtenemos

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J} \quad (2.57)$$

donde hemos expresado el doble rotacional como el gradiente de la divergencia menos la laplaciana, que en este caso actúa sobre un vector. Los campos vectoriales quedan determinados una vez se conoce su divergencia y su rotacional. En el caso del potencial vector, el rotacional es el campo inducción magnética, falta por definir su divergencia. Teniendo en cuenta que el potencial vector es un artilugio matemático que nos facilitará el análisis de la magnetostática, podemos elegir arbitrariamente el valor de la divergencia. Elegiremos

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (2.58)$$

de manera que la ecuación (2.57) se simplificará a

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad (2.59)$$

En coordenada cartesianas la laplaciana de un vector es la laplaciana de cada una de sus componentes con lo que (2.59) puede escribirse

$$\nabla^2 A_x = -\mu J_x$$

$$\nabla^2 A_y = -\mu J_y$$

$$\nabla^2 A_z = -\mu J_z$$

con lo que formalmente tendremos tres ecuaciones de Poisson que describirán nuestro problema. La resolución de problemas de magnetostática consiste en resolver estas ecuaciones, teniendo en cuenta que el resultado debe cumplir (2.58). En este proceso no hemos conseguido reducir el número de ecuaciones, pero el resultado final es una ecuación, la de Poisson, con la que estamos acostumbrados a trabajar y de la que conocemos su solución.

## 2.7 Ecuaciones de Maxwell en régimen senoidal permanente

Las ecuaciones de Maxwell son un sistema de ecuaciones acopladas en derivadas parciales. Si las relaciones constitutivas del medio son lineales, también lo serán las

ecuaciones. Esto implica que si las fuentes tienen una dependencia temporal de un tipo determinado, los campos seguirán la misma dependencia. Nosotros impondremos una dependencia de tipo senoidal por las dos razones siguientes:

- Mediante las fuentes (cargas y corrientes) se generan los campos, y si controlamos las fuentes, indirectamente, determinamos los campos; así, realizaremos estas fuentes con la dependencia temporal que nos interese. En muchos casos prácticos la dependencia temporal que nos interesa es senoidal: sistemas de radiodifusión, radioenlaces o comunicación por satélite.
- Los campos con dependencias temporales arbitrarias en el tiempo pueden ser expresados como la superposición de un continuo de campos con dependencia senoidal. De esta manera podemos utilizar técnicas de transformadas de Fourier en la resolución de problemas con dependencia temporal arbitraria.

Cuando las magnitudes que intervienen tienen una dependencia temporal senoidal, diremos que estamos en régimen senoidal permanente (R.S.P).

### 2.7.1 Fasores y campos instantáneos

Si consideramos la densidad de carga en régimen senoidal permanente la podremos escribir como

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}) \cos(\omega t + \theta_\rho(\vec{r}))$$

donde aparece explícitamente la dependencia en  $t$ , siendo  $\rho_0(\vec{r})$  la amplitud o valor máximo que puede tomar la carga (indicada por el subíndice 0) y que en general dependerá de la posición; la pulsación es  $\omega = 2\pi f$ , donde  $f$  es la frecuencia de oscilación; y  $\theta_\rho(\vec{r})$  es una fase que también puede depender de la posición (el subíndice indica que corresponde a la densidad de carga). Esta distribución de cargas creará un campo eléctrico

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_x(\vec{r}, t) \hat{x} + E_y(\vec{r}, t) \hat{y} + E_z(\vec{r}, t) \hat{z}$$

donde cada componente tendrá una forma

$$E_i(\vec{r}, t) = E_{0i}(\vec{r}) \cos(\omega t + \theta_{Ei}(\vec{r}))$$

y de la misma forma podríamos escribir la expresión para los campos magnéticos o las densidades de corriente. Cuando se escribe de forma explícita la dependencia temporal de los campos se llama *campos instantáneos* ya que nos da su valor en cada instante de tiempo.



Desde un punto de vista matemático, las funciones senoidales con diferentes pulsaciones son linealmente independientes; luego, en nuestro caso, como las ecuaciones son lineales, la pulsación debe ser la misma para todas las magnitudes. Esto implica que una vez determinada, es una información de la que no tenemos que preocuparnos. Así pues, nos proponemos definir una magnitud que nos simplifique los cálculos y que tan sólo tenga información sobre la amplitud y fase. Los fasores son una magnitud compleja que contienen esta información y que expresamos como:

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0(\vec{r})e^{j\theta_\rho(\vec{r})}$$

donde  $j = \sqrt{-1}$  y explícitamente vemos que el fasor tan sólo depende de la posición y no del tiempo. Los fasores pueden ser fácilmente relacionados con sus magnitudes instantáneas, simplemente multiplicándolos por un termino de fase donde aparece la pulsación y quedándonos con la parte real, es decir

$$\rho(\vec{r}, t) = \Re\{\rho(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t}\} = \Re\{\rho_0(\vec{r})e^{j\theta_\rho(\vec{r})}e^{j\omega t}\} = \rho_0(\vec{r})\cos(\omega t + \theta_\rho(\vec{r}))$$

donde se ha utilizado:

$$e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi$$

De la misma forma que hemos procedido con la densidad de carga, podemos definir el fasor campo eléctrico

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_x(\vec{r})\hat{x} + E_y(\vec{r})\hat{y} + E_z(\vec{r})\hat{z}$$

que para una de sus componentes será

$$E_i(\vec{r}) = E_{0i}(\vec{r})e^{j\theta_{Ei}(\vec{r})}$$

y a partir de él encontrar el campo eléctrico instantáneo

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \mathcal{E}_x(\vec{r}, t)\hat{x} + \mathcal{E}_y(\vec{r}, t)\hat{y} + \mathcal{E}_z(\vec{r}, t)\hat{z}$$

donde cada una de las componentes se habrá encontrado a partir del fasor como

$$\mathcal{E}_i(\vec{r}, t) = \Re\{E_{0i}(\vec{r})e^{j\theta_{Ei}(\vec{r})} \cdot e^{j\omega t}\} = E_{0i}(\vec{r})\cos(\omega t + \theta_{Ei}(\vec{r}))$$

Para distinguir y enfatizar la diferencia entre fasores y campos instantáneos ya hemos usado la nomenclatura que frecuentemente se utiliza: con letra normal indicaremos los fasores ( $E$ ,  $H$ ,  $D$ ,  $B$ ) y con letra caligráfica los campos instantáneos ( $\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{H}$ ,  $\mathcal{D}$ ,  $\mathcal{B}$ ).

### 2.7.2 Ecuaciones de Maxwell en régimen senoidal permanente

Uno de los objetivos de la introducción de la notación fasorial es obtener unas ecuaciones de Maxwell más sencillas haciendo desaparecer las derivadas temporales. Por ejemplo, la derivada temporal del campo magnético la podemos escribir como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \Re\{\vec{B}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t}\} = \Re\left\{\frac{\partial}{\partial t} (\vec{B}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t})\right\} = \Re\{j\omega \vec{B}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t}\}$$

y por otro lado

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \nabla \times \Re\{\vec{E}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t}\} = \Re\{e^{j\omega t} \nabla \times \vec{E}(\vec{r})\}$$

con lo cual la ecuación de Faraday la podemos escribir

$$\Re\{e^{j\omega t} \nabla \times \vec{E}(\vec{r})\} = \Re\{-j\omega \vec{B}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t}\}$$

donde si prescindimos de obtener la parte real y simplificamos las exponenciales, obtenemos la ecuación de Faraday en régimen senoidal permanente:

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = -j\omega \vec{B}(\vec{r}) \quad (2.60a)$$

De la misma manera, el resto de ecuaciones de Maxwell en régimen senoidal permanente son:

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho \quad (2.60b)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad (2.60c)$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r}) + j\omega \vec{D}(\vec{r}) \quad (2.60d)$$

La principal característica de estas ecuaciones es que no aparece la dependencia temporal, que ya sabemos que siempre será armónica, con lo cual, facilita su resolución, ya que tan sólo dependen de las coordenadas espaciales.

**Ejemplo 2.20:** Determinar en qué condiciones el siguiente fasor constituye un campo eléctrico en el vacío.

$$\vec{E}(\vec{r}) = B \sin(\sqrt{k^2 - \beta^2} x) e^{-j\beta z} \hat{y}$$

La primera condición que debe cumplir un campo eléctrico es la ecuación de Gauss que para el vacío es:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

Nuestra expresión del campo tan sólo tiene una componente con lo que la divergencia se reduce a

$$\frac{\partial}{\partial y} E_y = 0$$

que efectivamente es nulo ya que nuestro campo no depende de la coordenada  $y$ .

El siguiente paso es aplicar Faraday y Ampere-Maxwell consecutivamente. Si queremos que éste sea efectivamente un campo eléctrico, el resultado final debe ser la misma expresión del campo dada en el enunciado. El fasor campo magnético puede obtenerse aislando de la ecuación de Faraday

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{r}) &= \frac{\vec{B}(\vec{r})}{\mu_0} = \frac{j}{\omega\mu_0} \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = \frac{j}{\omega\mu_0} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{j}{\omega\mu_0} \left[ -\frac{\partial}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial x} \hat{z} \right] E_y \end{aligned}$$

cuyo resultado es

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{jB}{\omega\mu_0} \left[ j\beta \sin(\sqrt{k^2 - \beta^2} x) \hat{x} + \sqrt{k^2 - \beta^2} \cos(\sqrt{k^2 - \beta^2} x) \hat{z} \right] e^{-j\beta z}$$

Falta encontrar el fasor campo eléctrico aplicando Ampere-Maxwell, que teniendo en cuenta que en el vacío no hay corrientes, puede ser escrito

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\vec{D}(\vec{r})}{\epsilon_0} = \frac{-j}{\omega\epsilon_0} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \frac{-j}{\omega\epsilon_0} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & 0 & H_z \end{vmatrix} = \\ &= \frac{-j}{\omega\epsilon_0} \left[ \frac{\partial}{\partial z} H_x - \frac{\partial}{\partial x} H_z \right] \hat{y} \end{aligned}$$

donde, introduciendo la expresión para el fasor campo magnético, obtenemos

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{k^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0} B \sin(\sqrt{k^2 - \beta^2} x) e^{-j\beta z} \hat{y}$$

Como ya hemos comentado, para que este resultado sea un fasor campo eléctrico debe coincidir con el enunciado. Esto implica que la condición que debe cumplirse es:

$$k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$$

(como veremos en el siguiente capítulo,  $k$  es el número de onda)

**Ejemplo 2.21:** Encontrar los campos instantáneos para el fasor campo magnético encontrados en el ejemplo anterior.

La expresión encontrada para el fasor campo magnético es:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{B}{\omega \mu_0} \left[ -\beta \sin(\sqrt{k^2 - \beta^2} x) \hat{x} + j \sqrt{k^2 - \beta^2} \cos(\sqrt{k^2 - \beta^2} x) \hat{z} \right] e^{-j\beta z}$$

En este caso tenemos dos componentes, con lo que operaremos por separado. Para la componente  $x$  tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_x(\vec{r}, t) &= \Re\{H_x(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t}\} = \Re\left\{\frac{-B}{\omega \mu_0} \beta \sin(\sqrt{k^2 - \beta^2} x) e^{-j\beta z} e^{j\omega t}\right\} = \\ &= \frac{-B}{\omega \mu_0} \beta \sin(\sqrt{k^2 - \beta^2} x) \Re\{e^{j(\omega t - \beta z)}\} = \\ &= \frac{-B\beta}{\omega \mu_0} \sin(\sqrt{k^2 - \beta^2} x) \cos(\omega t - \beta z) \end{aligned}$$

y para la componente  $z$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_z(\vec{r}, t) &= \Re\{H_z(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t}\} = \Re\left\{\frac{jB}{\omega \mu_0} \sqrt{k^2 - \beta^2} \cos(\sqrt{k^2 - \beta^2} x) e^{-j\beta z} e^{j\omega t}\right\} = \\ &= \frac{B}{\omega \mu_0} \sqrt{k^2 - \beta^2} \cos(\sqrt{k^2 - \beta^2} x) \Re\{j e^{j(\omega t - \beta z)}\} \end{aligned}$$

donde teniendo en cuenta que  $j e^{j\theta} = j \cos \theta - \sin \theta$  obtenemos

$$\mathcal{H}_z(\vec{r}, t) = \frac{-B}{\omega \mu_0} \sqrt{k^2 - \beta^2} \cos(\sqrt{k^2 - \beta^2} x) \sin(\omega t - \beta z)$$

con lo que el campo magnético instantáneo se podrá escribir como

$$\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) = \mathcal{H}_x(\vec{r}, t) \hat{x} + \mathcal{H}_z(\vec{r}, t) \hat{z}$$

donde tan sólo falta sustituir por las expresiones de las componentes instantáneas. La componente  $x$  tiene una dependencia temporal en función del coseno, sin embargo, la componente  $z$  depende del seno. Esta diferencia es debida a la fase que se añade a la componente  $z$  por estar multiplicada por  $j$ . Siempre que ocurra esto diremos que las componentes están en cuadratura.

Normalmente trabajaremos con las ecuaciones de Maxwell en R.S.P., con lo que la magnitud normal de trabajo serán los fasores en vez de los campos instantáneos. Por esta razón es importante conocer la expresión del vector de Poynting y la densidad de energía (que serán magnitudes instantáneas) en función de los fasores.

El vector de Poynting instantáneo queda:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{P}}(\vec{r}, t) &= \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) \times \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) = \Re\{\vec{E} e^{j\omega t}\} \times \Re\{\vec{H} e^{j\omega t}\} = \\ &= \frac{1}{2} (\vec{E} e^{j\omega t} + \vec{E}^* e^{-j\omega t}) \times \frac{1}{2} (\vec{H} e^{j\omega t} + \vec{H}^* e^{-j\omega t}) = \\ &= \frac{1}{4} (\vec{E} \times \vec{H} e^{j2\omega t} + \vec{E} \times \vec{H}^* + \vec{E}^* \times \vec{H} + \vec{E}^* \times \vec{H}^* e^{-j2\omega t}) = \\ &= \frac{1}{2} \Re\{\vec{E} \times \vec{H}^*\} + \frac{1}{2} \Re\{\vec{E} \times \vec{H} e^{j2\omega t}\} \end{aligned} \quad (2.61)$$

donde  $*$  indica el complejo conjugado. La primera consecuencia de este resultado es que no podemos escribir el vector de Poynting como la parte real del producto de los fasores campo eléctrico y magnético y la exponencial respecto del tiempo. Esto es debido a que la relación entre el vector de Poynting y los campos no es lineal, con lo cual una variación en los campos no se traduce en el mismo tipo de variación en el vector de Poynting. Esto nos lleva a la segunda consecuencia: la dependencia temporal es distinta a la que presentan los campos. Aparecen dos términos, el primero independiente del tiempo, y el segundo con una pulsación  $2\omega$ , mientras que la pulsación de los campos, recordemos, es  $\omega$ .

Desde el punto de vista de un ingeniero no interesa el flujo de potencia instantáneo a través de una superficie, sino que, más bien, interesa el promedio temporal de potencia o la

potencia efectiva que la atraviesa. Podemos definir el vector de Poynting medio o densidad de flujo de potencia media como la media temporal del vector de Poynting, que matemáticamente escribiremos:

$$\vec{P}_m(\vec{r}) = \langle \vec{\mathcal{P}}(\vec{r}, t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \vec{\mathcal{P}}(\vec{r}, t) dt \quad (2.62)$$

Si introducimos el resultado de (2.61) en (2.62) tenemos que el vector de Poynting medio queda

$$\vec{P}_m(\vec{r}) = \frac{1}{2} \Re \{ \vec{E} \times \vec{H}^* \} \quad (2.63)$$

Este resultado es lógico, ya que la única contribución neta puede estar dada por el primer término en (2.61) y se ve claramente si analizamos los dos términos obtenidos en (2.61) sobre una superficie. En la figura 2.25 vemos cómo el segundo término (al que hemos llamado  $P_2$ ) irá cambiando de sentido con el tiempo mientras que el primero ( $P_1$ ) siempre atraviesa la superficie en el mismo sentido, con lo cual, al ser  $P_2$  una función armónica, su media es cero y no contribuirá a la densidad de flujo de potencia media.

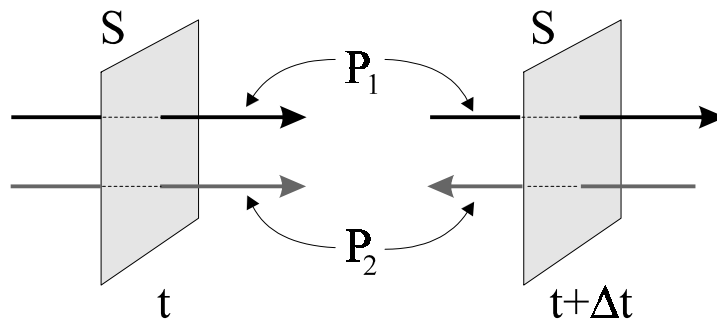


Figura 2.25 Sentido de los términos del vector de Poynting instantáneo para dos tiempos diferentes

**Ejemplo 2.22:** Calcular el vector de Poynting medio para los campos obtenidos en el ejemplo 2.20.

Las expresiones para el fasor campo eléctrico y para el magnético son:

$$\vec{E}(\vec{r}) = B \sin(\sqrt{k^2 - \beta^2} x) e^{-j\beta z} \hat{y}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{jB}{\omega\mu_0} \left[ j\beta \sin(\sqrt{k^2 - \beta^2} x) \hat{x} + \sqrt{k^2 - \beta^2} \cos(\sqrt{k^2 - \beta^2} x) \hat{z} \right] e^{-j\beta z}$$

El primer paso consiste en realizar el producto vectorial

$$\begin{aligned} \vec{E} \times \vec{H}^* &= \frac{B^2}{\omega\mu_0} \beta \sin^2(\sqrt{k^2 - \beta^2} x) \hat{z} + \\ &+ \frac{jB^2}{\omega\mu_0} \sqrt{k^2 - \beta^2} \sin(\sqrt{k^2 - \beta^2} x) \cos(\sqrt{k^2 - \beta^2} x) \hat{x} \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta las propiedades del producto vectorial

$$\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z} \quad \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$$

El vector de Poynting medio viene dado por

$$\vec{P}_m(\vec{r}) = \frac{1}{2} \Re \{ \vec{E} \times \vec{H}^* \}$$

con lo que tan sólo nos interesa las componentes reales de la expresión encontrada anteriormente, en este caso la componente  $z$ . El vector de Poynting medio queda:

$$\vec{P}_m(\vec{r}) = \frac{B^2}{2\omega\mu_0} \beta \sin^2(\sqrt{k^2 - \beta^2} x) \hat{z}$$

Esta expresión indica que la dirección de propagación de la densidad de potencia media es la  $z$ . Si hubiéramos calculado el vector de Poynting instantáneo habríamos obtenido una componente en la dirección de las  $x$ ; sin embargo, su promedio temporal es nulo con lo que no tenemos propagación neta en esta dirección. Esta componente lo que nos indica es que tenemos una oscilación de la energía en la dirección transversal a la de propagación.

Siguiendo un proceso similar a (2.61) la densidad de energía instantánea para medios lineales isotropos y homogéneos puede ser escrita:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} (\epsilon \vec{E} \vec{E} + \mu \vec{H} \vec{H}) = \frac{1}{4} \Re \{ (\epsilon \vec{E} \vec{E} + \mu \vec{H} \vec{H}) e^{j2\omega t} \} + \frac{1}{4} [\epsilon |\vec{E}|^2 + \mu |\vec{H}|^2] \quad (2.64)$$

donde nuevamente aparecerá un término dependiente del tiempo y otro de independiente. Al igual que el vector de Poynting, definiremos la densidad de energía media como:

$$U = \frac{1}{4} \left[ \epsilon |\vec{E}|^2 + \mu |\vec{H}|^2 \right] \quad (2.65)$$

**Ejemplo 2.23:** Se tiene una sección de cable coaxial de longitud  $l$ , radio del conductor interno  $a$  y radio de la superficie interna del conductor externo  $b$ . La sección de cable está cerrada por ambos extremos por conductores. Los fasores campo eléctrico y magnético entre conductores, donde tenemos el vacío, son:

$$\vec{E} = \frac{V}{\ln(b/a)} \frac{\sin(\pi z/l)}{\rho} \hat{\rho} \quad \vec{H} = \frac{jV}{\ln(b/a)} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{\cos(\pi z/l)}{\rho} \hat{\phi}$$

Encontrar el vector de Poynting medio y la energía media almacenada por el campo electromagnético en el interior de la estructura (Fig. 2.26) Se supone que los conductores que constituyen el cable coaxial son perfectos.

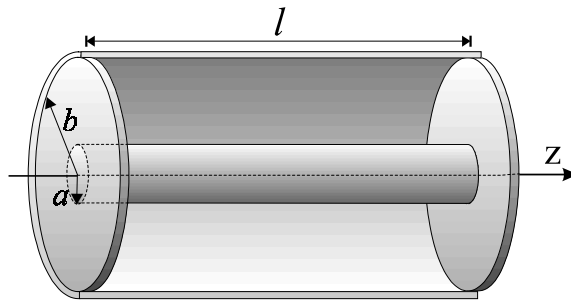


Figura 2.26

Para calcular el vector de Poynting medio debemos realizar el producto vectorial entre  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ . Al ser  $\vec{H}$  imaginario puro, el resultado final también lo será, con lo que el vector de Poynting medio, al sacar la parte real, será nulo.

$$\vec{P}_m(\hat{r}) = 0$$

Este resultado es lógico ya que los campos no pueden salir de esta estructura, con lo que no puede haber un flujo de densidad de potencia medio, aunque sí podemos tener un flujo de potencia instantáneo debido a la redistribución de la energía. Como



veremos en el capítulo 4, la expresión de los fasores corresponden a una onda estacionaria.

Si queremos calcular la energía media almacenada, primero tendremos que encontrar la densidad de energía media que vendrá dada por la expresión (2.67). Si calculamos el cuadrado del modulo del fador campo eléctrico obtenemos

$$|\vec{E}|^2 = \frac{V^2}{\ln^2(b/a)} \frac{\sin^2(\pi z/l)}{\rho^2}$$

y para el modulo al cuadrado del fador campo magnético

$$|\vec{H}|^2 = \frac{V^2}{\ln^2(b/a)} \frac{\epsilon_0}{\mu_0} \frac{\cos^2(\pi z/l)}{\rho^2}$$

La densidad de energía media queda

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{4} [\epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \mu_0 |\vec{H}|^2] = \frac{\epsilon_0 V^2}{4 \ln^2(b/a)} \frac{\sin^2(\pi z/l)}{\rho^2} + \frac{\epsilon_0 V^2}{4 \ln^2(b/a)} \frac{\cos^2(\pi z/l)}{\rho^2} \\ &= \frac{\epsilon_0 V^2}{4 \ln^2(b/a)} \frac{1}{\rho^2} \end{aligned}$$

Para calcular la energía almacenada en la estructura debemos integrar la densidad de energía sobre el volumen entre conductores

$$U_t = \int_v U \rho d\rho d\phi dz = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{\epsilon_0 V^2}{4 \ln^2(b/a)} \frac{1}{\rho} d\rho d\phi dz = \frac{\epsilon_0 V^2}{2 \ln(b/a)} \pi l$$

Por último, con respecto a las condiciones de contorno, en régimen senoidal permanente adoptan la misma forma que para los campos instantáneos. Sin embargo, debemos tener en cuenta cuando trabajamos en R.S.P., que tanto los campos como las densidades de carga y corrientes son fasores.

**Ejemplo 2.24:** Encontrar las densidades de cargas y corrientes en las paredes de la estructura presentada en el ejemplo anterior.

Para encontrar las densidades de carga sobre la superficie de los conductores debemos utilizar las condiciones de contorno, en concreto aquellas en que aparecen

las densidades de carga y corriente. Las condiciones de contorno en R.S.P. no cambia de expresión, y simplemente tenemos que tener en cuenta que estamos trabajando con fasores.

$$\begin{aligned}\hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) &= \sigma \\ \hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) &= \vec{J}_s\end{aligned}$$

Como la estructura está compuesta por conductores perfectos, en su interior no podemos tener campos eléctricos o magnéticos variables en el tiempo. Entonces las condiciones de contorno, teniendo en cuenta que entre conductores tenemos el vacío, quedan:

$$\begin{aligned}\epsilon_0 \hat{n} \cdot \vec{E}_1 &= \sigma \\ \hat{n} \times \vec{H}_1 &= \vec{J}_s\end{aligned}$$

que aplicaremos sistemáticamente sobre cada superficie.

- Superficie  $S_0$ : tapadera de la derecha, donde  $z=0$ ,  $\hat{n} = \hat{z}$

$$\sigma = \epsilon_0 \hat{z} \cdot \vec{E}(z=0) = 0 \quad (\vec{E} \perp \hat{z})$$

$$\vec{J}_{s0} = \hat{z} \times \vec{H}(z=0) = \frac{jV}{\ln(b/a)} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{1}{\rho} (-\hat{\rho})$$

- Superficie  $S_1$ : tapadera de la izquierda, donde  $z=l$  y  $\hat{n} = -\hat{z}$

$$\sigma = \epsilon_0 (-\hat{z}) \cdot \vec{E}(z=l) = 0 \quad (\vec{E} \perp \hat{z})$$

$$\vec{J}_{s1} = -\hat{z} \times \vec{H}(z=l) = \frac{jV}{\ln(b/a)} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{-1}{\rho} \hat{\rho}$$

- Superficie  $S_a$ : conductor interno, donde  $\rho = a$  y  $\hat{n} = \hat{\rho}$

$$\sigma_{sa} = \epsilon_0 \hat{\rho} \cdot \vec{E}(\rho=a) = \frac{\epsilon_0 V}{\ln(b/a)} \frac{\sin(\pi z/l)}{a}$$

$$\vec{J}_{sa} = \hat{\rho} \times \vec{H}(\rho = a) = \frac{jV}{\ln(b/a)} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{\cos(\pi z/l)}{a} \hat{z}$$

- Superficie  $S_b$  : conductor externo, donde  $\rho = b$  y  $\hat{n} = -\hat{\rho}$

$$\sigma_{sb} = \epsilon_0 (-\hat{\rho}) \cdot \vec{E}(\rho = b) = \frac{-\epsilon_0 V}{\ln(b/a)} \frac{\sin(\pi z/l)}{b}$$

$$\vec{J}_{sb} = -\hat{\rho} \times \vec{H}(\rho = b) = \frac{-jV}{\ln(b/a)} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{\cos(\pi z/l)}{b} \hat{z}$$

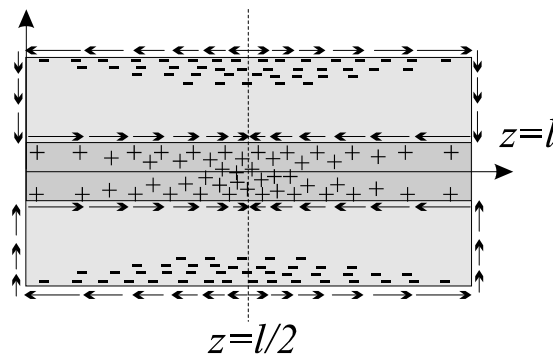


Fig. 2.27 Esquema de la sección longitudinal de la estructura y la distribución de cargas y corrientes

En la figura 2.27 hemos representado esquemáticamente las densidades de carga (con signos positivos y negativos) y las densidades de corriente (con flechas) dadas por las expresiones anteriores. Vemos cómo las corrientes salen del centro del conductor externo (donde es nula) para ser máximas justo en los extremos ( $\vec{J}_{sb}$  viene descrita por un coseno). Esta corriente hará desaparecer las cargas del centro del conductor ( $z=l/2$ ), con lo que tendremos una densidad de carga negativa  $\sigma_{sb}$ . Esta carga que desaparece, será conducida a través de las tapaderas hacia el conductor interno ( $\vec{J}_{s0}$  y  $\vec{J}_{sl}$ ). Una vez allí la corriente  $\vec{J}_{sa}$  distribuirá la carga, con lo que aparecerá una densidad de carga positiva  $\sigma_{sa}$  que será máxima en el centro, ya que es donde confluyen las corrientes.

Debemos recordar que trabajamos con fasores con lo que las densidades cambiarán con el tiempo. Vemos que las densidades de cargas y corrientes están desfasadas  $\pi/2$  ya que las corrientes están multiplicadas por  $j$ . Esto implica que,

cuando la concentración de carga (positiva o negativa) es máxima, las corrientes son nulas, siendo justo en este momento cuando invierten la dirección, con lo cual empezará a disminuir las concentraciones de carga y a aumentar la corriente.

El efecto aquí descrito es similar a un circuito cerrado compuesto por una bobina y un condensador, donde la carga va cambiando de una cara a la otra del condensador a través del cable que las une. A ambos dispositivos se les llama resonadores ya que este efecto es máximo a unas frecuencias determinadas que dependen de sus dimensiones. Discutiremos sus características en el capítulo 5.

### 2.7.3 Fasores y transformadas de Fourier

Cuando la dependencia temporal es arbitraria se recurre a técnicas de transformada de Fourier para su resolución. Cualquier función puede ser descompuesta en la suma de un continuo de funciones senoidales. En nuestro caso particular, y tomando como ejemplo el campo eléctrico, lo podemos escribir como:

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.66)$$

donde el fasor  $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$  es la amplitud en el dominio transformado obtenida a partir de:

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.67)$$

El fasor  $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$  es exactamente el definido en la sección 2.7.1, pero poniendo de manifiesto explícitamente su dependencia con la pulsación  $\omega$  para indicar que la amplitud es distinta para pulsaciones distintas. Esta dependencia con respecto de la pulsación es el espectro del campo instantáneo. En la situación de tener una dependencia temporal senoidal a una sola pulsación, el espectro tan sólo tendría dos componentes a las pulsaciones  $\omega$  y  $-\omega$ , con lo que la ecuación (2.67) se transforma en la suma de tan sólo dos componentes

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left[ \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{j\omega t} + \vec{E}(\vec{r}, -\omega) e^{-j\omega t} \right]$$

Las propiedades de la transformada de Fourier nos dicen que  $\vec{E}^*(\vec{r}, \omega) = \vec{E}(\vec{r}, -\omega)$  con lo que la ecuación anterior queda:

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left[ \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{j\omega t} + \vec{E}^*(\vec{r}, \omega) e^{-j\omega t} \right] = \Re \left\{ \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{j\omega t} \right\}$$

Así pues, recuperamos la expresión del campo instantáneo de la misma forma que en la sección 2.7.1. Entonces, en la ecuación (2.66) lo único que estamos haciendo es obtener la parte real de la suma de un continuo de fasores, lo que da como resultado un campo instantáneo que es la suma de campos con dependencia senoidal y frecuencias entre 0 y  $\infty$ .

El método de análisis de campos con dependencia temporal arbitraria consiste en encontrar el espectro del campo inicial utilizando (2.67). Una vez encontradas las componentes, cada una de ellas por separado cumplirá las ecuaciones de Maxwell en régimen senoidal permanente (2.60). Operando con estas ecuaciones, por ejemplo para encontrar el campo en un instante de tiempo más tarde o en otra posición, se encontrará los nuevos fasores, o dicho de otra forma, se modificará el espectro. Entonces a partir del nuevo espectro y de (2.66) se encontrarán los campos instantáneos en la nueva situación.

### Cuestiones de repaso:

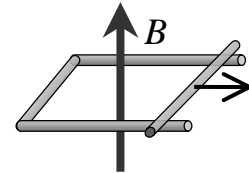
- 1) Explique qué entiendes por campo. Clarifique su respuesta explicando el significado de campo electromagnético.
- 2) ¿Por qué un hilo por donde circula una corriente variable en el tiempo radia ondas electromagnéticas?
- 3) ¿La única manera posible de crear un campo magnético es mediante un hilo conductor por donde circula una intensidad de corriente?
- 4) ¿Cuántas ecuaciones son necesarias para describir el electromagnetismo?
- 5) Se quiere calcular la circulación del campo magnético a través de un camino utilizando la ecuación de Ampère-Maxwell. Para ello se utiliza una superficie  $S$  para el cálculo de la intensidad de corriente libre y una superficie diferente  $S'$  para el cálculo del término de desplazamiento. ¿Es correcto utilizar dos superficies distintas?
- 6) Se tienen dos expresiones matemáticas de campos vectoriales. Si se toma la ecuación de Faraday y se substituye el campo eléctrico por una de estas expresiones y el campo magnético por la otra y vemos que se cumple la ecuación de Faraday. ¿Podemos afirmar que estas dos expresiones corresponden a campos electromagnéticos?
- 7) ¿Por qué se necesita la forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell?
- 8) ¿Cuál es el significado físico de los operadores divergencia y rotacional?
- 9) ¿En qué dirección van los campos eléctricos en la superficie de un conductor perfecto?

- 10) ¿Qué parámetro caracteriza los conductores?
- 11) Se Tiene un conductor no perfecto por el que circula una densidad de corriente volúmica ¿Hay campo eléctrico dentro del conductor? ¿En qué dirección irán los campos en la superficie del conductor si tenemos una cierta densidad de carga superficial?
- 12) ¿Por qué se necesita definir una nueva magnitud física como el vector desplazamiento?
- 13) ¿Con qué parámetros se caracteriza un medio dieléctrico lineal, isotropo y homogéneo? ¿Y si el medio es no lineal?
- 14) ¿Por qué los campos eléctricos y magnéticos deben cumplir las condiciones de contorno en la superficie de separación entre dos medios?
- 15) Se Tiene una cavidad de paredes conductoras completamente hermética (los campos no pueden abandonarla) que encierran el vacío. Dentro de la cavidad existe energía electromagnética almacenada que decrece paulatinamente con el tiempo. ¿A que es debida esta disminución de energía? ¿Qué se puede afirmar sobre la naturaleza del conductor?
- 16) ¿Qué indica el vector de Poynting?
- 17) ¿Por qué razón teórica en estática se puede obtener campos eléctricos o campos magnéticos por separado?
- 18) ¿Por qué no es válida la utilización del potencial eléctrico definido en estática cuando tenemos variaciones temporales de nuestros campos?
- 19) ¿Es válida la definición del potencial vector cuando tenemos variaciones temporales de los campos?
- 20) ¿Por qué razón se pone especial énfasis en el estudio de los campos electromagnéticos en régimen senoidal permanente?
- 21) ¿Los campos electromagnéticos son en realidad una magnitud compleja o simplemente utilizamos esta representación para facilitar el trabajo?
- 22) ¿Qué diferencia hay entre el vector de Poynting instantáneo y el vector de Poynting medio?
- 23) El valor obtenido al calcular la densidad de energía media y la densidad de energía instantánea es distinto. ¿A qué es debido? Piense en el principio de conservación de

la energía para magnitudes instantáneas y magnitudes medias, ya que debe cumplirse en ambos casos.

## PROBLEMAS – CAPÍTULO 2

1. Calcule de la f.e.m. inducida por un campo magnético uniforme sobre una espira rectangular en la que uno de sus lados se mueve con una velocidad constante.



2. Comprobar que las siguientes expresiones constituyen campos magnéticos en régimen estático y encontrar la distribuciones de corrientes que los crea.

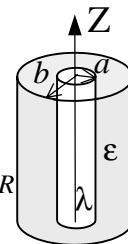
$$\vec{B}(\vec{r}) = zy^2 \hat{x} + xz \hat{y} + xy \hat{z} \quad \vec{H}(\vec{r}) = \frac{H_0 a^2}{\rho} \left[ 1 - e^{-\rho/a} \left( 1 + \frac{\rho}{a} \right) \right] \hat{\phi}$$

3. La expresión del campo magnético en cierta región del espacio viene dada por:

$$\vec{B} = B_0 z \cos \omega t \hat{y}$$

y se sabe que el campo eléctrico asociado tiene tan sólo una componente en la dirección  $x$

- a) Utilice la ley de Faraday para encontrar el campo eléctrico.
  - b) A partir del campo eléctrico encontrado, utilizar la ley de Ampère-Maxwell para hallar de nuevo el campo magnético suponiendo que la densidad de corriente volúmica es nula.
  - c) Compare el resultado obtenido en el apartado b) con la expresión inicial del campo magnético. ¿Es correcta la suposición de que la densidad de corriente es nula? ¿Por qué? Obtenga el valor que debería tener.
4. Un hilo conductor infinito tiene una densidad de carga lineal  $\lambda$  y está en el eje de un cilindro dieléctrico lineal, isótropo y homogéneo con permitividad relativa  $\epsilon_r$ . El radio del hilo es  $a$  y el del cilindro es  $b$ . Encontrar la carga ligada en el dieléctrico y la carga total en la superficie de separación entre dieléctrico y conductor.



5. El campo eléctrico dentro de una esfera dieléctrica de radio  $R$ , es decir para  $r < R$  es:

$$\vec{E}_1 = E_{01}(\cos\theta \hat{r} - \sin\theta \hat{\theta})$$

Para  $r > R$  tenemos el vacío y la expresión del campo es

$$\vec{E}_2 = E_{02} \left[ \left(1 + R^3/r^3\right) \cos\theta \hat{r} - \left(1 + R^3/2r^3\right) \sin\theta \hat{\theta} \right]$$

Encontrar  $\epsilon_r$  del medio dieléctrico

6. En un medio material se propaga un campo eléctrico de fasor:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left[ 3 e^{-j\beta z} e^{-\alpha z} + e^{j\beta z} e^{\alpha z} \right] \hat{y} \quad \text{V / m}$$

donde  $\beta$  es la constante de propagación,  $\alpha$  el coeficiente de atenuación, la pulsación es  $\omega = 10^8 \text{ rad / s}$ ,  $\epsilon_r = 19.5$  y  $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H / m}$ . Si realizamos una medida del vector de Poynting en  $z = 0$  obtenemos  $P = 0.05 \text{ W/m}^2$  y en  $z = 1 \text{ m}$  es nulo. Hallar:

- La constante de propagación  $\beta$  y el coeficiente de atenuación  $\alpha$ .
- La densidad de corriente volúmica y la conductividad considerando que todas la pérdidas son por conducción.

**Nota:** Un medio con pérdidas es aquél en el que el vector de Poynting medio de una onda decrece con la distancia. En el caso que nos ocupa, es debido a que el medio posee una cierta conductividad y por lo tanto se inducen corrientes que disipan energía (pérdidas por conducción).

7. La densidad de potencia sobre las cargas para magnitudes instantáneas viene dada por  $\vec{J} \cdot \vec{E}$ . Deduce la expresión para la densidad de potencia media ejercida sobre las cargas (forma fasorial).



### 3 Ondas planas uniformes

Según se vio con detalle en el capítulo 2, las ecuaciones de Maxwell son la expresión matemática de las leyes que gobiernan el comportamiento espacio-temporal de los campos electromagnéticos:

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} = 0$$

$$\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}$$

con

$$\vec{\mathcal{D}} = \epsilon_o \vec{\mathcal{E}} + \vec{\mathcal{P}} \quad (3.1a)$$

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu_o} \vec{\mathcal{B}} - \vec{\mathcal{M}} \quad (3.1b)$$

Utilizándolas, junto con la definición del campo electromagnético, en la expresión del trabajo realizado por éste sobre una distribución de carga eléctrica, se deduce el teorema de Poynting, que proporciona expresiones para la densidad volúmica de energía almacenada en el campo eléctrico<sup>1</sup>

$$u_e = \frac{1}{2} \vec{\mathcal{D}} \cdot \vec{\mathcal{E}}$$

y en el campo magnético<sup>1</sup>

$$u_m = \frac{1}{2} \vec{\mathcal{B}} \cdot \vec{\mathcal{H}}$$

---

<sup>1</sup> Cuando el medio es lineal.

así como para la densidad y el sentido del flujo de potencia asociada al campo

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (3.2)$$

donde  $\vec{P}$  recibe el nombre de vector de Poynting instantáneo.

Las ecuaciones de Maxwell predicen la existencia de distribuciones espaciales de campo que se propagan, lo que se conoce como ondas electromagnéticas; el teorema de Poynting permite determinar el flujo de potencia asociado a la onda. La verificación experimental por Hertz, en 1888, de la existencia de las ondas electromagnéticas, completó la verificación de la validez de las ecuaciones de Maxwell.

Las ondas electromagnéticas juegan un papel fundamental en el mundo físico y ocupan un lugar central en la ingeniería y, en particular, en las ingenierías electrónica y de telecomunicación; la luz y el calor del sol nos llegan mediante ondas electromagnéticas; la potencia asociada a las ondas electromagnéticas se utiliza en ingeniería como vehículo para transmitir información a distancia: radio, televisión, comunicaciones por satélite, telefonía móvil son algunos ejemplos donde la utilización de las ondas electromagnéticas es evidente. Pero las ondas no sólo se utilizan cuando no existe un “tendido” material de un punto a otro. En las líneas telegráficas y telefónicas suficientemente largas es imposible soslayar los fenómenos ondulatorios y, desde finales del siglo XIX, las ecuaciones que rigen el comportamiento de las ondas guiadas por líneas de transmisión se conocen, con cierta dosis de familiaridad, como “ecuaciones de los telegrafistas”; en las grandes instalaciones de comunicaciones por satélite se utilizan guías de onda conductoras huecas para llevar la energía desde los equipos de emisión hasta la antena emisora y desde la antena receptora a los equipos de recepción; mediante guías de onda dieléctricas (fibras ópticas) se conducen las ondas electromagnéticas en el infrarrojo cercano que portan la información en los sistemas que forman la espina dorsal de los sistemas de comunicaciones terrestres modernos.

Por razones didácticas, en este capítulo nos ceñiremos al estudio de ondas electromagnéticas que se propagan libremente en un medio homogéneo, y aun a un tipo de onda particular, pero de gran importancia en la práctica, conocido como onda plana uniforme. En el capítulo 4 se introducirán los principios fundamentales del guiado de ondas y en el capítulo 5 se presentarán en detalle los métodos de análisis de sistemas de guiado reales.

### 3.1 Ecuación de onda

Consideremos una región del espacio en la que no haya fuentes primarias (cargas y corrientes) de los campos:  $\rho = 0$ ,  $\vec{j} = 0$ . En esa región las ecuaciones de Maxwell se simplifican a

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{\mathcal{E}} &= -\frac{\partial \vec{\mathcal{B}}}{\partial t} & \nabla \cdot \vec{\mathcal{B}} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{\mathcal{D}} &= 0 & \nabla \times \vec{\mathcal{H}} &= \frac{\partial \vec{\mathcal{D}}}{\partial t}\end{aligned}\tag{3.3}$$

Este sistema de ecuaciones diferenciales permite apreciar de manera cualitativa el origen de las ondas electromagnéticas: un campo  $\vec{\mathcal{B}}$  en la primera de las ecuaciones (3.3) da lugar, en general, a un campo  $\vec{\mathcal{E}}$  variable; éste, a través de la relación constitutiva (3.1a) supone un campo  $\vec{\mathcal{D}}$  variable, que, a su vez, produce un campo  $\vec{\mathcal{H}}$  variable según la última de las ecuaciones (3.3); el campo  $\vec{\mathcal{H}}$  variable supone, según la relación constitutiva (3.1b), un campo  $\vec{\mathcal{B}}$  variable, y así sucesivamente.

Volvamos ahora al caso general en que en la zona del espacio considerada pueda haber cargas y corrientes, pero consideremos el caso simplificado, pero que se encuentra muy a menudo en la práctica, de que el medio sea lineal; entonces

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{D}} &= \varepsilon \vec{\mathcal{E}} \\ \vec{\mathcal{B}} &= \mu \vec{\mathcal{H}}\end{aligned}\tag{3.4}$$

Si además el medio es isótropo,  $\varepsilon$  y  $\mu$  son escalares y, si es homogéneo, no dependen de las coordenadas espaciales. Bajo esas suposiciones, que se cumplen en muchos medios de interés práctico, las ecuaciones de Maxwell se reducen a:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{\mathcal{E}} &= -\mu \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} &= \rho \\ \nabla \cdot \vec{\mathcal{H}} &= 0 \\ \nabla \times \vec{\mathcal{H}} &= \vec{j} + \varepsilon \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t}\end{aligned}\tag{3.5}$$

Es de notar que, mientras que desde un punto de vista físico los campos fundamentales son  $\vec{\mathcal{E}}$  y  $\vec{\mathcal{B}}$ , en una situación como la que se está considerando existe un paralelismo matemático entre  $\vec{\mathcal{E}}$  y  $\vec{\mathcal{H}}$ , como lo muestra el sistema de ecuaciones anterior sobre todo en regiones donde  $\rho = 0$  y  $\vec{\mathcal{J}} = 0$ . La técnica para resolver el sistema de ecuaciones anterior consiste en reducir el número de ecuaciones diferenciales aunque sea a costa de aumentar el orden de las derivadas. Por ejemplo, tomando el rotacional de ambos miembros de la primera ecuación, se tiene

$$\nabla \times \nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{\mathcal{H}} \quad (3.6)$$

Teniendo en cuenta que

$$\nabla \times \nabla \times \vec{\mathcal{E}} = \nabla(\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}}) - \nabla^2 \vec{\mathcal{E}} \quad (3.7)$$

y que, según (3.5),  $\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = \frac{\rho}{\epsilon}$  y  $\nabla \times \vec{\mathcal{H}} = \vec{\mathcal{J}} + \epsilon \frac{\partial \vec{\mathcal{E}}}{\partial t}$ , la expresión (3.6) se reduce a

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial \vec{\mathcal{J}}}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \nabla \rho \quad (3.8)$$

donde se ha definido la “laplaciana”<sup>1</sup> del vector  $\vec{\mathcal{E}}$  como<sup>2</sup>

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} = \hat{x} \nabla^2 \mathcal{E}_x + \hat{y} \nabla^2 \mathcal{E}_y + \hat{z} \nabla^2 \mathcal{E}_z \quad (3.9)$$

La expresión básica (3.8) es, desde el punto de vista matemático, una ecuación de onda vectorial – porque la variable dependiente  $\vec{\mathcal{E}}$  es un vector – tridimensional – porque, en general, el operador laplaciana supone derivadas respecto de las tres coordenadas espaciales. Si se toma el rotacional de ambos miembros de la cuarta ecuación en (3.5) se llega a una ecuación de onda similar para  $\vec{\mathcal{H}}$ :

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{H}} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}}{\partial t^2} = \nabla \times \vec{\mathcal{J}}$$

<sup>1</sup> Estrictamente, la laplaciana es un operador escalar. El significado del operador  $\nabla^2$  aplicado a un vector se da en la expresión (3.9).

<sup>2</sup> La definición (3.9) no se puede generalizar para el empleo de componentes del vector que no sean las de las coordenadas cartesianas. En cambio, puede utilizarse cualquier tipo de coordenadas para expresar las componentes cartesianas del vector y para evaluar las laplacianas que actúan sobre ellas.

A la vista de estas expresiones, está claro que la solución de la ecuación de onda dependerá de la distribución de cargas y corrientes que dan origen al campo, y también de las condiciones de contorno que deban satisfacer los campos en los límites entre regiones homogéneas. La forma matemática de la solución (pero no la situación física que describe) también puede depender del sistema de coordenadas utilizado, que, a su vez, se elegirá de acuerdo con la geometría de la situación que se esté estudiando. En este capítulo nos limitaremos al estudio del caso particular de las llamadas ondas planas uniformes. En el capítulo 5 se verán diversos tipos de ondas planas no uniformes, en relación con sistemas de guía de onda. En el capítulo 6, al introducir el fenómeno de radiación, se verán formas aproximadas de ondas esféricas.

### 3.1.1 Ondas planas uniformes con dependencia espacio-temporal arbitraria

Consideremos de nuevo que estamos estudiando el campo electromagnético en una región desprovista de fuentes primarias. En esa región los campos obedecen a las ecuaciones (3.3) y las ecuaciones de onda de  $\vec{\mathcal{E}}$  y de  $\vec{\mathcal{H}}$  se vuelven homogéneas, es decir, desaparecen los términos independientes o de fuerza. Nótese que la situación que se está considerando es más común de lo que a primera vista pudiera parecer: las fuentes – cargas y corrientes – que dan lugar al campo ocupan un volumen limitado, y fuera de él, si el medio es lineal, isótropo y homogéneo, los campos obedecen a las ecuaciones (3.3) y a las ecuaciones de onda homogéneas

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.10 \text{ a})$$

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{H}} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{H}}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.10 \text{ b})$$

que de ellas se deducen. Además, el estudio de cierto tipo particular de solución para estas ecuaciones nos permitirá describir de manera ilustrativa y sencilla el fenómeno fundamental – la aparición de ondas electromagnéticas – que se quiere poner de manifiesto.

Como las dos ecuaciones de onda anteriores están matemáticamente desacopladas (en cada una de ellas sólo aparece una variable dependiente), en principio podemos estudiar su solución por separado. Nos concentraremos para empezar en la ecuación de onda del campo eléctrico, aunque nada impediría comenzar con la del campo magnético. Para hacer aún más sencilla la matemática y que ésta no oscurezca el aspecto físico que se pretende resaltar, efectuaremos una hipótesis simplificadora más, a saber: que del examen de las condiciones de contorno que tiene que cumplir la solución matemática de (3.10) para que adquiera significado físico se puede deducir que

$$\frac{\partial}{\partial x} \vec{\mathcal{E}} = \frac{\partial}{\partial y} \vec{\mathcal{E}} = 0 \quad (3.11)$$

Es de notar que las condiciones de contorno hipotéticamente utilizadas para deducir la condición anterior nos remiten en última instancia a las fuentes que se encuentran fuera de la región en que estamos estudiando el campo, pues de ellas dependerán los valores del campo en el contorno. Las condiciones (3.11) llevarán a un tipo particular de solución conocido como *onda plana uniforme*, que, curiosamente, y a pesar de todas las simplificaciones efectuadas para llegar a él, representa muy bien situaciones de interés práctico y, en especial, el campo en regiones lo suficientemente alejadas de las fuentes que lo producen. Si, simplificando aún más, puede suponerse que

$$\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_x \hat{x} \quad (3.12)$$

entonces la ecuación de onda (3.8) se reduce a

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}_x}{\partial z^2} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}_x}{\partial t^2} = 0 \quad (3.13)$$

que es una ecuación de onda unidimensional – porque ahora, si se cumple (3.11), sólo hay dependencia respecto de una variable – escalar – porque se ha supuesto, según (3.12), que el campo eléctrico sólo tiene una componente<sup>1</sup> – y homogénea. La forma general de la solución de tal ecuación es

$$\mathcal{E}_x = f_1(z - vt) + f_2(z + vt) \quad (3.14)$$

donde

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \quad (ms^{-1}) \quad (3.15)$$

es una constante que tiene unidades de velocidad; en particular, si el medio fuese el vacío,  $\mu = \mu_0$ ,  $\epsilon = \epsilon_0$  y  $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}} = c$ . La expresión (3.14) se conoce como solución de

d'Alembert y puede comprobarse que, en efecto, es solución de la ecuación (3.13) por sustitución en ella. Debe tenerse en cuenta que (3.14) es una *solución formal*, esto es, que indica cómo ha de ser la *forma general* de la expresión matemática de la solución de (3.13); las expresiones concretas de las funciones  $f_1(s)$  y  $f_2(s)$  dependerán de las condiciones iniciales y de contorno en cada caso.

---

<sup>1</sup> En cualquier caso, la ecuación de onda vectorial no es más que la expresión compacta de tres ecuaciones de onda escalares.

Así, con las suposiciones efectuadas, el campo eléctrico tendrá la forma general

$$\vec{\mathcal{E}} = [f_1(z - vt) + f_2(z + vt)]\hat{x} \quad (3.16)$$

La interpretación física de la solución (3.14) – o de (3.16) – es la de sendas distribuciones de campo que se propagan respectivamente en las direcciones  $+z$  y  $-z$  con velocidad  $v$ , *conservando su forma a medida que la posición de la distribución cambia*, como se indica en la figura 3.1; ahora bien, una distribución espacial de una magnitud física (campo eléctrico en este caso) que se propaga es lo que se conoce como onda. En este caso hablaremos de onda plana porque en todos los puntos de un plano – el plano perpendicular al eje  $Z$ , tal como se han tomado los ejes de coordenadas – el campo toma el mismo valor.

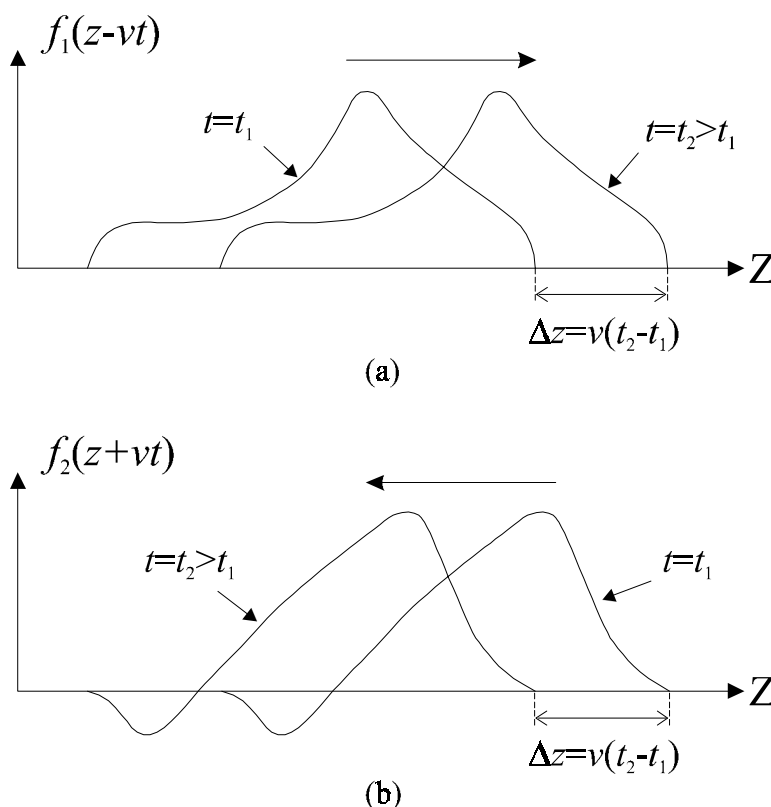


Fig. 3.1 Ondas progresiva (a) y regresiva (b) de campo eléctrico

Como se ha discutido al principio de la sección 3.1, en general no puede existir un campo eléctrico variable con el tiempo, como el dado por la expresión (3.16), sin que exista simultáneamente un campo magnético. Es fácil ver que, en este caso, el campo magnético ha

de ser formalmente similar al campo eléctrico, ya que ambos obedecen a la misma ecuación de onda homogénea (3.10).

Como  $\vec{\mathcal{H}}$  obedece a la misma ecuación que  $\vec{\mathcal{E}}$ , su solución general debe tener las mismas propiedades. Pero además,  $\vec{\mathcal{H}}$  no es independiente de  $\vec{\mathcal{E}}$ , porque está relacionado con éste a través de las ecuaciones de Maxwell; así, el comportamiento concreto – y no sólo el general – de  $\vec{\mathcal{H}}$  está ligado con el comportamiento concreto de  $\vec{\mathcal{E}}$ ; en efecto, según la primera de las ecuaciones (3.5)

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}} = -\mu \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t} \quad (3.17)$$

Así, sustituyendo (3.16) en (3.17), se llega a

$$[f_1'(z-vt) + f_2'(z+vt)]\hat{y} = -\mu \frac{\partial \vec{\mathcal{H}}}{\partial t} \quad (3.18)$$

donde  $f_1'(s) = \frac{d}{ds}f_1(s)$  y  $f_2'(s) = \frac{d}{ds}f_2(s)$ . Integrando ahora los dos miembros de la expresión (3.18) respecto del tiempo, se obtiene

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\mu v} [f_1(z-vt) - f_2(z+vt)]\hat{y} \quad (3.19)$$

que tiene una clara relación con la expresión del campo eléctrico (3.16). El producto  $\mu v$  en la expresión (3.19) tiene unidades de impedancia, como se ve fácilmente considerando que las unidades de  $\vec{\mathcal{E}}$  son V/m y las de  $\vec{\mathcal{H}}$  A/m. Por esa razón recibe el nombre de *impedancia intrínseca del medio* y se denota por  $\eta$ . Teniendo en cuenta la definición de  $v$  (3.15), una expresión alternativa de  $\eta$  es

$$\eta = \mu v = \mu \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \quad (\Omega)$$

donde, para subrayar el hecho de que  $\eta$  tiene unidades de impedancia, se han indicado explícitamente en el Sistema Internacional. Por ejemplo, en el vacío,  $\mu = \mu_o$ ,  $\epsilon = \epsilon_o$  y  $\eta = \eta_o \approx 376,63 \Omega \approx 120\pi \Omega$ . Así, la expresión (3.19) del campo magnético puede reescribirse



$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\eta} [f_1(z - vt) + f_2(z + vt)] \hat{y} \quad (3.20)$$

El resultado de la integración de la ecuación (3.18) respecto del tiempo se podría haber escrito de manera más general

$$\vec{\mathcal{H}} = \frac{1}{\eta} [f_1(z - vt) - f_2(z + vt)] \hat{y} + \vec{h}(\vec{r})$$

donde  $\vec{h}(\vec{r})$  sería un campo magnetostático – ya que, en la región de interés  $\nabla \cdot \vec{h}(\vec{r}) = 0$ ,  $\nabla \times \vec{h}(\vec{r}) = 0$  – y, por lo tanto, desacoplado de  $\vec{\mathcal{E}}$ . Por otra parte, la solución para  $\vec{\mathcal{E}}$  de la ecuación (3.13) podría haberse escrito de forma más general

$$\vec{\mathcal{E}} = [f_1(z - vt) + f_2(z + vt)] \hat{x} + \vec{e}(\vec{r})$$

con  $\vec{e}(\vec{r})$  un campo electrostático –  $\nabla \cdot \vec{e}(\vec{r}) = 0$ ,  $\nabla \times \vec{e}(\vec{r}) = 0$  en la región de interés – y, por lo tanto, desacoplado de  $\vec{\mathcal{H}}$ . Estos términos estáticos no tienen interés para nosotros en este contexto de campos variables con el tiempo y, por lo tanto, los obviaremos en la discusión.

De la expresión del campo magnético (3.19) está claro que también puede expresarse como la combinación de una onda progresiva de campo magnético

$$p_1(z - vt) = \frac{1}{\eta} f_1(z - vt)$$

y una onda regresiva de campo magnético

$$p_2(z + vt) = \frac{1}{\eta} f_2(z + vt)$$

como se ha representado gráficamente en la figura 3.2.

Si ahora calculamos la densidad de flujo de potencia asociado al campo electromagnético de la onda que se acaba de calcular, dado por el vector de Poynting (expresión (3.2)), se encuentra

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{P}} &= \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}} = \\ &= [f_1(z - vt) + f_2(z + vt)] \hat{x} \times \frac{1}{\eta} [f_1(z - vt) + f_2(z + vt)] \hat{y} = \\ &= \frac{1}{\eta} [f_1^2(z - vt) - f_2^2(z + vt)] \hat{z} \end{aligned} \quad (3.21)$$

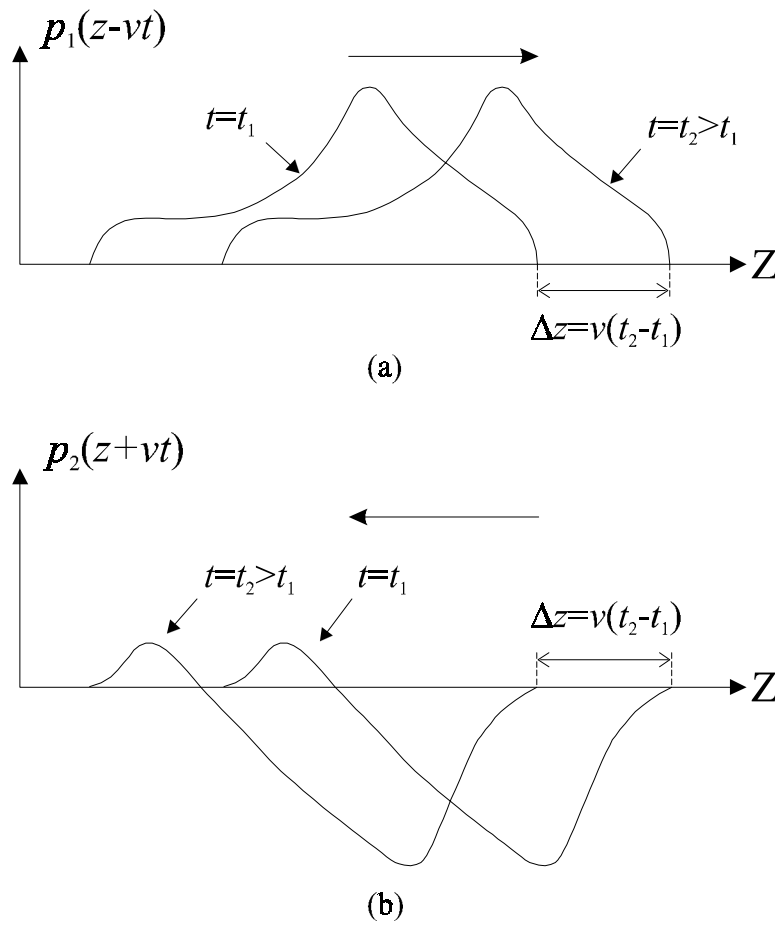


Fig. 3.2 Ondas progresiva (a) y regresiva (b) de campo magnético

La expresión (3.21) admite la interpretación de que el flujo de potencia total es la superposición de un flujo de potencia asociado a la onda electromagnética progresiva en el sentido de ésta dado por

$$\bar{\mathcal{P}}_+ = \frac{1}{\eta} f_1^2(z-vt) \hat{z} = \eta p_1^2(z-vt) \hat{z} \quad (3.22)$$

y de un flujo de potencia asociado a la onda electromagnética regresiva en el sentido de ésta, dado por

$$\vec{\mathcal{P}}_- = -\frac{1}{\eta} f_2^2(z+vt) \hat{z} = -\eta p_2^2(z+vt) \hat{z} \quad (3.23)$$

La figura 3.3 resume gráficamente la relación entre los campos eléctrico y magnético y el vector de Poynting dados respectivamente por las ecuaciones (3.16), (3.20), (3.22) y (3.23). Es de notar, sin embargo, que *una figura no puede en general dar de manera sencilla toda la información contenida en las expresiones matemáticas*. Así, la figura 3.3 intenta mostrar la situación a lo largo del eje  $Z$ ; ahora bien, como se ha supuesto que no hay variación de los campos en  $x$  ni en  $y$ , tal descripción gráfica aplica igualmente a los campos y vector de Poynting a lo largo de cualquier eje paralelo al eje  $Z$ . El intento de completar la representación en este sentido llevaría a un emborronamiento de la figura que la haría inútil.

Se podría haber efectuado un desarrollo similar al que se acaba de efectuar suponiendo  $\vec{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_y \hat{y}$ , con lo que se hubiese obtenido  $\vec{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_x \hat{x}$ . Una solución más general puede expresarse como combinación de ambos desarrollos

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}} = & f_1(z-vt) \hat{x} + g_1(z-vt) \hat{y} + \\ & + f_2(z+vt) \hat{x} + g_2(z+vt) \hat{y} \end{aligned} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{H}} = & \frac{1}{\eta} [f_1(z-vt) \hat{y} - g_1(z-vt) \hat{x}] + \\ & + \frac{1}{\eta} [-f_2(z+vt) \hat{y} + g_2(z+vt) \hat{x}] \end{aligned}$$

donde  $f_1$  y  $g_1$  representan ondas progresivas y  $f_2$  y  $g_2$  ondas regresivas. Sin embargo, si se mantiene la condición de que los campos no tengan dependencia en  $x$  ni en  $y$  ( $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0$ ), las ecuaciones  $\nabla \cdot \vec{\mathcal{E}} = 0$  y  $\nabla \cdot \vec{\mathcal{H}} = 0$  imponen que  $\mathcal{E}_z = 0$ ,  $\mathcal{H}_z = 0$ . Puede comprobarse también que los campos eléctrico y magnético dados por (3.24) son perpendiculares entre sí:  $\vec{\mathcal{E}} \cdot \vec{\mathcal{H}} = 0$ .

Asimismo, los desarrollos efectuados partiendo de la ecuación de onda para  $\vec{\mathcal{E}}$  podrían haberse llevado a cabo de manera completamente análoga a partir de la ecuación de onda para  $\vec{\mathcal{H}}$ .

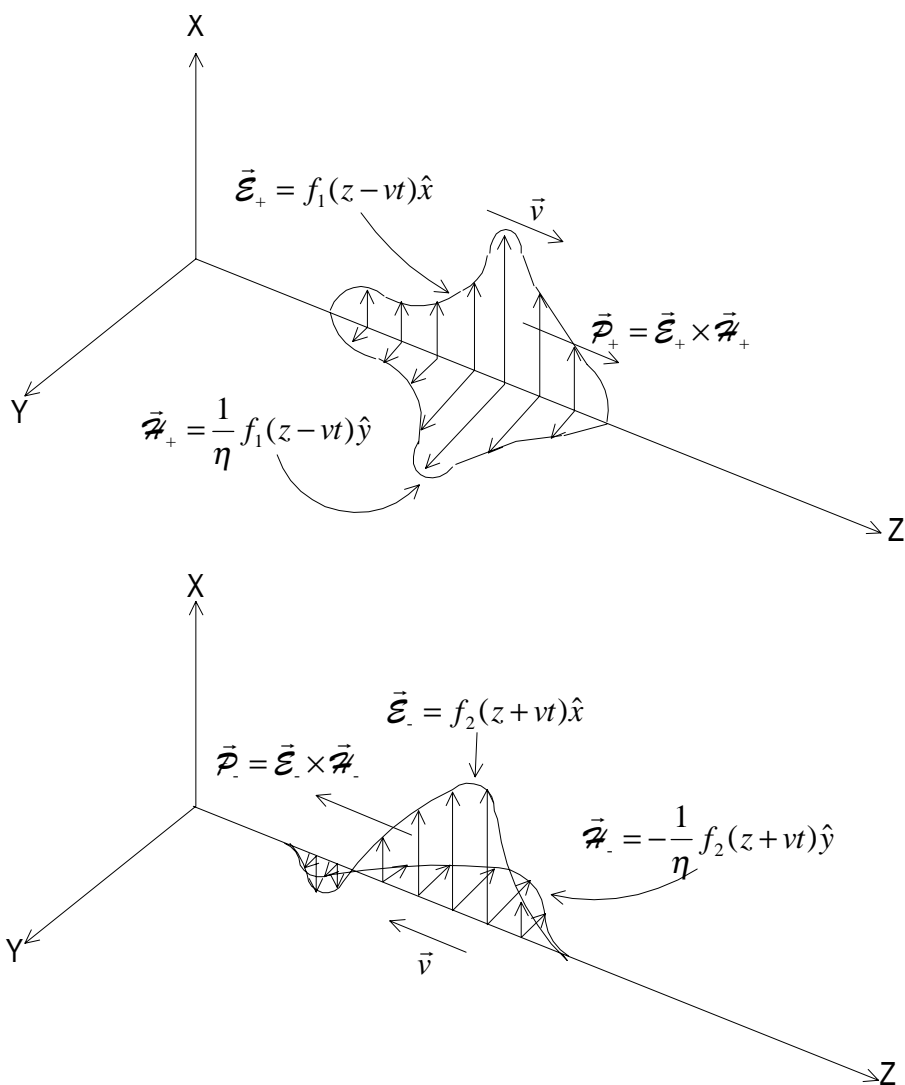


Fig. 3.3 Representación gráfica de la relación entre campo eléctrico, magnético y vector de Poynting

### 3.2 Ondas planas uniformes en régimen senoidal permanente

A pesar de no ser más que un caso muy particular, y con una expresión matemática especialmente sencilla, de onda electromagnética, las ondas planas uniformes en régimen senoidal permanente presentan curiosamente un gran interés desde el punto de vista práctico. Eso es debido a una, o a la combinación, de por lo menos las razones siguientes:

- a) Suficientemente lejos de una antena, los campos electromagnéticos que ésta radia son descritos con muy buena aproximación por ondas planas uniformes.
- b) Para muchos tipos de modulación empleados en sistemas de radiocomunicaciones, el ensanchamiento del espectro que la modulación produce alrededor de la frecuencia de la portadora puede despreciarse desde el punto de vista de los fenómenos de radiación y propagación, de manera que, por lo que respecta a los cálculos electromagnéticos, se puede suponer que se está en régimen senoidal permanente.
- c) Una situación general de campos con dependencia temporal senoidal puede descomponerse como superposición de (en general infinitas) ondas planas uniformes.

Antes de empezar a usar la notación matemática fasorial apropiada para describir magnitudes en régimen senoidal permanente, puede resultar útil estudiar la forma particular que toman las expresiones del ejemplo de la sección 3.1 en este caso.

El régimen senoidal permanente supone que la dependencia temporal de los campos debe ser como  $\cos(\omega t + \varphi)$ , donde  $\omega$  es la frecuencia angular o pulsación, de unidades rad/s, relacionada con la frecuencia  $f$  de unidades Hz por  $\omega = 2\pi f$ . Eso implica, remitiéndonos al ejemplo desarrollado en la sección 2, que las funciones  $f_1(z - vt)$  y  $f_2(z + vt)$  que aparecían en las expresiones del campo, ya no pueden ser cualesquiera, sino que las condiciones de contorno están imponiendo que  $f_1$  sea de la forma

$$f_1(z - vt) = A \cos \left[ \frac{1}{v} \omega (vt - z) + \varphi_1 \right] = A \cos \left( \omega t - \frac{\omega}{v} z + \varphi_1 \right) \quad (3.25 \text{ a})$$

y

$$f_2(z + vt) = B \cos \left[ \frac{1}{v} \omega (vt + z) + \varphi_2 \right] = B \cos \left( \omega t + \frac{\omega}{v} z + \varphi_2 \right) \quad (3.25 \text{ b})$$

Definiendo el número de onda  $k$  (con unidades SI de  $m^{-1}$ ) como

$$k = \frac{\omega}{v} \quad (3.26)$$

las expresiones (3.25) se escriben

$$f_1(z - vt) = A \cos(\omega t - kz + \varphi_1)$$

$$f_2(z + vt) = B \cos(\omega t + kz + \varphi_2)$$

Utilizando estas expresiones en las generales (3.24), se llega a las expresiones de ondas planas uniformes progresiva y regresiva en régimen senoidal permanente que se propagan en la dirección de  $Z$

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{E}}(z, t) = & E_{ox}^+ \cos(\omega t - kz + \varphi_x^+) \hat{x} + E_{oy}^+ \cos(\omega t - kz + \varphi_y^+) \hat{y} + \\ & + E_{ox}^- \cos(\omega t + kz + \varphi_x^-) \hat{x} + E_{oy}^- \cos(\omega t + kz + \varphi_y^-) \hat{y} \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{H}}(z, t) = & \frac{1}{\eta} [E_{ox}^+ \cos(\omega t - kz + \varphi_x^+) \hat{y} - E_{oy}^+ \cos(\omega t - kz + \varphi_y^+) \hat{x}] + \\ & + \frac{1}{\eta} [-E_{ox}^- \cos(\omega t + kz + \varphi_x^-) \hat{y} + E_{oy}^- \cos(\omega t + kz + \varphi_y^-) \hat{x}] \end{aligned}$$

donde los superíndices “+” se refieren a ondas que se propagan en el sentido positivo del eje  $Z$  y los superíndice “-” a las que se propagan en el sentido negativo.

Sirviéndonos de la notación fasorial introducida en el capítulo 2, podemos escribir la misma información que contienen las expresiones (3.27) de una manera mucho más compacta; así, el campo eléctrico vendrá dado en forma fasorial por:

$$\vec{E} = \vec{E}_c^+ e^{-jkz} + \vec{E}_c^- e^{jkz} \quad (3.28)$$

con

$$\vec{E}_c^+ = E_{ox}^+ e^{j\varphi_x^+} \hat{x} + E_{oy}^+ e^{j\varphi_y^+} \hat{y} \quad (3.29 \text{ a})$$

$$\vec{E}_c^- = E_{ox}^- e^{j\varphi_x^-} \hat{x} + E_{oy}^- e^{j\varphi_y^-} \hat{y} \quad (3.29 \text{ b})$$

Según se sabe ya, el campo instantáneo puede recuperarse a partir de (3.28) como  $\vec{\mathcal{E}}(z, t) = \text{Re}[\vec{E} e^{j\omega t}]$ . Del mismo modo, el fasor campo magnético será

$$\vec{H} = \vec{H}_c^+ e^{-jkz} + \vec{H}_c^- e^{jkz}$$

con

$$\vec{H}_c^+ = \frac{1}{\eta} E_{ox}^+ e^{j\varphi_x^+} \hat{y} - \frac{1}{\eta} E_{oy}^+ e^{j\varphi_y^+} \hat{x} \quad (3.30 a)$$

$$\vec{H}_c^- = -\frac{1}{\eta} E_{ox}^- e^{j\varphi_x^-} \hat{y} + \frac{1}{\eta} E_{oy}^- e^{j\varphi_y^-} \hat{x} \quad (3.30 b)$$

El ejemplo siguiente muestra una situación idealizada en la que se generan ondas planas uniformes.

**Ejemplo 3.1:** *Campo producido por una distribución laminar infinita de corriente uniforme que depende senoidalmente del tiempo.*

Consideremos una hoja de corriente uniforme infinita, de frecuencia  $f$ . Supongamos que, por comodidad, tomamos los ejes de coordenadas de manera que la hoja esté contenida en el plano  $z=0$  y venga caracterizada por un fasor  $\vec{J}_s = J_{so} \hat{x}$  (Fig. 3.4).

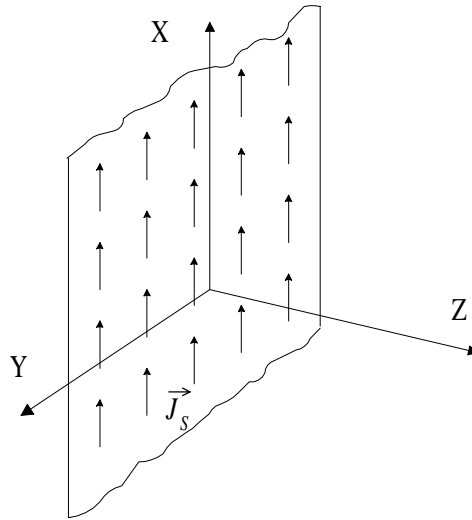


Fig. 3.4 *Distribución laminar de corriente en el plano  $z=0$  dirigida según el eje  $X$*

Como la fuente de los campos (en este caso la distribución laminar de corriente) varía con el tiempo de manera senoidal, en régimen permanente todos los campos deben hacerlo también. Dada la geometría del problema, parece razonable suponer que los campos producidos puedan ser en forma de ondas planas uniforme

que se alejen de la distribución de corriente; si nuestra hipótesis fuese incorrecta, nos daríamos cuenta de ello al no poder satisfacer las condiciones de contorno de los campos en el plano  $z = 0$ . Esto nos lleva a considerar que, para  $z > 0$ , tengamos una onda que se propaga en la dirección del eje  $Z$  y en el sentido de las  $z$  crecientes; en efecto, dada la forma de la distribución de corriente, no hay nada que favorezca la propagación en una dirección dada, y no en otra, distinta de la perpendicular al plano  $z = 0$  (nótese que, aunque en la figura 3.4 las flechas que representan  $\vec{J}_s$  vayan en el sentido de las  $x$  crecientes, esto no es más que una limitación de la representación gráfica, puesto que  $\vec{J}_s$  es un fasor, y la corriente instantánea irá, durante algunas partes del período, en el sentido de la figura, mientras que en otras irá en sentido opuesto. De la misma manera, para  $z < 0$  supondremos que existe una onda que se propaga en el sentido de las  $z$  decrecientes. Formalmente:

Para  $z > 0$

$$\vec{E} = \vec{E}_c^+ e^{-jkz}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_c^+ e^{-jkz}$$

con

$$\vec{E}_c^+ = E_x^+ \hat{x} + E_y^+ \hat{y} \quad (3.31)$$

$$\vec{H}_c^+ = H_x^+ \hat{x} + H_y^+ \hat{y} \quad (3.32)$$

donde  $E_x^+$ ,  $E_y^+$ ,  $H_x^+$  y  $H_y^+$  son constante complejas que, de acuerdo con (3.30 a), se relacionan de la manera siguiente:

$$E_y^+ = -\eta H_x^+ \quad (3.33 \text{ a})$$

$$E_x^+ = \eta H_y^+ \quad (3.33 \text{ b})$$

Para  $z < 0$

$$\vec{E} = \vec{E}_c^- e^{jkz}$$

$$\vec{H} = \vec{H}_c^- e^{jkz}$$

con

$$\vec{E}_c^- = E_x^- \hat{x} + E_y^- \hat{y} \quad (3.34)$$

$$\vec{H}_c^- = H_x^- \hat{x} + H_y^- \hat{y} \quad (3.35)$$

donde de nuevo  $E_x^-$ ,  $E_y^-$ ,  $H_x^-$  y  $H_y^-$  son constantes que, según (3.30 b) se relacionan mediante



$$E_y^- = \eta H_x^- \quad (3.36 \text{ a})$$

$$E_x^- = -\eta H_y^- \quad (3.36 \text{ b})$$

Las constantes que aparecen en la expresión de las ondas pueden ponerse en relación con la corriente que da lugar a ellas mediante las condiciones de contorno a que deben obedecer los campos en  $z = 0$ . Según lo visto en el capítulo 2, para que la solución tenga sentido físico, en  $z = 0$  hay que exigir

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s$$

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$$

donde, en nuestro caso

$$\hat{n} = \hat{z}$$

$$\vec{H}_2 : \text{campo magnético en } z = 0^+$$

$$\vec{H}_1 : \text{campo magnético en } z = 0^-$$

$$\vec{E}_2 : \text{campo eléctrico en } z = 0^+$$

$$\vec{E}_1 : \text{campo eléctrico en } z = 0^-$$

Así tendremos

$$\vec{H}_2 = \vec{H}_c^+$$

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_c^-$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_c^+$$

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_c^-$$

Teniendo en cuenta las formas de  $\vec{E}_c^+$ ,  $\vec{E}_c^-$ ,  $\vec{H}_c^+$  y  $\vec{H}_c^-$  dadas por las expresiones (3.31), (3.34), (3.32) y (3.35), las relaciones (3.33) y (3.36), y las condiciones de contorno que deben satisfacer los campos, se llega al siguiente sistema de ecuaciones

$$H_x^+ - H_x^- = 0$$

$$H_y^+ - H_y^- = -J_{so}$$

$$H_x^+ + H_x^- = 0$$

$$H_y^+ + H_y^- = 0$$

cuya solución es

$$H_y^+ = -\frac{J_{so}}{2}$$

$$H_y^- = \frac{J_{so}}{2}$$

$$H_x^+ = H_x^- = 0$$

Se ha conseguido satisfacer las condiciones de contorno; así pues, las hipótesis efectuadas al principio eran correctas y, efectivamente, el campo para  $z > 0$  tiene la forma de una onda plana uniforme que se propaga según las  $z$  crecientes:

$$\vec{H} = -\frac{J_{so}}{2} e^{-jkz} \hat{y}$$

$$\vec{E} = -\eta \frac{J_{so}}{2} e^{-jkz} \hat{x}$$

mientras que para  $z < 0$  tiene la forma de una onda plana uniforme que se propaga según las  $z$  decrecientes:

$$\vec{H} = \frac{J_{so}}{2} e^{jkz} \hat{y}$$

$$\vec{E} = -\eta \frac{J_{so}}{2} e^{jkz} \hat{x}$$

### 3.2.1 Ecuación de onda en régimen senoidal permanente

La descripción matemática de ondas planas en régimen senoidal permanente que se propagan en direcciones arbitrarias puede sistematizarse a partir del estudio de las soluciones de la ecuación de onda en régimen senoidal permanente. En el apartado 3.1 se habían escrito las ecuaciones de onda a que obedecen los campos eléctrico y magnético instantáneos en una zona libre de fuentes de un medio lineal e isótropo. Por ejemplo, para el campo eléctrico se tenía

$$\nabla^2 \vec{\mathcal{E}} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{\mathcal{E}}}{\partial t^2} = 0 \quad (3.8)$$

Siguiendo la regla explicada en el capítulo 2 para escribir ecuaciones de los fasores a partir de las ecuaciones de los campos instantáneos, la ecuación a la que obedece el fasor campo eléctrico es

$$\nabla^2 \vec{E} + \mu \epsilon \omega^2 \vec{E} = 0 \quad (3.37)$$

Teniendo en cuenta la definición de la velocidad de propagación (3.15) y la del número de onda (3.26), éste puede ponerse

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

con lo que la ecuación (3.37) se reescribe

$$\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \quad (3.38)$$

Evidentemente, el campo  $\vec{H}$  obedece también a la ecuación de Helmholtz

$$\nabla^2 \vec{H} + k^2 \vec{H} = 0$$

### 3.2.2 Solución correspondiente a la onda plana uniforme

Una posible solución de la ecuación de Helmholtz a la que obedece  $\vec{E}$  es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (3.39)$$

donde

$\vec{E}_c$  es un vector, en general complejo, uniforme (que no depende de  $\vec{r}$ );

$\vec{r}$  es el vector de posición ( $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$ ) del punto en que se evalúa el campo;

$\vec{k}$  es el llamado *vector de propagación*, o de onda; es un vector uniforme de unidades  $m^{-1}$  cuyo módulo es el número de onda  $k$ , y que, por tanto, puede expresarse como  $\vec{k} = k\hat{k}$ , donde  $\hat{k}$  es un vector unitario en principio arbitrario.

Como se discutirá en lo que sigue, esta solución de la ecuación de Helmholtz (3.38), corresponde a una onda plana uniforme en régimen senoidal permanente, que se propaga en el sentido dado por  $\hat{k}$ . Evidentemente, el estudio de la forma de los campos de una onda plana uniforme en régimen senoidal permanente podría haberse empezado por  $\vec{H}$  en vez de por  $\vec{E}$ , y la elección de hacerlo a partir del campo eléctrico ha sido completamente arbitraria.

**Ejemplo 3.2** *Comprobación de que la expresión (3.39) es efectivamente una solución de la ecuación (3.38).*

Para ello comprobaremos que cuando la expresión se sustituye en la ecuación, ésta se convierte en una identidad. Así pues, sustituiremos  $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_c e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$  en el primer miembro de (3.38):

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) = \nabla^2 \vec{E}_c e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = \vec{E}_c \nabla^2 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

donde se ha tenido en cuenta que el operador laplaciana no actúa sobre el vector uniforme  $\vec{E}_c$ . A continuación hay que calcular  $\nabla^2 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$ , para lo que notaremos que la laplaciana de un campo escalar no es más que la divergencia de su gradiente:

$$\nabla^2 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = \nabla \cdot \nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Calcularemos, pues, en primer lugar  $\nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$ ; para ello utilizaremos por comodidad y sencillez coordenadas cartesianas, teniendo en cuenta que

$$\vec{k} = k \hat{k} = k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}$$

donde  $k_x$ ,  $k_y$  y  $k_z$  son las componentes cartesianas de  $\vec{k}$ . Así, si escribimos también el vector de posición  $\vec{r}$  utilizando sus componentes cartesianas descritas en términos de coordenadas cartesianas

$$\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}$$

tendremos que el producto escalar  $\vec{k} \cdot \vec{r}$ , que aparece en el argumento de la exponencial cuyo gradiente queremos calcular, se escribe

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

A partir de ahí es elemental el cálculo del gradiente:

$$\nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = \nabla e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} = -j(k_x \hat{x} + k_y \hat{y} + k_z \hat{z}) e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = -j\vec{k} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (3.40)$$

Así,

$$\nabla^2 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = \nabla \cdot \nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = \nabla \cdot (-j\vec{k} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}})$$

Ahora bien,  $\vec{k}$  es un vector y  $e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$  un escalar. Si tenemos en cuenta la relación general de cálculo vectorial

$$\nabla \cdot (a\vec{b}) = \nabla a \cdot \vec{b} + a\nabla \cdot \vec{b} \quad (3.41)$$

y que  $\vec{k}$  es uniforme, la expresión de  $\nabla \cdot (-j\vec{k} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}})$  queda

$$\nabla \cdot (-j\vec{k} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}) = -j\vec{k} \nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Pero  $\nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$  ya fue calculado unas cuantas líneas más arriba, y utilizando el resultado obtenido, llegamos finalmente al cálculo de la laplaciana

$$\begin{aligned} \nabla^2 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} &= \nabla \cdot \nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = \nabla \cdot (-j\vec{k} e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}) = -j\vec{k} \nabla e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = \\ &= -j\vec{k} \cdot (-j\vec{k}) e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} = -k^2 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \end{aligned}$$

Así,  $\nabla^2 \vec{E}(\vec{r}) = -k^2 \vec{E}_c e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$ , y es evidente que la ecuación de Helmholtz (3.38) se convierte en una identidad.

Si bien se ha comprobado en el ejemplo anterior que el campo dado por la expresión (3.39) es solución de la ecuación de Helmholtz, ello no asegura que ese campo corresponda a una solución de las ecuaciones de Maxwell en una zona desprovista de fuentes; para que sí lo sea es preciso asegurar que, de acuerdo con ley de Gauss, en una zona de un medio lineal desprovisto de fuentes, se satisfaga<sup>1</sup>

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (3.42)$$

Vamos a ver que eso impone una condición sobre el vector uniforme  $\vec{E}_c$ , a saber, que  $\hat{k} \cdot \vec{E}_c = 0$ , donde  $\hat{k}$  es el vector unitario en la dirección y sentido del vector de onda  $\vec{k}$ . Para ello sustituiremos la expresión del campo eléctrico dada por (3.39) en (3.42):

<sup>1</sup> La razón es que, en el proceso para llegar a la ecuación de Helmholtz, se ha simplificado  $\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla^2 \vec{E}$  (ver la expresión (3.7); el hecho de que la misma se refiera a un campo instantáneo y no a un campo fasorial es irrelevante); para ello se consideró que, puesto que  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ , efectivamente  $\nabla \nabla \cdot \vec{E} = 0$ . Ahora bien, podría darse  $\nabla \nabla \cdot \vec{E} = 0$ , sin que fuese nula la divergencia de  $\vec{E}$ , por lo que hay que asegurar esto último. En el ejemplo para dependencia temporal arbitraria del apartado 3.1, la suposición a priori de que las derivadas en  $x$  y en  $y$  sean nulas y que no haya componente en  $z$  garantiza  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ .

$$\nabla \cdot (\vec{E}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}) = 0 \quad (3.43)$$

Teniendo en cuenta que  $e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$  es un escalar, que  $\vec{E}_c$  es un vector uniforme, de manera que  $\nabla \cdot \vec{E}_c = 0$ , aplicando la relación (3.41) al miembro de la izquierda de (3.43), y teniendo en cuenta la relación (3.40) se obtiene

$$\nabla \cdot (\vec{E}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}) = \nabla e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \cdot \vec{E}_c = -j\vec{k} \cdot \vec{E}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = 0$$

El hecho de que  $j\vec{k} \cdot \vec{E}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = 0$  independientemente de  $\vec{r}$  implica que debe cumplirse  $\vec{k} \cdot \vec{E}_c = 0$ , y, por lo tanto, también

$$\hat{k} \cdot \vec{E}_c = 0 \quad (3.44)$$

En el ejemplo siguiente se identifica el vector  $\hat{k}$  en la expresión del campo eléctrico y se comprueba que ésta corresponde a una onda plana uniforme, ya que satisface la relación (3.44).

**Ejemplo 3.3** Comprobar que el campo eléctrico  $\vec{E} = E_o(\hat{x} + j\hat{y} - j\hat{z})e^{-j\sqrt{2}\pi(y+z)}$  corresponde a una onda plana uniforme.

Para proceder a la comprobación, hay que verificar que la expresión anterior puede reducirse a la forma general  $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$  y que  $\vec{k} \cdot \vec{E}_c = 0$  o  $\hat{k} \cdot \vec{E}_c = 0$ .

Identificando términos vemos que

$$\vec{E}_c = E_o(\hat{x} + j\hat{y} - j\hat{z})$$

Además, puesto que, en general

$$\vec{k} = k\hat{k} = k_x\hat{x} + k_y\hat{y} + k_z\hat{z}$$

se tiene que

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

De modo que el exponente debe ser

$$k_x x + k_y y + k_z z = \sqrt{2}\pi y + \sqrt{2}\pi z$$

Identificando coeficientes en la expresión anterior se llega a que

$$k_x = 0$$

$$k_y = \sqrt{2\pi}$$

$$k_z = \sqrt{2\pi}$$

luego

$$\vec{k} = \sqrt{2\pi} \hat{y} + \sqrt{2\pi} \hat{z}$$

Es elemental verificar ahora que, en efecto,  $\vec{k} \cdot \vec{E}_c = 0$  y, por lo tanto, la expresión de partida corresponde al campo eléctrico de una onda plana uniforme.

### 3.2.3 Características de la onda plana uniforme

Cuando se tiene experiencia en el manejo de la notación fasorial para vectores cuyas componentes dependen del tiempo senoidalmente, las propiedades físicas del campo instantáneo pueden deducirse directamente de la inspección del fasor. En el nivel presente es, no obstante, ilustrativo “bajar”, a partir de la expresión fasorial, hasta la expresión del campo instantáneo, para analizar las características de la onda plana uniforme y poner de manifiesto el significado físico de algunos parámetros que se definirán.

Según se vio en el capítulo 2, el campo instantáneo se obtiene a partir del campo fasorial multiplicando éste por  $e^{j\omega t}$  y tomando la parte real del producto. Para el campo eléctrico instantáneo se tendrá, pues,  $\vec{\mathcal{E}}(z, t) = \text{Re}[\vec{E}e^{j\omega t}]$ . Si el campo obedece a la expresión de una onda plana uniforme en régimen senoidal permanente (3.39), tendremos

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{E}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} e^{j\omega t}] \quad (3.45)$$

Ahora bien,  $\vec{E}_c$  puede escribirse de manera explícita

$$\vec{E}_c = E_{ox} e^{j\varphi_x} \hat{x} + E_{oy} e^{j\varphi_y} \hat{y} + E_{oz} e^{j\varphi_z} \hat{z} \quad (3.46)$$

donde  $E_{oi}$  y  $\varphi_i$  ( $i = x, y, z$ ) son respectivamente un real positivo y un real que corresponden a los módulos y las fases de las componentes de  $\vec{E}_c$ ; así, sustituyendo (3.46) en (3.45) se obtiene

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = E_{ox} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_x) \hat{x} + E_{oy} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_y) \hat{y} + E_{oz} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_z) \hat{z}$$

Para ver que este campo representa *ondas que se propagan en la dirección de  $\hat{k}$* , representaremos una componente de  $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$  a lo largo de un eje  $L$  paralelo a  $\vec{k}$  (Fig. 3.5). Si sobre ese eje definimos un vector de posición  $\vec{r}_o$  que tomamos como el origen de la coordenada  $l$  que nos define la posición sobre  $L$ , el vector de posición  $\vec{r}$  de un punto sobre el eje vendrá dado por  $\vec{r} = \vec{r}_o + l\hat{k}$ . Así, para  $\vec{r}$  a lo largo de la dirección del eje  $L$ , una componente  $i$  cualquiera ( $i = x, y, z$ ) del campo vendrá dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_i(\vec{r}, t) &= E_{oi} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot (\vec{r}_o + l\hat{k}) + \varphi_i) = E_{oi} \cos(\omega t - kl - \vec{k} \cdot \vec{r}_o + \varphi_i) = \\ &= E_{oi} \cos\left[\omega\left(t - \frac{k}{\omega}l\right) - \vec{k} \cdot \vec{r}_o + \varphi_i\right] \end{aligned} \quad (3.47)$$

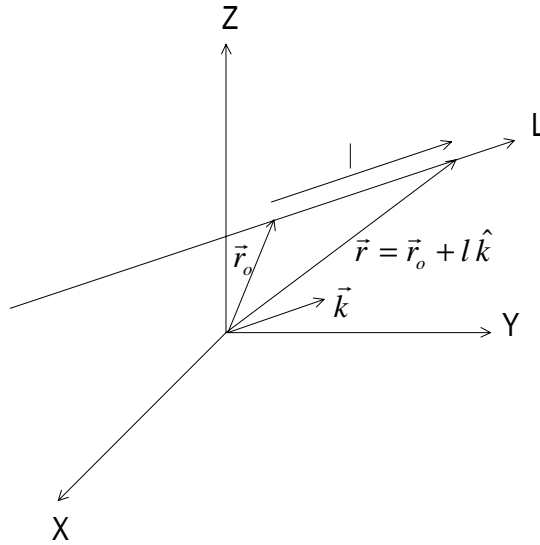


Fig. 3.5 Sistema de coordenadas y convenios de notación utilizados en el estudio de las características de las ondas planas uniformes



Ahora bien, esta expresión tiene la forma general  $f\left(t - \frac{l}{v}\right)$ , con  $v = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$  (ver expresión (3.26)), y corresponde, por tanto (ver apartado 3.1), a una *onda que se propaga en el sentido de las  $l$  crecientes con dicha velocidad*. En el apartado 3.1, donde no se especificaba dependencia temporal concreta, no se podía determinar la forma de la función  $f\left(t - \frac{l}{v}\right)$ ; vemos así que el régimen senoidal permanente fuerza a que esa forma sea senoidal. En la figura 3.6 se representa una componente del campo en dos instantes de tiempo sucesivos. Nótese el paralelismo de esta figura con la figura 3.1 (a) y con la figura 3.2 (a): una distribución de campo que se desplaza hacia la derecha de las figuras; en el caso de la figura 3.1 (a) y de la figura 3.2 (a) se representó una distribución genérica, mientras que en la figura 3.6 la suposición de régimen senoidal permanente impone forma senoidal a la distribución: es decir, la dependencia temporal senoidal da lugar, en este caso, a una dependencia espacial también senoidal. De hecho, de la inspección del tercer miembro de las igualdades (3.47) es evidente que, si el período temporal es  $T = \frac{2\pi}{\omega}$  s, el período espacial será

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (m) \quad (3.48)$$

tal como se ha indicado en la figura 3.6. El período espacial se llama *longitud de onda*, y representa la distancia entre dos puntos en una dirección paralela a la de propagación entre los que la diferencia de fase (argumento del coseno en la expresión (3.47)) de la onda es  $2\pi$  – lo que, desde el punto de vista físico, dada la periodicidad de las funciones

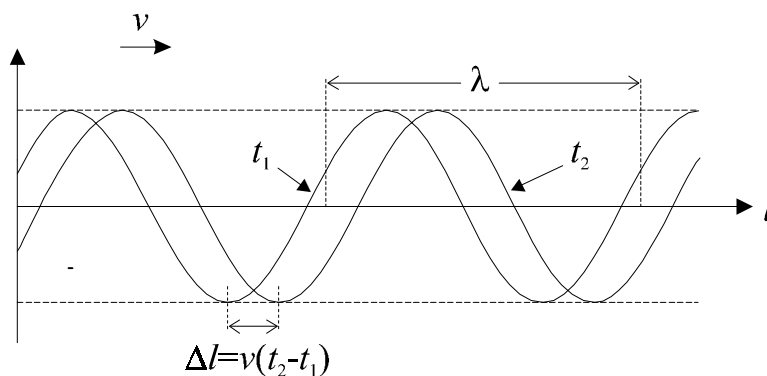


Fig. 3.6 Representación gráfica de una componente del campo a lo largo de la dirección  $L$  en dos instantes de tiempo

trigonométricas, supone el mismo valor de campo. Teniendo en cuenta la definición (3.26) del número de onda  $k$  y la de la velocidad de propagación  $v$  (3.15), sustituyéndolas en la definición (3.48) de la longitud de onda y teniendo en cuenta que la frecuencia  $f$  y la frecuencia angular (pulsación)  $\omega$  se relacionan mediante  $\omega = 2\pi f$ , se obtiene una expresión alternativa para la longitud de onda

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{v}{f} \quad (3.49)$$

Siguiendo con el paralelismo con la situación analizada en el apartado 3.1 y al principio de 3.2, notaremos que, puesto que el campo que estamos estudiando cumple, según se ha visto,  $\vec{E}_c \cdot \hat{k} = 0$ , y  $\hat{k}$  es un vector real, tendremos

$$\text{Re}[\hat{k} \cdot \vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t}] = \hat{k} \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = 0 \quad (3.50)$$

de donde es evidente que, análogamente a lo que sucedía en esos casos, en que la dirección de propagación era según  $Z$ , el *campo eléctrico es* también ahora *perpendicular a la dirección de propagación*, definida en este caso por el vector  $\hat{k}$ .

En el ejemplo que sigue se encuentra la dirección de propagación y la longitud de onda a partir de la expresión del campo eléctrico.

**Ejemplo 3.4** *Determinar la dirección de propagación y la longitud de onda de la onda plana uniforme cuyo campo eléctrico es  $\vec{E} = E_o(\hat{x} + j\hat{y} - j\hat{z})e^{-j\sqrt{2}\pi(y+z)}$ .*

En el ejemplo 3.3 ya se comprobó que dicho campo corresponde efectivamente al de una onda plana uniforme. Se determinó al mismo tiempo que  $\vec{k} = \sqrt{2}\pi \hat{y} + \sqrt{2}\pi \hat{z}$ . De esta expresión, es inmediato que  $k = 2\pi$ , y, por lo tanto, el vector unitario que indica la dirección y sentido de propagación es

$$\hat{k} = \frac{\vec{k}}{k} = \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{y} + \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{z}$$

En la figura 3.7 se representa la relación entre  $\hat{k}$  y un frente de onda, paralelo al eje  $X$  y que corta a los ejes  $Y$  y  $Z$  a  $45^\circ$ .

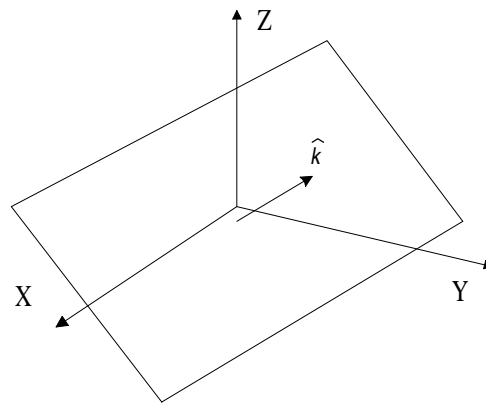


Fig. 3.7 Relación entre  $\hat{k}$  y un frente de onda para la onda plana uniforme del ejemplo 3.4

La longitud de onda es, según (3.48)

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

Si las unidades de  $x$  e  $y$  en la expresión de  $\vec{E}$  vienen dadas en  $m$ , las de  $k$  serán  $m^{-1}$ , y tendremos

$$\lambda = 1\text{ m}$$

Si la propagación tiene lugar en el vacío,  $v = c = 3 \times 10^8\text{ m/s}$ , con lo que la frecuencia del generador que está dando lugar a la onda es

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8\text{ m/s}}{1\text{ m}} = 3 \times 10^8\text{ Hz} = 300\text{ MHz}$$

En el ejemplo siguiente efectuaremos un ejercicio recíproco del anterior: a partir de la especificación de la dirección de propagación y de la frecuencia de una onda plana uniforme, determinaremos el vector de onda.

**Ejemplo 3.5** Una onda plana uniforme de frecuencia  $300 \text{ MHz}$  se propaga en el vacío en una dirección que forma con los ejes  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  ángulos  $\alpha_x = 45^\circ$ ,  $\alpha_y = 60^\circ$  y  $\alpha_z = 60^\circ$  respectivamente (Fig. 3.8). Determinar el vector de propagación.

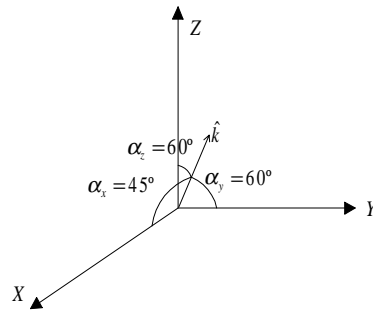


Fig. 3.8 Dirección de propagación especificada por el enunciado del ejemplo 3.5

Comprobamos en primer lugar que  $\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y + \cos^2 \alpha_z = 1$ , como debe ser para una dirección bien especificada. Entonces

$$\hat{k} = \cos \alpha_x \hat{x} + \cos \alpha_y \hat{y} + \cos \alpha_z \hat{z} = \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{x} + \frac{1}{2} \hat{y} + \frac{1}{2} \hat{z}$$

El módulo del vector de onda puede calcularse, según (3.26), como

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi f}{v}$$

Como la onda se propaga en el vacío,  $v = c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ , y como la frecuencia es  $f = 300 \text{ MHz} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ , tenemos

$$k = \frac{2\pi \times 3 \times 10^8}{3 \times 10^8} = 2\pi \text{ m}^{-1}$$

de donde el vector de onda es

$$\vec{k} = k \hat{k} = \sqrt{2\pi} \hat{x} + \pi \hat{y} + \pi \hat{z} \quad m^{-1}$$

La forma del campo eléctrico sería

$$\vec{E} = \vec{E}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = \vec{E}_c e^{-j\pi(\sqrt{2}x+y+z)}$$

con  $\vec{E}_c$  que satisface  $\vec{k} \cdot \vec{E}_c = 0$ .

En cuanto al campo magnético  $\vec{H}$ , como ya se comentó, obedece también a la ecuación de Helmholtz tridimensional, y, de hecho, hubiésemos podido iniciar el estudio de las ondas planas uniformes en régimen senoidal permanente a partir de él, en vez de haberlo hecho a partir de  $\vec{E}$ , como también se comentó. No obstante, una vez hemos empezado el estudio con  $\vec{E}$ , y supuesta ya determinada la forma concreta de éste que corresponde a una onda plana uniforme en régimen senoidal permanente, podemos calcular  $\vec{H}$  a partir de  $\vec{E}$  utilizando las ecuaciones de Maxwell, como ya se hizo en el estudio del apartado 3.1 para ondas con dependencia temporal arbitraria. En efecto, según la ley de Faraday

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu\vec{H}$$

de donde

$$\vec{H} = \frac{j}{\omega\mu} \nabla \times \vec{E}$$

y sustituyendo en esta última expresión la del campo eléctrico correspondiente a la onda plana uniforme (3.39), se tiene

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{j}{\omega\mu} \nabla \times (\vec{E}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}) \quad (3.51)$$

Ahora bien, según el cálculo vectorial, el rotacional del producto de un escalar por un vector puede escribirse

$$\nabla \times (a\vec{b}) = \nabla a \times \vec{b} + a \nabla \times \vec{b} \quad (3.52)$$

Aplicando este resultado al rotacional del producto del escalar  $e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$  por el vector  $\vec{E}_c$  en (3.51), y teniendo en cuenta que  $\vec{E}_c$  es un vector uniforme, se obtiene

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{j}{\omega\mu} \nabla e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \times \vec{E}_c$$

Utilizando ahora el resultado (3.40) en la expresión anterior se llega a

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{\vec{k}}{\omega\mu} \times \vec{E}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (3.53)$$

Teniendo en cuenta que  $\vec{k} = k\hat{k} = \omega\sqrt{\mu\epsilon}\hat{k}$ , y que  $\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$  el campo magnético puede escribirse de manera equivalente

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{\hat{k}}{\eta} \times \vec{E}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (3.54)$$

o también, puesto que estamos partiendo de que  $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$ ,

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{\hat{k}}{\eta} \times \vec{E} \quad (3.55)$$

Cualquiera de las expresiones (3.53) a (3.55) puede utilizarse para calcular el campo magnético de una onda plana uniforme en régimen senoidal permanente si se conoce su campo magnético. El ejemplo siguiente ilustra el cálculo del campo magnético de una onda plana uniforme a partir de su campo eléctrico.

**Ejemplo 3.6** *El campo eléctrico de una onda plana uniforme es  $\vec{E} = E_o(\hat{x} + j\hat{y} - j\hat{z})e^{-j\sqrt{2}\pi(y+z)}$ . Calcular el campo magnético correspondiente.*

Este es el campo eléctrico que ya aparecía en los ejemplos 3.3 y 3.4, del que sabemos que efectivamente corresponde a una onda plana uniforme que se propaga en una dirección y sentido identificados por el vector  $\hat{k} = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{z}$ . Así, el campo magnético puede encontrarse directamente por aplicación de la expresión (3.55):

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{r}) &= \frac{E_o}{\eta} \left( \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{z} \right) \times (\hat{x} + j\hat{y} - j\hat{z}) e^{-j\sqrt{2}\pi(y+z)} = \\ &= -\frac{E_o}{\eta} \frac{\sqrt{2}}{2} (2j\hat{x} - \hat{y} + \hat{z}) e^{-j\sqrt{2}\pi(y+z)} \end{aligned}$$

Por otra parte, del examen de (3.54) está claro que, para una onda plana uniforme en régimen senoidal permanente

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (3.56)$$

donde  $\vec{H}_c$  es un vector uniforme dado por

$$\vec{H}_c = \frac{\hat{k}}{\eta} \times \vec{E}_c$$

(a título ilustrativo, en el resultado del ejemplo 3.6,  $\vec{H}_c = -\frac{E_o}{\eta} \frac{\sqrt{2}}{2} (2j\hat{x} - \hat{y} + \hat{z})$ ).

Utilizando la identidad vectorial

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

está claro que

$$\hat{k} \cdot \vec{H}_c = \hat{k} \cdot \left( \frac{\hat{k}}{\eta} \times \vec{E}_c \right) = \vec{E}_c \cdot \left( \hat{k} \times \frac{\hat{k}}{\eta} \right) = 0 \quad (3.57)$$

ya que el producto vectorial de dos vectores con la misma dirección es nulo.

Así, de (3.56), vemos que el campo magnético de la onda plana uniforme en régimen senoidal permanente tiene la misma forma general que el campo eléctrico, y la expresión (3.57) muestra asimismo que el vector uniforme  $\vec{H}_c$  de la expresión (3.56) cumple una relación análoga a la ya discutida  $\hat{k} \cdot \vec{E}_c = 0$ . Por lo tanto, el campo magnético presentará propiedades análogas a las estudiadas para el campo eléctrico y, en particular, el campo instantáneo  $\vec{\mathcal{H}}(\vec{r})$  será perpendicular en todo momento a la dirección de propagación:

$$\hat{k} \cdot \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) = 0 \quad (3.58)$$

Además

$$\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{H} e^{j\omega t}] = \text{Re}\left[\frac{\hat{k}}{\eta} \times \vec{E} e^{j\omega t}\right] = \frac{\hat{k}}{\eta} \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) \quad (3.59)$$

luego el campo magnético instantáneo  $\vec{\mathcal{H}}$  es *perpendicular en todo momento* al campo eléctrico instantáneo  $\vec{\mathcal{E}}$ . De hecho, la expresión (3.59) está diciendo que los vectores  $[\hat{k}, \vec{\mathcal{E}}, \vec{\mathcal{H}}]$  están definiendo un triedro trirectángulo positivo. Esta situación se describe

gráficamente en la figura 3.9. Además, como  $\hat{k}$  es perpendicular a  $\vec{\mathcal{E}}$ , de (3.59) resulta que, en todo instante

$$|\vec{\mathcal{H}}| = \frac{|\vec{\mathcal{E}}|}{\eta}$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{|\vec{\mathcal{E}}|}{|\vec{\mathcal{H}}|} = \eta \quad (3.60)$$

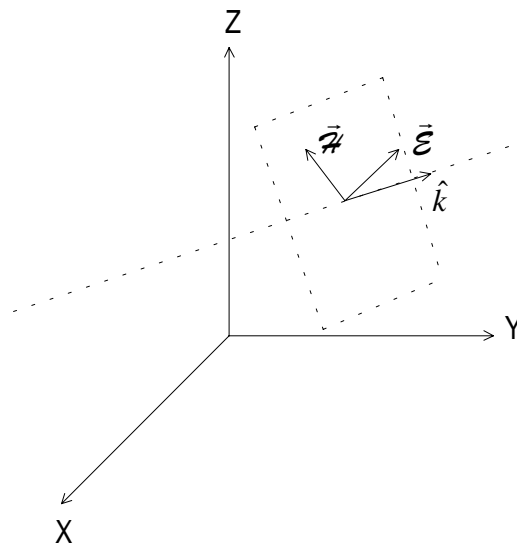


Fig. 3.9 Representación gráfica del campo eléctrico y magnético instantáneos de una onda plana uniforme en un punto e instante dados

En el caso de que el campo que se hubiese calculado en primer lugar hubiese sido el magnético, el campo eléctrico puede deducirse a partir de aquél siguiendo un procedimiento totalmente paralelo al que se siguió para deducir el campo magnético a partir del eléctrico. En efecto, en puntos donde no hay densidad de corriente, como en el caso que estamos considerando, la ley de Ampère-Maxwell se reduce a

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon \vec{E}$$

de donde

$$\vec{E} = -\frac{j}{\omega\epsilon} \nabla \times \vec{H} \quad (3.61)$$



Si el campo magnético corresponde al de una onda plana uniforme sabemos que su forma es

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (3.56)$$

con  $\vec{H}_c$  un vector uniforme. Sustituyendo en (3.61) y utilizando (3.52) y (3.40) se obtiene

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{j}{\omega\epsilon} \vec{H}_c \times \nabla e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = \eta \vec{H}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \times \hat{k} = \\ &= \eta \vec{H} \times \hat{k} \end{aligned} \quad (3.62)$$

Como ejercicio, el lector puede comprobar que, si parte de la expresión del campo magnético a que se llegó en el ejemplo 3.6, aplicando la expresión del último miembro de (3.62) recuperará el campo eléctrico de los enunciados de los ejemplos 3.3, 3.4 y 3.6.

Utilizando el hecho de que  $\vec{E} \cdot \hat{k} = 0$  y  $\vec{H} \cdot \hat{k} = 0$  y las propiedades del triple producto vectorial, es muy fácil pasar de la expresión de  $\vec{E}$  en función de  $\vec{H}$  a la expresión de  $\vec{H}$  en función de  $\vec{E}$  y viceversa, como se discute en el siguiente ejercicio.

**Ejemplo 3.7.** *Deducción de la expresión de  $\vec{E}$  en función de  $\vec{H}$  a partir de la expresión de  $\vec{H}$  en función de  $\vec{E}$  para una onda plana uniforme.*

Partimos de que, para una onda plana uniforme

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{\hat{k}}{\eta} \times \vec{E} \quad (3.55)$$

Multiplicando vectorialmente los dos miembros de la expresión anterior por  $\hat{k}$  se tiene

$$\hat{k} \times \vec{H}(\vec{r}) = \hat{k} \times \left( \frac{\hat{k}}{\eta} \times \vec{E} \right)$$

y utilizando la identidad

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (3.63)$$

se llega a

$$\hat{k} \times \vec{H}(\vec{r}) = \frac{\hat{k}}{\eta} (\hat{k} \cdot \vec{E}) - \vec{E} \left( \hat{k} \cdot \frac{\hat{k}}{\eta} \right) = -\frac{\vec{E}}{\eta}$$

Ahora bien,  $\hat{k} \cdot \vec{E} = 0$  y  $\hat{k} \cdot \hat{k} = 1$  de donde

$$\vec{E} = -\eta \hat{k} \times \vec{H}(\vec{r}) = \eta \vec{H}(\vec{r}) \times \hat{k}$$

como se había deducido en (3.62).

El mismo procedimiento puede emplearse para encontrar la expresión de  $\vec{H}$  en función de  $\vec{E}$  a partir de la de  $\vec{E}$  en función de  $\vec{H}$ .

Las ondas planas uniformes en régimen senoidal permanente pueden utilizarse para introducir una serie de elementos terminológicos que podrán ser utilizados más adelante en otras situaciones más complejas. Por ejemplo:

\* *Frente de onda*: se entiende, en general, por frente de onda el lugar geométrico de los puntos del espacio en que una componente cualquiera del campo tiene la *misma fase* en un instante dado. Siendo la fase el argumento de las funciones seno o coseno que aparecen en la expresión de las componentes del campo, la condición de fase constante es que

$$\theta(\vec{r}, t) = \omega t - \alpha(\vec{r}) = Cte$$

En el caso particular de una onda plana uniforme,  $\alpha(\vec{r}) = -\vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi$ , con  $\varphi$  constante, por lo que la condición anterior se convierte en

$$\theta(\vec{r}, t) = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi = Cte \quad (3.64)$$

Como el frente de onda se define a partir de una fase uniforme en un *instante dado*,  $t$  es una constante en la expresión anterior; asimismo, como en una onda plana uniforme  $\varphi$  es también constante, resulta que un frente de onda viene definido por la condición

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = Cte$$

que puede ponerse de manera más explícita, utilizando la definición de producto vectorial, como

$$k_x x + k_y y + k_z z = Cte$$

para ver claramente que se trata de la ecuación de un plano. Incidentalmente, ésta es precisamente la causa de la denominación de *onda plana*. El adjetivo *uniforme* viene de que, sobre un frente de onda, el campo es uniforme (no varía de un punto a otro). En el capítulo 5, dedicado a propagación guiada, se verán ondas que son planas, pero no uniformes. Al tratar de radiación en el capítulo 6 aparecerán ondas esféricas (cuyos frentes de onda son esferas).

\* *Velocidad de fase en una dirección dada  $\hat{u}$* : si ahora se deja transcurrir el tiempo, deberemos desplazarnos para que, a medida que el tiempo cambia, la fase permanezca constante. La velocidad de fase en una dirección dada es la velocidad ficticia a la que un hipotético observador debería desplazarse en esa dirección para “ver” siempre la misma fase.

En el caso de una onda plana uniforme, la fase de una componente arbitraria del campo viene dada por (3.64). Si la dirección elegida es la definida por  $\hat{k}$ , los vectores de la posición del observador hipotético vendrán dados por (Fig. 3.5)

$$\vec{r} = \vec{r}_o + l \hat{k}$$

donde  $\vec{r}_o$  es el vector de posición inicial y  $l$  es la coordenada en la dirección  $\hat{k}$  a partir de  $\vec{r}_o$ , de manera que la fase en función del tiempo y de  $l$  vendrá dada por

$$\theta(l, t) = \omega t - kl - \vec{k} \cdot \vec{r}_o + \varphi = Cte \quad (3.65)$$

donde se ha tenido en cuenta que  $\vec{k} \cdot \hat{k} = k$ . Para permanecer en el mismo frente de onda,  $l$  debe cambiar de tal manera que  $\theta$  sea constante en función del tiempo, es decir  $\frac{d\theta}{dt} = 0$ .

Ahora bien, teniendo en cuenta la expresión (3.65) de la fase, la condición de derivada temporal nula resulta en

$$\omega - k \frac{dl}{dt} = 0$$

Pero  $\frac{dl}{dt}$  es precisamente la velocidad  $v_{\hat{k}}$  a la que hay que desplazarse a lo largo de la dirección  $\hat{k}$  para permanecer sobre el frente de onda, de manera que

$$v_{\hat{k}} = \frac{dl}{dt} = \frac{\omega}{k} = v$$

Es decir, los frentes de onda, perpendiculares a la dirección  $\hat{k}$ , se propagan paralelamente a sí mismos con velocidad  $v$ . Además, obviamente, la distancia entre dos frentes de onda sucesivos correspondiente a fases idénticas (salvo un término aditivo  $2\pi$ ) es la longitud de onda  $\lambda$ .

Supongamos ahora que la dirección elegida es definida por  $\hat{u} \neq \hat{k}$  (Fig. 3.10). Ahora, para un observador que se desplace desde el punto de referencia en esa dirección

$$\vec{r} = \vec{r}_o + l \hat{u}$$

donde  $l$  es ahora la coordenada según  $\hat{u}$ . La fase del campo será ahora, sustituyendo la expresión anterior en (3.64),

$$\theta(l, t) = \omega t - l \vec{k} \cdot \hat{u} - \vec{k} \cdot \vec{r}_o + \phi$$

y la condición para permanecer sobre el mismo frente de onda a medida que transcurre el tiempo es

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega - \vec{k} \cdot \hat{u} \frac{dl}{dt} = 0$$

donde ahora  $\frac{dl}{dt}$  es la velocidad  $v_{\hat{u}}$  a la que debería desplazarse según  $\hat{u}$  el hipotético observador. Así

$$v_{\hat{u}} = \frac{dl}{dt} = \frac{\omega}{\vec{k} \cdot \hat{u}} = \frac{\omega}{k \hat{k} \cdot \hat{u}}$$

que teniendo en cuenta las definiciones (3.26) de  $k$  y (3.15) de  $v$  puede también escribirse

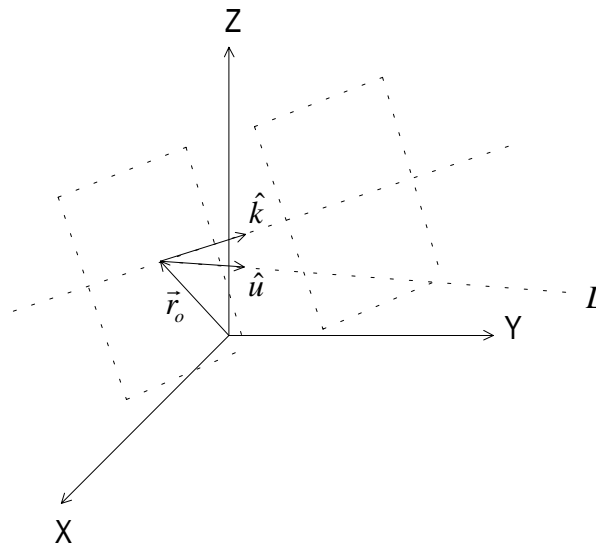


Fig. 3.10 Representación geométrica para el cálculo de la velocidad de fase en la dirección definida por  $\hat{u}$

$$v_{\hat{u}} = \frac{1}{\hat{k} \cdot \hat{u} \sqrt{\mu \epsilon}}$$

Puesto que  $\hat{k} \cdot \hat{u} \leq 1$ , resulta que  $v_{\hat{u}} \geq v$ . Esto no contraviene ningún principio relativista, puesto que  $v_{\hat{u}}$  no corresponde a la velocidad de ningún ente físico.

El concepto de velocidad de fase puede parecer artificioso en el contexto de las ondas planas uniformes y, ciertamente, no hubiese sido imprescindible introducirlo para la inteligibilidad del resto del presente capítulo; su utilidad aparecerá claramente en el capítulo 5, dedicado a propagación guiada, en relación con conceptos de impedancia y de dispersión; introducirlo ahora tiene la ventaja de la simplicidad matemática de la situación concreta con que se ilustra.

En resumen, para una onda plana uniforme en régimen senoidal permanente que se propague en la dirección y sentido indicado por un vector unitario arbitrario  $\hat{k}$ , se tiene

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \\ \vec{H} &= \vec{H}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}\end{aligned}$$

con  $\vec{k} = k \hat{k}$ , y  $\vec{E}_c$  y  $\vec{H}_c$  vectores (en general complejos) uniformes tales que

$$\begin{aligned}\vec{H}_c &= \frac{\hat{k}}{\eta} \times \vec{E}_c \\ \vec{E}_c &= \eta \vec{H}_c \times \hat{k}\end{aligned}\tag{3.66}$$

y

$$\begin{aligned}\hat{k} \cdot \vec{E}_c &= 0 \\ \hat{k} \cdot \vec{H}_c &= 0\end{aligned}\tag{3.67}$$

de donde se deduce que  $[\vec{E}, \vec{H}, \hat{k}]$  definen un triedro trirrectángulo positivo (Fig. 3.9).

### 3.2.4 Densidad de flujo de potencia asociada a la onda

Desde el punto de vista de la ingeniería es importante determinar el flujo de potencia asociado a una onda electromagnética. En su momento se vio que la densidad de flujo de potencia instantáneo asociado al campo electromagnético viene dada por

$$\vec{\mathcal{P}} = \vec{\mathcal{E}} \times \vec{\mathcal{H}} \quad (3.2)$$

Ahora bien, en régimen senoidal permanente, los campos instantáneos se obtienen a partir de los fasores como  $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{E} e^{j\omega t}]$  y  $\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{H} e^{j\omega t}]$ . Pero las partes reales anteriores pueden escribirse de manera más explícita como semisuma del fasor más su conjugado

$$\begin{aligned} \text{Re}[\vec{E} e^{j\omega t}] &= \frac{1}{2}(\vec{E} e^{j\omega t} + \vec{E}^* e^{-j\omega t}) \\ \text{Re}[\vec{H} e^{j\omega t}] &= \frac{1}{2}(\vec{H} e^{j\omega t} + \vec{H}^* e^{-j\omega t}) \end{aligned}$$

lo que, sustituyendo en (3.2), da

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{4}(\vec{E} \times \vec{H} e^{2j\omega t} + \vec{E} \times \vec{H}^* + \vec{E}^* \times \vec{H} + \vec{E}^* \times \vec{H}^* e^{-2j\omega t}) \quad (3.68)$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que

$$\vec{E} \times \vec{H}^* + \vec{E}^* \times \vec{H} = 2 \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*]$$

y que

$$\vec{E} \times \vec{H} e^{2j\omega t} + \vec{E}^* \times \vec{H}^* e^{-2j\omega t} = 2 \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H} e^{2j\omega t}]$$

la expresión (3.68) se escribe

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] + \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H} e^{2j\omega t}]$$

En esta última expresión  $\frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*]$  es un vector real independiente del tiempo ( $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  son fasores); por otra parte,  $\vec{E} \times \vec{H}$  es un vector complejo independiente del tiempo que puede escribirse explícitamente en función de sus partes real e imaginaria como

$$\vec{E} \times \vec{H} = \vec{a} + j\vec{b}$$

con  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  vectores reales independientes del tiempo. Utilizando esta expresión, es inmediato que

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re}[\vec{E} \times \vec{H} e^{2j\omega t}] = \frac{1}{2} \vec{a} \cos 2\omega t - \frac{1}{2} \vec{b} \sin 2\omega t$$

donde se ve que  $\frac{1}{2} \operatorname{Re}[\vec{E} \times \vec{H} e^{2j\omega t}]$  posee una periodicidad temporal de período  $T_p = \frac{\pi}{\omega}$  y, por lo tanto, no contribuye a la densidad de flujo de potencia media. Ésta vendrá dada por el vector de Poynting medio

$$\vec{P}(\vec{r}) = \langle \vec{\mathcal{P}}(\vec{r}, t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \vec{\mathcal{P}}(\vec{r}, t) dt$$

y el resultado será

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] \quad \text{W / m}^2 \quad (3.69)$$

Este importante *resultado es general para campos en régimen senoidal permanente*. En el caso particular de que el campo corresponda a una onda plana uniforme, los fasores que intervienen en la expresión (3.69) vendrán dados, como ya se ha visto, por

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (3.39)$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (3.56)$$

donde  $\vec{E}(\vec{r})$  y  $\vec{H}(\vec{r})$  se relacionan mediante las expresiones (3.55) y (3.62) y cumplen  $\hat{k} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = 0$ ,  $\hat{k} \cdot \vec{H}(\vec{r}) = 0$ . Así

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \vec{E} \times \left( \frac{\hat{k}}{\eta} \times \vec{E}^* \right) \right] \quad (3.70)$$

que, utilizando la identidad vectorial (3.63), se convierte en

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{2\eta} \operatorname{Re}[\hat{k}(\vec{E} \cdot \vec{E}^*) - \vec{E}^*(\hat{k} \cdot \vec{E})]$$

Pero como  $\hat{k} \cdot \vec{E} = 0$ , resulta

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{2\eta} \operatorname{Re}[\hat{k}(\vec{E} \cdot \vec{E}^*)]$$

Ahora bien, está claro que  $\vec{E} \cdot \vec{E}^* \equiv |\vec{E}|^2$  es real, y, siendo también  $\hat{k}$  un vector real, la expresión anterior puede escribirse

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{2\eta} |\vec{E}|^2 \hat{k}$$

Puesto que, según (3.39),  $|\vec{E}| = |\vec{E}_c|$ , el vector de Poynting medio puede ponerse también como

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{2\eta} |\vec{E}_c|^2 \hat{k}$$

Asimismo, si, al aplicar a la onda plana uniforme la expresión general del vector de Poynting medio, se pone  $\vec{E}$  en función de  $\vec{H}$  mediante la expresión (3.62), en vez de  $\vec{H}$  en función de  $\vec{E}$  como se hizo en la expresión (3.70), se obtiene

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] = \frac{1}{2} \text{Re}[\eta \vec{H} \times \hat{k} \times \vec{H}^*]$$

que, utilizando de nuevo la identidad vectorial (3.63), el hecho de que  $\hat{k} \cdot \vec{H}(\vec{r}) = 0$  y la definición  $\vec{H} \cdot \vec{H}^* \equiv |\vec{H}|^2$  lleva a

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \eta |\vec{H}|^2 \hat{k}$$

o, alternativamente, dado que, según (3.56),  $|\vec{H}| = |\vec{H}_c|$ , a

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \eta |\vec{H}_c|^2 \hat{k}$$

La utilización de estas relaciones se ilustra con el siguiente ejemplo.



**Ejemplo 3.8** El campo magnético de una onda plana uniforme responde a la expresión  $\vec{H} = H_o \left[ \left( 1 - j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \hat{x} - \left( \sqrt{2} + j \frac{1}{2} \right) \hat{y} + j \frac{3}{2} \hat{z} \right] e^{-j\pi(\sqrt{2}x+y+z)}$ . Determinar la forma del vector de Poynting y, si la onda transporta una densidad media de flujo potencia de  $1 \text{ mW/m}^2$ , calcular  $|H_o|$ .

En la expresión del campo debe identificarse  $e^{-j\pi(\sqrt{2}x+y+z)} = e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$ . Siguiendo la técnica de los ejemplo 3.3 y 3.4, se encuentra que la forma del argumento de la exponencial supone que  $\vec{k} = \sqrt{2}\pi \hat{x} + \pi \hat{y} + \pi \hat{z}$  y  $\hat{k} = \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{x} + \frac{1}{2} \hat{y} + \frac{1}{2} \hat{z}$ , de donde se comprueba que  $\hat{k} \cdot \vec{H} = 0$  y, por lo tanto, que el campo dado corresponde efectivamente al de una onda plana uniforme. El vector de Poynting medio puede entonces calcularse como

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{1}{2} \eta |\vec{H}_c|^2 \hat{k}$$

donde

$$\begin{aligned} |\vec{H}_c|^2 &= \\ |H_o|^2 \left[ \left( 1 - j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \hat{x} - \left( \sqrt{2} + j \frac{1}{2} \right) \hat{y} + j \frac{3}{2} \hat{z} \right] \cdot \left[ \left( 1 + j \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \hat{x} - \left( \sqrt{2} - j \frac{1}{2} \right) \hat{y} - j \frac{3}{2} \hat{z} \right] &= \\ 6|H_o|^2 \end{aligned}$$

Así pues,

$$\vec{P}(\vec{r}) = 3\eta |\vec{H}_o|^2 \hat{k}$$

Una densidad de flujo de potencia es de  $1 \text{ mW} / \text{m}^2$  significa que

$$3\eta |\vec{H}_o|^2 = 1 \text{ mW} / \text{m}^2$$

de donde, suponiendo propagación en el vacío ( $\eta \approx 120\pi \Omega$ )

$$|H_o| \approx 9,4 \times 10^{-4} \text{ A/m}$$

### 3.3 Polarización de las ondas planas uniformes en régimen senoidal permanente

Se llama *polarización* de un campo vectorial al *tipo de trayectoria* que describe el extremo (o afijo) del vector campo instantáneo.

Contra lo que a primera vista pudiera parecer, la polarización que presente el campo electromagnético no es una cuestión de índole puramente teórica, sino que, por el contrario, presenta un gran interés práctico. La razón para ello estriba en que la polarización tiene efectos en la interacción de una onda con materiales.

Por ejemplo, cuando se trata de captar energía de una onda a frecuencias radioeléctricas, la polarización influirá en la eficacia de la antena que se use. De hecho, una antena puede diseñarse para captar energía de una onda con determinada polarización y ser “ciega” a otro tipo de polarización (polarizaciones ortogonales). A su vez, una antena optimizada para recibir ondas con determinada polarización, dará lugar a ondas con ese mismo tipo de polarización cuando se use en emisión.

En la práctica, esto se emplea para “reutilizar” el espectro electromagnético, sin que señales a (casi) la misma frecuencia se interfieran mutuamente, gracias a la discriminación de polarización que efectúa la antena receptora. La reutilización del espectro se encuentra, por ejemplo, en los sistemas de difusión de televisión desde satélites, en que se emiten canales cuyos espectros se superponen, sin que se interfieran mutuamente gracias al empleo de polarizaciones ortogonales.

Por otra parte, el tipo de polarización también puede influir en la propagación cuando hay inhomogeneidades en el medio (proximidad de la tierra, presencia de la ionosfera...).

#### 3.3.1 Descripción matemática de la polarización

En el apartado 3.2.3 se vio que los campos eléctrico y magnético instantáneos de una onda plana uniforme son, en todo instante y punto, perpendiculares al vector de propagación:

$$\hat{k} \cdot \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = 0 \quad (3.50)$$

$$\hat{k} \cdot \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) = 0 \quad (3.58)$$

Aunque las propiedades físicas de los campos no dependen del sistema de coordenadas en que éstos se representen, el hecho de que sean perpendiculares a  $\hat{k}$  hace

cómodo utilizar una *base ortogonal* constituida por  $\hat{k}$  y dos vectores unitarios, que llamaremos  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$  perpendiculares a  $\hat{k}$ :

$$\hat{k} \cdot \hat{e}_1 = 0$$

$$\hat{k} \cdot \hat{e}_2 = 0$$

y perpendiculares entre sí:

$$\hat{e}_1 \cdot \hat{e}_2 = 0$$

de tal manera que  $[\hat{k}, \hat{e}_1, \hat{e}_2]$  definan un triedro trirrectángulo positivo:

$$\hat{k} \times \hat{e}_1 = \hat{e}_2$$

$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{k} \quad (3.71)$$

$$\hat{e}_2 \times \hat{k} = \hat{e}_1$$

Nótese que, como se ilustra en la figura 3.11, existe un grado de libertad en la definición de  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$ : la elección de uno de ellos es arbitraria, siempre que se cumpla la condición de perpendicularidad respecto a  $\hat{k}$ ; el otro viene inmediatamente impuesto por la relación  $\hat{k} \times \hat{e}_1 = \hat{e}_2$  o  $\hat{e}_2 \times \hat{k} = \hat{e}_1$ .

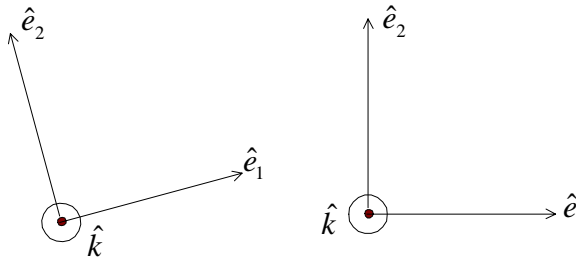


Fig. 3.11 Posibles elecciones de los vectores unitarios  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$

El interés de utilizar esta base es que, en ella, por ser perpendiculares en todo momento a la dirección de propagación,  $\vec{\mathcal{E}}$  y  $\vec{\mathcal{H}}$  sólo tienen dos componentes: en  $\hat{e}_1$  y en  $\hat{e}_2$ . Así, por ejemplo

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = E_{o1} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_1) \hat{e}_1 + E_{o2} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_2) \hat{e}_2 \quad (3.72)$$

De esta expresión, se sigue inmediatamente que la trayectoria que describe el afijo de  $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$  en un punto dado en función del tiempo es una elipse. En efecto, es una relación matemática conocida que una elipse en el plano  $XY$  puede expresarse paramétricamente como

$$x = x_o \cos(t + \alpha)$$

$$y = y_o \cos(t + \beta)$$

donde  $t$  es el parámetro que, al tomar valores reales, da los distintos puntos  $(x, y)$  de la elipse. Lo anterior también puede expresarse en términos del vector  $\vec{a}$  cuyo extremo recorre los puntos de la elipse en función del parámetro  $t$  (Fig. 3.12):

$$\vec{a} = x_o \cos(t + \alpha) \hat{x} + y_o \cos(t + \beta) \hat{y}$$

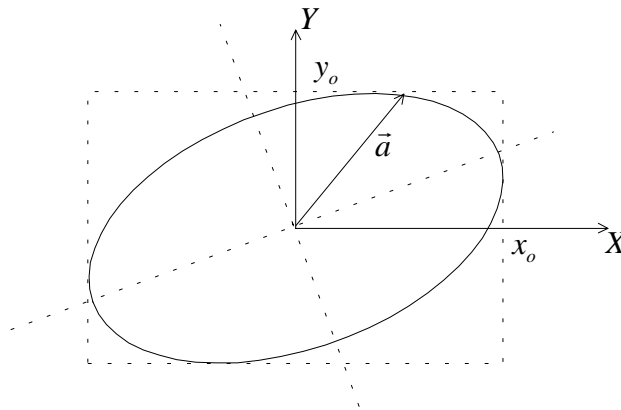


Fig. 3.12 *Elipse en el plano  $XY$  centrada en el origen*

Comparando esta expresión con la del campo eléctrico (3.72), es evidente que ambas son formalmente idénticas, con las correspondencias

$$x_o \leftrightarrow E_{o1}$$

$$y_o \leftrightarrow E_{o2}$$

$$t \leftrightarrow \omega t$$

$$\alpha \leftrightarrow \phi_1 - \vec{k} \cdot \vec{r}$$

$$\beta \leftrightarrow \phi_2 - \vec{k} \cdot \vec{r}$$

$$\hat{x} \leftrightarrow \hat{e}_1$$

$$\hat{y} \leftrightarrow \hat{e}_2$$

Así pues, el extremo de  $\vec{\mathcal{E}}$  describe en función del tiempo una trayectoria elíptica<sup>1</sup>, a la que da una vuelta completa cada  $T = \frac{2\pi}{\omega}$ , en el plano determinado por  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$ , perpendicular a la dirección de propagación (Fig. 3.13).

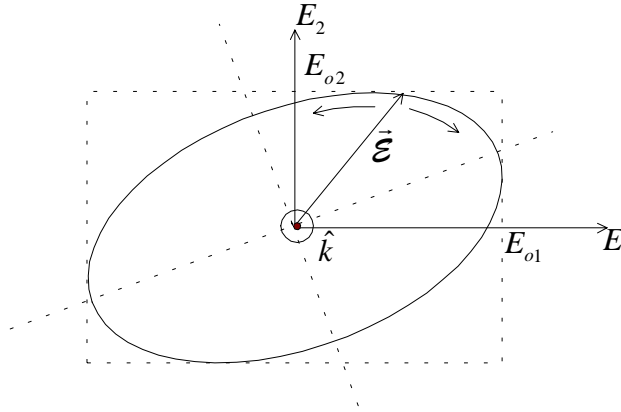


Fig. 3.13 *Elipse de polarización del campo eléctrico, contenida en el plano definido por  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$ , perpendicular a  $\hat{k}$ . El sentido de giro sugerido por las flechas dependerá del desfase entre las componentes en  $\hat{e}_1$  y en  $\hat{e}_2$*

Como se deduce fácilmente de (3.72), en la base definida por  $\hat{e}_1$ ,  $\hat{e}_2$  y  $\hat{k}$  el fasor del campo eléctrico se escribe

$$\vec{E}(\vec{r}) = (E_{o1}e^{j\varphi_1}\hat{e}_1 + E_{o2}e^{j\varphi_2}\hat{e}_2)e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad (3.73)$$

Para poder deducir de una ojeada las características de la elipse de polarización que se estudiarán en el apartado siguiente, resulta cómodo definir los parámetros

$$p = \frac{E_{o2}}{E_{o1}} \quad (3.74 \text{ a})$$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \quad (3.74 \text{ b})$$

<sup>1</sup> Se puede demostrar que, en general, los afijos de los campos en régimen senoidal permanente siempre describen trayectorias elípticas. En una situación general de régimen senoidal permanente las características de las elipses pueden variar de un punto a otro; en el caso particular de las ondas planas, las características son las mismas en todo punto del espacio.

En efecto, la expresión (3.73) puede escribirse sacando  $E_{o1}e^{j\varphi_1}$  factor común

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_{o1}e^{j\varphi_1} \left( \hat{e}_1 + \frac{E_{o2}}{E_{o1}} e^{j(\varphi_2 - \varphi_1)} \hat{e}_2 \right) e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

que, definiendo la constante compleja  $C = E_{o1}e^{j\varphi_1}$  y utilizando las definiciones (3.74), se reduce a

$$\vec{E}(\vec{r}) = C \left( \hat{e}_1 + pe^{j\Delta\varphi} \hat{e}_2 \right) e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (3.75)$$

A partir de esta última expresión, y utilizando la relación (3.55) y las propiedades (3.71) de  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$ , puede deducirse el fasor campo magnético

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{\hat{k}}{\eta} \times \vec{E}(\vec{r}) = \frac{C}{\eta} (\hat{e}_2 - pe^{j\Delta\varphi} \hat{e}_1) e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \quad (3.76)$$

Comparando las expresiones (3.75) y (3.76) con las expresiones genéricas para los fasores campo eléctrico y magnético (3.39) y (3.56) se deduce que, con la base y notación adoptadas,

$$\vec{E}_c = C \left( \hat{e}_1 + pe^{j\Delta\varphi} \hat{e}_2 \right) \quad (3.77 \text{ a})$$

$$\vec{H}_c = \frac{C}{\eta} (\hat{e}_2 - pe^{j\Delta\varphi} \hat{e}_1) \quad (3.77 \text{ b})$$

Refiriéndose a las expresiones de los fasores de los campos (3.75) y (3.76), es de notar que la información sobre la polarización no está en los términos de fase  $e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$ , que indican simplemente que se trata de ondas que se propagan en el sentido indicado por  $\hat{k}$ ; la información sobre la polarización tampoco está en la constante multiplicativa  $C$  de las expresiones (3.77), cuyo cambio supone simplemente modificaciones en la amplitud y en el origen de tiempos que afectan por igual a todas las componentes de los campos; así pues, *la información sobre polarización está contenida en el factor  $\hat{e}_1 + pe^{j\Delta\varphi} \hat{e}_2$  de la expresión del fasor campo eléctrico o, alternativamente, en el fasor  $\hat{e}_2 - pe^{j\Delta\varphi} \hat{e}_1$  de la expresión del campo magnético.* En suma, *identificando los parámetros  $p$  y  $\Delta\varphi$  en las expresiones de los campos, se pueden deducir las características de la elipse de polarización que se presentan en el apartado que sigue.*

### 3.3.2 Características de la elipse de polarización

Desde un punto de vista práctico, la elipse de polarización está caracterizada no sólo por sus propiedades geométricas (orientación y relación axial), sino también por el sentido de giro del afijo del campo a su alrededor. En efecto, en un sistema de radiocomunicaciones interesa cómo están orientadas las antenas respecto de la elipse de polarización de las ondas que reciben; pero una antena puede también captar preferentemente una onda cuyo campo gire en un sentido determinado, o, alternatively, se pueden diseñar antenas que generen ondas con las mismas características de la elipse de polarización, pero sobre las cuales el campo “gire” en sentido contrario.

A continuación se presentan las expresiones matemáticas que describen las características de la elipse de polarización. En el caso de las características puramente geométricas, las expresiones se dan sin demostrar; el lector interesado puede referirse a textos de análisis geométrico.

\* *Orientación*: la orientación de la elipse es el ángulo que el eje mayor forma con una dirección de referencia. Por ejemplo, si tomamos como tal la que define  $\hat{e}_1$  (Fig. 3.14), mediante consideraciones geométricas se llega a que

$$\beta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2 E_{o1} E_{o2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}{E_{o1}^2 - E_{o2}^2} \quad (3.78)$$

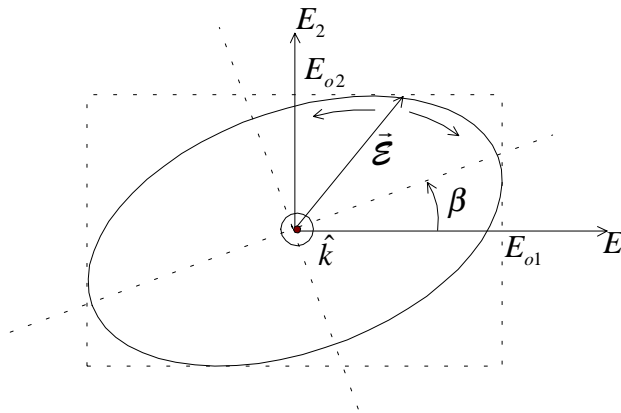


Fig. 3.14 Orientación de la elipse de polarización

donde  $E_{o1}$ ,  $E_{o2}$ ,  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  se han definido en la expresión (3.72). Utilizando las definiciones (3.74), la expresión (3.78) puede ponerse de forma más compacta

$$\beta = \frac{1}{2} \arctg \frac{2 \cos \Delta \varphi}{\frac{1}{p} - p} \quad (3.79)$$

Nótese que la orientación de la elipse que describe  $\vec{\mathcal{H}}$  está girada  $90^\circ$  respecto de la que describe  $\vec{\mathcal{E}}$  (Fig. 3.15), ya que  $\vec{\mathcal{E}}$  y  $\vec{\mathcal{H}}$  son en todo momento perpendiculares y, además, la relación entre sus módulos es constante (expresión (3.60)).

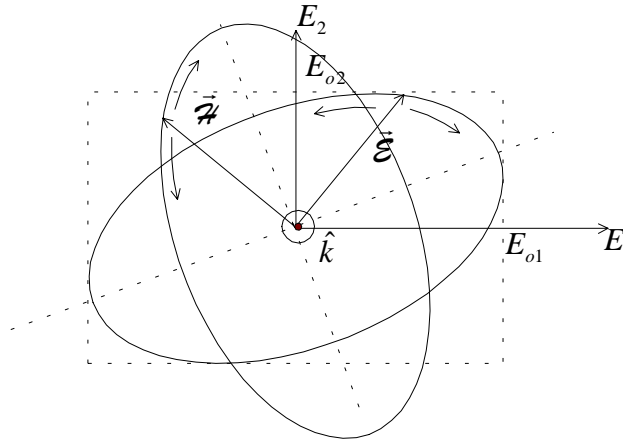


Fig. 3.15 Elipses de polarización del campo eléctrico y del campo magnético

\* *Relación axial*: es la relación entre el eje mayor y el eje menor de la elipse. De nuevo, mediante consideraciones geométricas, se deduce que la relación axial  $R$  puede expresarse como

$$R = \frac{|\vec{\mathcal{E}}|_{\text{máx}}}{|\vec{\mathcal{E}}|_{\text{mín}}} = \frac{|\vec{\mathcal{H}}|_{\text{máx}}}{|\vec{\mathcal{H}}|_{\text{mín}}} = \left[ \frac{1 + \sqrt{1 - 4 \left( \frac{\sin \Delta \varphi}{1/p + p} \right)^2}}{1 - \sqrt{1 - 4 \left( \frac{\sin \Delta \varphi}{1/p + p} \right)^2}} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.80)$$

donde  $p$  y  $\Delta \varphi$  han sido definidos en las expresiones (3.74).

Es práctica común expresar la relación axial en dB como

$$R_{dB} = 20 \log R \quad (3.81)$$



\* *Sentido de giro*: es fácil determinar el sentido de giro del campo cuando describe la elipse de polarización estudiando el signo de la derivada temporal del ángulo  $\delta$  que forma el campo respecto de una dirección de referencia (Fig. 3.16). En efecto, tal como se ha definido el sentido positivo de  $\delta$  en la figura 3.16, si  $\frac{d\delta}{dt} > 0$  el sentido de giro de  $\vec{\mathcal{E}}$  será contrario al de las agujas del reloj, y en el sentido de éstas si  $\frac{d\delta}{dt} < 0$ . Ahora bien, en vez de estudiar directamente el signo de la derivada temporal de  $\delta$ , resulta más sencillo determinar el de su tangente; refiriéndonos a la expresión (3.72) y a la figura 3.13,  $\text{tg } \delta$  se expresa fácilmente como

$$\text{tg } \delta = \frac{E_{o2} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_2)}{E_{o1} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_1)}$$

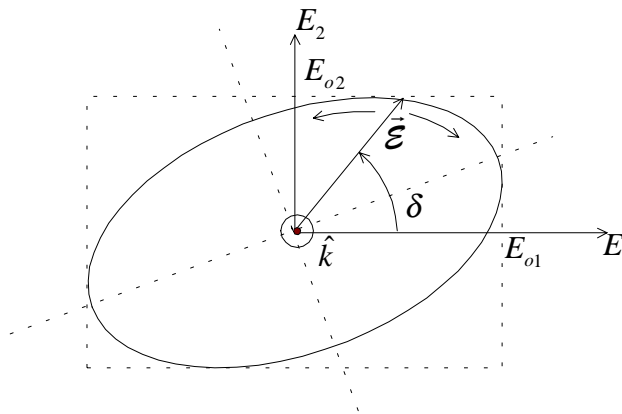
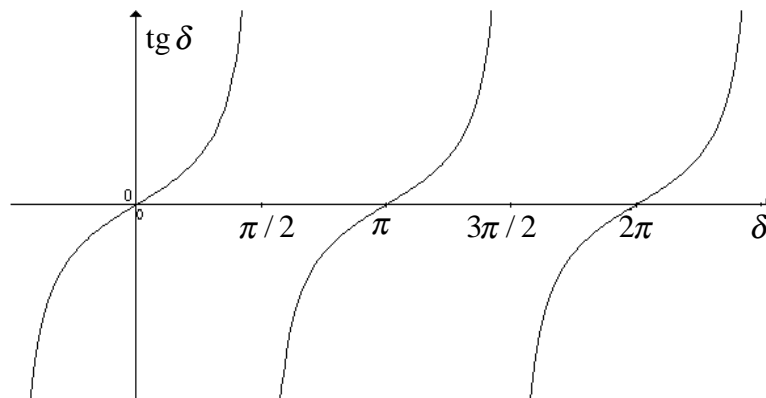


Fig. 3.16 *Angulo instantáneo que forma el campo con una dirección de referencia*

Además, como

$$\frac{d \text{tg } \delta}{dt} = \frac{1}{\cos^2 \delta} \frac{d\delta}{dt}$$

y  $\frac{1}{\cos^2 \delta}$  es positivo, el signo de  $\frac{d \text{tg } \delta}{dt}$  es el mismo que el de  $\frac{d\delta}{dt}$ . Esto puede verse también a partir de la representación gráfica de  $\text{tg } \delta$  (Fig. 3.17). En efecto, si recorremos el gráfico en el sentido de  $\delta$  creciente ( $\frac{d\delta}{dt} > 0$ ),  $\text{tg } \delta$  es también siempre creciente

Fig. 3.17 Representación gráfica de  $\text{tg } \delta$ 

( $\frac{d \text{tg } \delta}{dt} > 0$ ), mientras que si lo hacemos en el sentido de  $\delta$  decreciente,  $\text{tg } \delta$  será siempre decreciente.

Así, derivando la expresión de  $\text{tg } \delta$  y utilizando a continuación las definiciones (3.74) se tiene

$$\frac{d \text{tg } \delta}{dt} = -\frac{E_{o2}}{E_{o1}} \omega \frac{\text{sen}(\varphi_2 - \varphi_1)}{E_{o1} \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_1)} = -p\omega \frac{\text{sen } \Delta\varphi}{E_{o1} \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_1)}$$

Como  $p$ ,  $\omega$  y  $\cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_1)$  son magnitudes positivas, el signo de  $\frac{d \text{tg } \delta}{dt}$  – y, por lo tanto, el de  $\frac{d\delta}{dt}$  – depende únicamente del de  $\text{sen } \Delta\varphi$ , es decir, del valor de  $\Delta\varphi$ . Así, se tendrán las situaciones siguientes:

–  $-\pi < \Delta\varphi < 0$ . En este caso  $\frac{d}{dt} \text{tg } \delta > 0$ , luego  $\frac{d}{dt} \delta > 0$ ; así, refiriéndonos a

cualquiera de las figuras entre la figura 3.13 y la figura 3.16, el sentido de giro del afijo del campo alrededor de la elipse de polarización quedará fijado en sentido antihorario (Fig. 3.18). Es de notar que en esas figuras el vector  $\hat{k}$  viene hacia el lector, es decir, se está representando el campo desde la perspectiva de un observador que “ve” venir la onda. Obviamente, si la perspectiva del observador fuese la de “ver” alejarse la onda, el sentido de rotación del campo sería el opuesto: horario o a derechas (para hacerse una idea, basta mirar la figura 3.18 al trasluz desde el otro lado del papel). En ingeniería, es costumbre, al describir el sentido de giro del campo, hacerlo

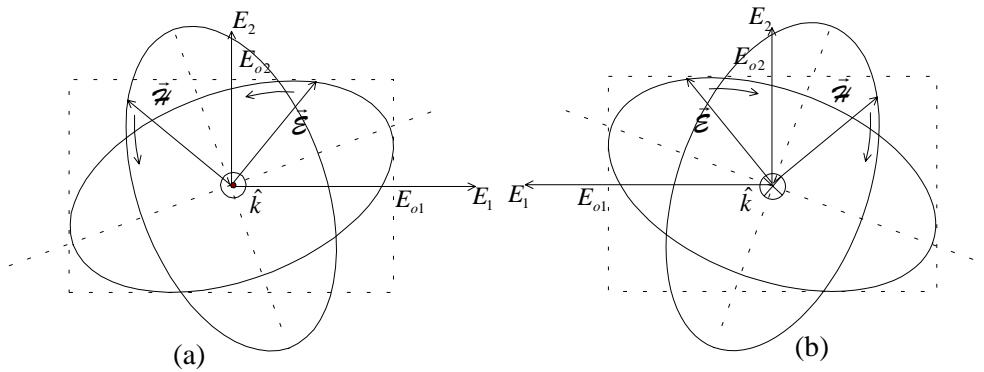


Fig. 3.18 Sentido de giro de los campos alrededor de la elipse de polarización cuando  $-\pi < \Delta\varphi < 0$ : (a) viendo venir la onda; (b) viendo alejarse la onda (polarización “a derechas”)

desde la perspectiva del observador que “ve” alejarse la onda<sup>1</sup>. Así, en este caso, diremos que la polarización es “a derechas”.

$0 < \Delta\varphi < \pi$ . Ahora  $\frac{d}{dt} \tan \delta < 0$  y, por lo tanto,  $\frac{d}{dt} \delta < 0$ ; luego en cualquiera de las figuras entre la figura 3.13 y la figura 3.16 el sentido de giro del afijo del vector campo será horario. De nuevo, utilizando el convenio aceptado en ingeniería, diremos no obstante que el sentido de giro es *antihorario* o *a izquierdas*, pues así se apreciaría desde la perspectiva de “ver” alejarse la onda (Fig. 3.19).

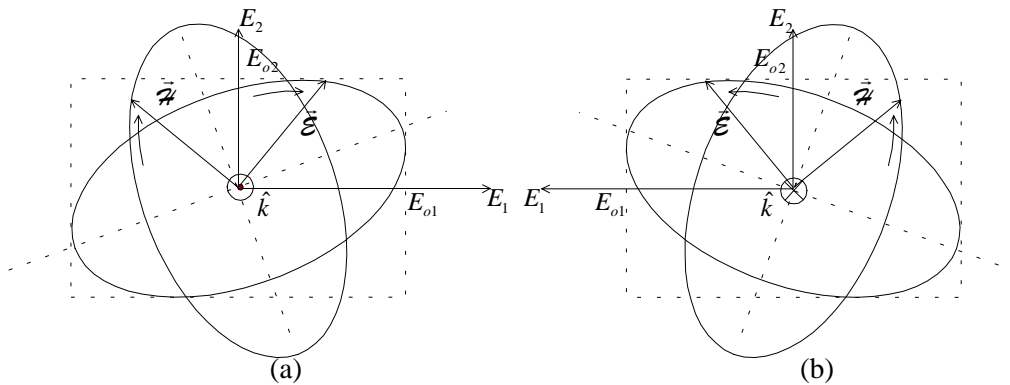


Fig. 3.19 Sentido de giro de los campos alrededor de la elipse de polarización cuando  $0 < \Delta\varphi < \pi$ : (a) viendo venir la onda; (b) viendo alejarse la onda (polarización “a izquierdas”)

<sup>1</sup> En los textos de física, el convenio suele ser el contrario.

Para recordar cómo hay que definir el sentido de giro de acuerdo con el convenio de la ingeniería puede emplearse la siguiente regla mnemotécnica: si se coloca el dedo pulgar de una mano apuntando en el sentido de propagación de la onda y se desea que los extremos de los otros cuatro dedos indiquen el sentido de giro del campo, cuando la polarización sea a derechas la mano que habrá que usar será la derecha, mientras que habrá que emplear la mano izquierda para una polarización con giro a izquierdas.

Como ya se hizo notar en su momento, en el caso que estamos estudiando de ondas planas uniformes en régimen senoidal permanente, las características de la elipse de polarización son las mismas en cualquier punto del espacio (aunque los campos instantáneos diferirán en general de un punto a otro, excepto sobre los frentes de onda y en frentes de onda que disten  $\lambda$ ).

**Ejemplo 3.9** *Determinar las características de polarización de una onda plana uniforme cuyo campo eléctrico viene dado por  $\vec{E} = E_o (\hat{x} + j\hat{y} - j\hat{z})e^{-j\sqrt{2}\pi(y+z)}$ .*

Se trata del campo eléctrico ya introducido en el ejemplo 3.3, para el que ya se comprobó que corresponde efectivamente a una onda plana uniforme y se determinó en el ejemplo 3.4 que  $\hat{k} = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{z}$ . Para expresar el campo en una base en la que sólo tenga dos componentes, como la de las expresiones (3.71), podemos identificar arbitrariamente  $\hat{e}_1 = \hat{x}$ . Efectivamente, aunque aún no conociésemos  $\hat{k}$  explícitamente, como debe cumplirse  $\vec{E}_c \cdot \hat{k} = 0$  y  $\vec{E}_c = E_o(\hat{x} + j\hat{y} - j\hat{z})$  (ver ejemplo 3.3), se sigue que  $\hat{x} \cdot \hat{k} = 0$ . Utilizando la primera de las relaciones (3.71) se encuentra inmediatamente

$$\hat{e}_2 = \hat{k} \times \hat{e}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{z}$$

Así  $\vec{E}_c$  puede escribirse

$$\vec{E}_c = E_o(\hat{e}_1 + j\sqrt{2}\hat{e}_2) = E_o(\hat{e}_1 + \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{2}}\hat{e}_2)$$

Comparando esta expresión con (3.77), se identifica  $p = \sqrt{2}$ ,  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ , de donde se deduce que:

\* El ángulo de orientación, respecto de la dirección definida por  $\hat{e}_1 = \hat{x}$ , de la elipse que describe el campo eléctrico es  $\beta = \frac{\pi}{2}$ . En este caso, al utilizar la expresión

(3.79) aparecen en principio dos posibles valores para  $\beta$ , a saber, 0 y  $\frac{\pi}{2}$ , ya que  $\cos \Delta\varphi = 0$  y el arcotangente puede valer 0 o  $\pi$ . Para decidir entre ellos basta con interpretar el numerador del argumento del arcotangente como una ordenada y el denominador como una abscisa. Como el denominador es en este caso negativo, ello indica que el ángulo que hay que tomar es  $\pi$ .

\* La relación axial de la elipse de polarización es (expresiones (3.80) y (3.81))  $R = \sqrt{2}$  o  $R_{dB} = 3 \text{ dB}$ .

\* El sentido de giro del campo alrededor de la elipse de polarización es *a izquierdas* ( $0 < \Delta\varphi = \frac{\pi}{2} < \pi$ ).

### 3.3.3 Casos especiales: polarización lineal y polarización circular

Los casos particulares de polarización que se estudian a continuación presentan un doble interés: por un lado, son polarizaciones muy utilizadas en sistemas de radiocomunicaciones en la práctica (por ejemplo, la polarización lineal se utiliza para la radiodifusión en onda media y para la difusión de televisión en UHF; algunos sistemas de difusión de televisión por satélite utilizan polarización circular). Por otro lado, una onda con una polarización arbitraria puede ponerse siempre como superposición de dos ondas con polarizaciones ortogonales; las polarizaciones lineales vertical y horizontal, así como las polarizaciones circulares con sentidos de giro opuestos<sup>1</sup>, constituyen bases especialmente cómodas para expresar cualquier polarización arbitraria y calcular de manera sencilla fenómenos de reflexión y refracción (como se verá en el capítulo 4), de propagación en medios anisótropos y en medios no recíprocos, interferencias en sistemas de radiocomunicaciones, etc.

<sup>1</sup> El concepto de ortogonalidad puede generalizarse a vectores que puedan ser complejos. Dos vectores, en general complejos,  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son ortogonales si  $\vec{a} \cdot \vec{b}^* = 0$

### Polarización lineal

Una onda posee polarización lineal si en las expresiones (3.75) y (3.76) o (3.77) se da una de las siguientes condiciones:

$$p = 0 \text{ o } p = \infty$$

$$\text{o}$$

$$\Delta\varphi = 0 \text{ o } \Delta\varphi = \pm\pi$$

En cualquiera de esos casos, es fácilmente comprobable que la relación axial  $R$  dada por la expresión (3.80) se hace infinita, lo que significa que la elipse se reduce a un segmento.

Por ejemplo, si  $p = 0$ , entonces, según las expresiones (3.73) y (3.77 a),  $\vec{E}_c = E_{o1}e^{j\varphi_1}\hat{e}_1 = C\hat{e}_1$ , y la elipse de polarización se reduce a un segmento según la dirección de  $\hat{e}_1$  (Fig. 3.20 (a)). Si  $\hat{e}_1$  fuese paralelo a la tierra, se diría que la polarización es horizontal. Si  $p = \infty$ , entonces, de manera análoga  $\vec{E}_c = E_{o2}e^{j\varphi_2}\hat{e}_2 = C\hat{e}_2$ , y la elipse de polarización se convierte en un segmento en la dirección de  $\hat{e}_2$  (Fig. 3.20 (b)). Si  $\hat{e}_2$  fuese perpendicular a la tierra, se diría que la polarización es vertical.

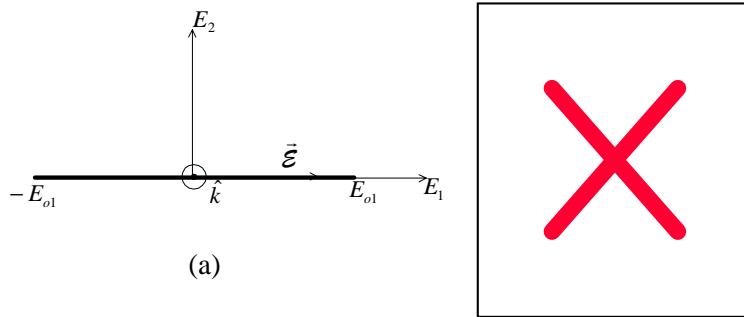


Fig. 3.20 Polarización lineal cuando  $p = 0$  (a);  $p = \infty$  (b)

Si  $\Delta\varphi = 0$  o  $\Delta\varphi = \pm\pi$ , según (3.77 a) se tendrá  $\vec{E}_c = C(\hat{e}_1 \pm p\hat{e}_2)$ , o bien, teniendo en cuenta que  $\hat{e}_1 \pm p\hat{e}_2$  es un vector real perpendicular a la dirección de propagación y llamando  $\hat{e}$  a un vector unitario en la dirección de  $\hat{e}_1 \pm p\hat{e}_2$ ,  $\vec{E}_c = C'\hat{e}$ , lo que indica que la elipse de polarización se reduce a un segmento en la dirección de  $\hat{e}$  (Fig. 3.21).

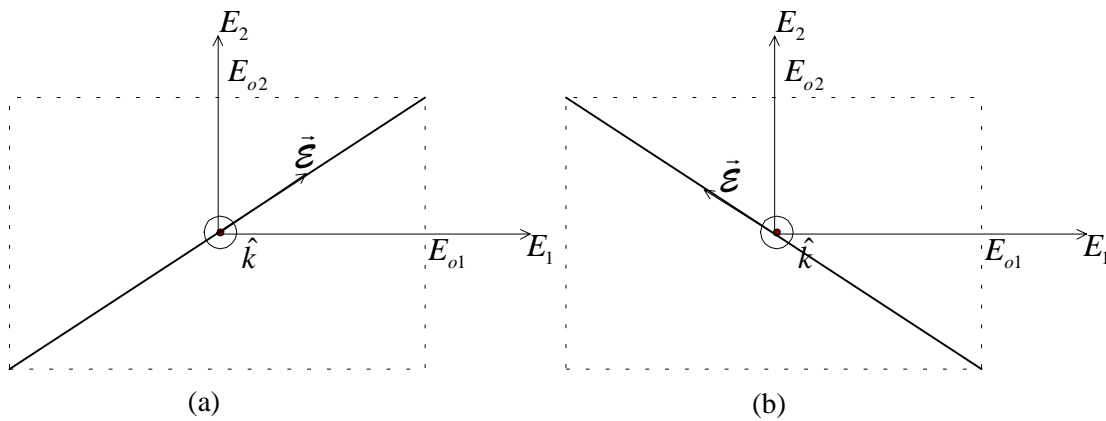


Fig. 3.21 Polarización lineal cuando  $\Delta\varphi = 0$  (a);  $\Delta\varphi = \pm\pi$  (b).

En cualquier caso, en una onda plana polarizada linealmente las componentes de las partes uniformes de los campos eléctrico y magnético,  $\vec{E}_c$  y  $\vec{H}_c$ , estarán en fase.

**Ejemplo 3.10** El campo magnético de una onda plana uniforme es  $\vec{H}(\vec{r}) = H_o(\hat{x} - \sqrt{2}\hat{y})e^{-j\pi(\sqrt{2}x+y+z)}$ . Determinar el tipo de polarización del campo.

Visto el argumento de la exponencial, el vector de onda es el mismo que se determinó en el ejemplo 3.5,  $\vec{k} = \sqrt{2}\pi\hat{x} + \pi\hat{y} + \pi\hat{z}$ ; se satisface, pues,  $\vec{k} \cdot \vec{H} = 0$ , por lo que el campo dado corresponde efectivamente al de una onda plana uniforme.

En este caso se tiene  $\vec{H}_c = H_o(\hat{x} - \sqrt{2}\hat{y})$ : todas las componentes de  $\vec{H}_c$  están en fase, por lo que la polarización es lineal. La dirección de la polarización de  $\vec{H}$  viene definida por el vector unitario

$$\hat{e}_h = \frac{\hat{x} - \sqrt{2}\hat{y}}{|\hat{x} - \sqrt{2}\hat{y}|} = \frac{\hat{x} - \sqrt{2}\hat{y}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\hat{x} - \frac{\sqrt{6}}{3}\hat{y}$$

El campo eléctrico estará a su vez polarizado en la dirección perpendicular dada por

$$\hat{e}_e = \hat{e}_h \times \hat{k} = \left( \frac{\sqrt{3}}{3}\hat{x} - \frac{\sqrt{6}}{3}\hat{y} \right) \times \left( \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y} + \frac{1}{2}\hat{z} \right) = -\frac{\sqrt{6}}{6}\hat{x} - \frac{\sqrt{3}}{6}\hat{y} + \frac{3\sqrt{3}}{6}\hat{z}$$

### Polarización circular

Una onda está polarizada circularmente si en las expresiones (3.75) y (3.76) o (3.77) de los fasores que la representan se encuentra

$$p = 1$$

y simultáneamente

$$\Delta\varphi = \pm\pi/2$$

En esas condiciones la relación axial de la elipse de polarización, dada por la expresión (3.80), se hace  $R = 1$ , lo que significa que, al ser sus dos ejes iguales, la elipse se ha reducido a una circunferencia. Cabe distinguir dos casos de polarización circular; en efecto, ateniéndonos a la discusión sobre el sentido de giro del campo alrededor de la elipse de polarización desarrollada en el apartado 3.3.2, resultará que, si  $\Delta\varphi = \pi/2$ , estamos en el caso de que  $0 < \Delta\varphi < \pi$ , y, por lo tanto, hablaremos de *polarización circular a izquierdas* (Fig. 3.22). La parte uniforme del fador campo eléctrico vendrá dado, particularizando la expresión (3.77 a), por

$$\vec{E}_c = C(\hat{e}_1 + j\hat{e}_2)$$

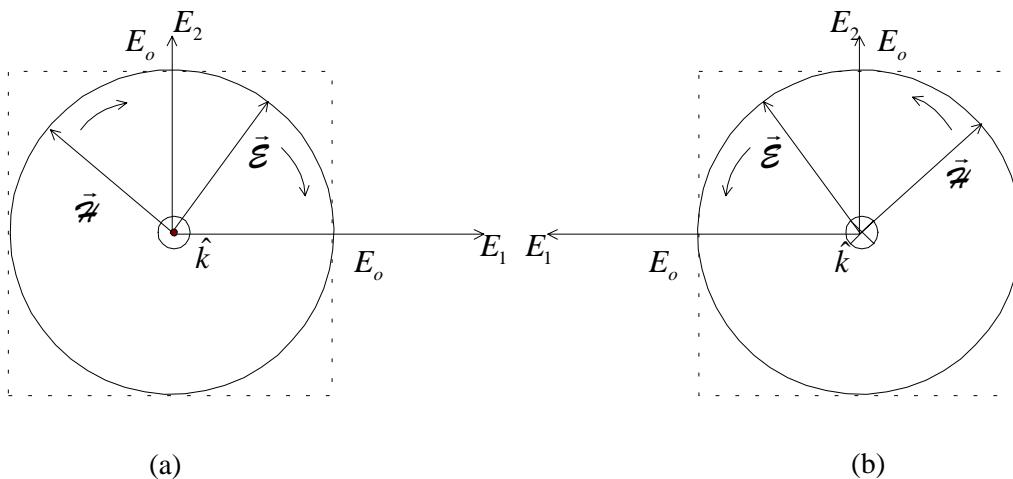


Fig. 3.22 Polarización circular a izquierdas: (a) viendo venir la onda; (b) viendo alejarse la onda

De manera completamente análoga, si  $\Delta\varphi = -\pi/2$ , la onda estará *polarizada circularmente a derechas* (Fig. 3.23) y la parte uniforme del fador campo eléctrico será

$$\vec{E}_c = C(\hat{e}_1 - j\hat{e}_2)$$



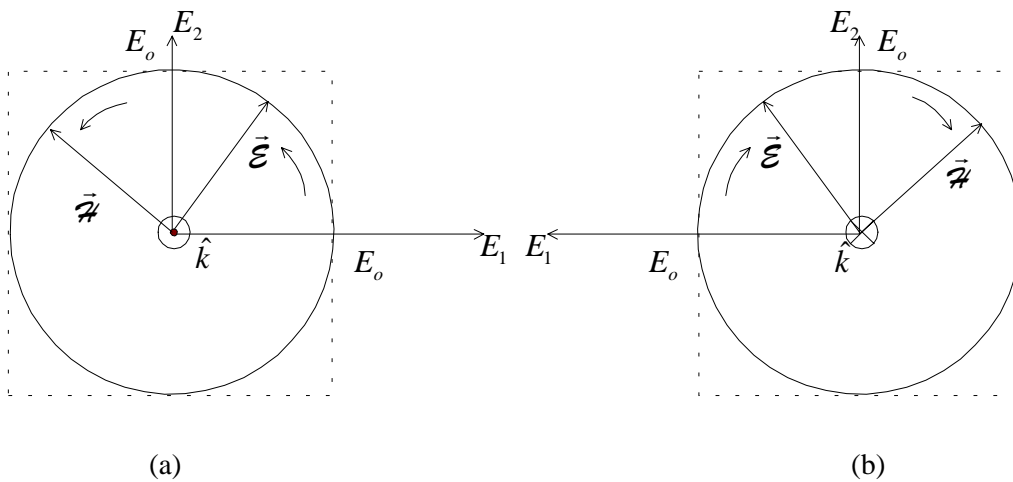


Fig. 3.23 Polarización circular a derechas: (a) viendo venir la onda; (b) viendo alejarse la onda

Ya se indicó anteriormente, al hablar de la polarización de las ondas planas uniformes en general, que toda la información sobre la polarización está contenida en  $\vec{E}_c$ ; así, lo que caracteriza una polarización circular es la posibilidad de escribir  $\vec{E}_c$  como un vector proporcional a  $\hat{e}_1 \pm j\hat{e}_2$ .

Según se discutió al principio de la sección, en el estudio de ciertas situaciones de interés práctico puede resultar conveniente expresar una onda plana uniforme con una polarización arbitraria como superposición de dos ondas con polarizaciones ortogonales<sup>1</sup>; por ejemplo, como superposición de dos ondas polarizadas linealmente según direcciones perpendiculares, o de dos ondas polarizadas circularmente con sentidos de giro del campo opuestos. La posibilidad de la descomposición en dos polarizaciones lineales ortogonales es obvia a partir de la expresión

$$\vec{E}(\vec{r}) = C(\hat{e}_1 + pe^{j\Delta\varphi}\hat{e}_2)e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

que no es más que la suma de una onda plana uniforme polarizada linealmente según  $\hat{e}_1$ :

$$\vec{E}_1(\vec{r}) = C\hat{e}_1 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

y de una onda plana uniforme polarizada según  $\hat{e}_2$ :

<sup>1</sup> Atendiendo a la definición de ortogonalidad de la nota al pie de la página 253, los vectores reales  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$  son ortogonales, y también lo son los vectores  $\hat{e}_1 + j\hat{e}_2$  y  $\hat{e}_1 - j\hat{e}_2$ .

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = C p e^{j\Delta\varphi} \hat{e}_2 e^{-j\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

Existen elementos que permiten seleccionar la componente de la onda en una dirección dada; tales elementos, cuyo principio de funcionamiento, que no será detallado aquí, puede variar según la frecuencia de utilización, se llaman polarizadores, y la función que realizan se ilustra en el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 3.11** *Un polarizador es un elemento utilizado para cancelar una de las dos componentes en que podemos descomponer los campos de una onda plana que lo atraviese, de manera que, a su salida, siempre se tendrá una polarización lineal. La única característica que debemos conocer del polarizador, a fin de averiguar cómo será la onda transmitida, es la orientación de su eje respecto a la dirección de polarización de la onda incidente.*

Considérese el esquema mostrado en la figura 3.24. La onda que llega al polarizador tiene una polarización arbitraria, de manera que, según los ejes elegidos, podremos expresar el campo eléctrico en la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0(\hat{x} + p e^{j\Delta\varphi} \hat{y}) e^{-jkz}$$

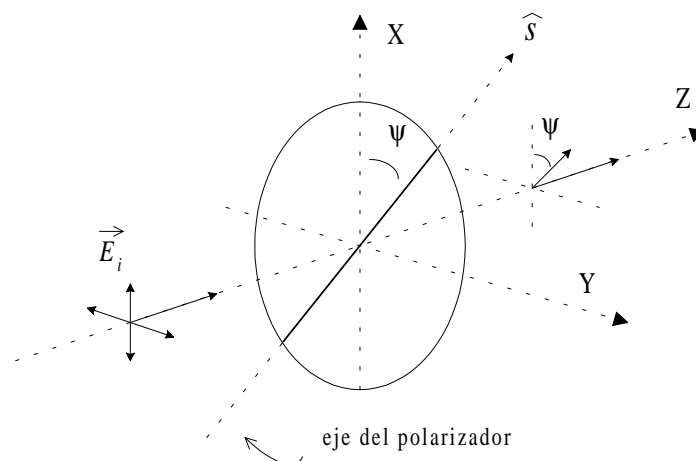


Fig. 3.24 Análisis del campo resultante tras atravesar un polarizador

El eje del polarizador representa la dirección permitida de paso, de forma que cualquier otra componente de campo será atenuada o reflejada. Según el esquema esa dirección es

$$\hat{s} = \hat{x}\cos\psi + \hat{y}\sin\psi$$

Y el campo eléctrico de la onda transmitida resulta:

$$\vec{E}(\vec{r}) = (\vec{E}(\vec{r}) \cdot \hat{s}) \hat{s} = E_0 (\cos\psi + pe^{j\Delta\varphi} \sin\psi) \hat{s} e^{-jkz}$$

Para comprobar que el campo también se puede poner como superposición de ondas polarizadas circularmente en sentidos opuestos, utilizaremos la observación anterior de que lo que caracteriza la expresión de una onda plana polarizada circularmente es su proporcionalidad a un vector complejo de la forma  $\hat{e}_1 \pm j\hat{e}_2$ , donde  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$  son vectores reales del mismo módulo y perpendiculares entre sí. Así, notaremos que el vector  $\hat{e}_1$  puede escribirse como

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{2}(\hat{e}_1 + j\hat{e}_2) + \frac{1}{2}(\hat{e}_1 - j\hat{e}_2)$$

y, análogamente

$$\hat{e}_2 = \frac{1}{2}j(\hat{e}_1 - j\hat{e}_2) - \frac{1}{2}j(\hat{e}_1 + j\hat{e}_2)$$

Sustituyendo estas expresiones en (3.75) se tiene

$$\vec{E}(\vec{r}) = C \left[ \frac{1}{2}(\hat{e}_1 + j\hat{e}_2) + \frac{1}{2}(\hat{e}_1 - j\hat{e}_2) - j\frac{1}{2}pe^{j\Delta\varphi}(\hat{e}_1 + j\hat{e}_2) + j\frac{1}{2}pe^{j\Delta\varphi}(\hat{e}_1 - j\hat{e}_2) \right] e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

de donde, agrupando términos, se llega a

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{C}{2}(1 - jpe^{j\Delta\varphi})(\hat{e}_1 + j\hat{e}_2)e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} + \frac{C}{2}(1 + jpe^{j\Delta\varphi})(\hat{e}_1 - j\hat{e}_2)e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

que no es más que la superposición de una onda polarizada circularmente a izquierdas:

$$\vec{E}_I(\vec{r}) = \frac{C}{2}(1 - jpe^{j\Delta\varphi})(\hat{e}_1 + j\hat{e}_2)e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

como lo indica el factor  $\hat{e}_1 + j\hat{e}_2$  y, como lo muestra el factor  $\hat{e}_1 - j\hat{e}_2$ , de una onda polarizada circularmente a derechas

$$\vec{E}_D(\vec{r}) = \frac{C}{2}(1 + jpe^{j\Delta\varphi})(\hat{e}_1 - j\hat{e}_2)e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

que es la posibilidad que se quería hacer patente.

**Ejemplo 3.12** Descomponer una onda plana uniforme cuyo campo eléctrico es  $\vec{E} = E_o(\hat{x} + j\hat{y} - j\hat{z})e^{-j\sqrt{2}\pi(y+z)}$  en dos ondas polarizadas circularmente en sentidos opuestos.

Este campo ya fue tratado en el ejemplo 3.9, donde se discutió que una posible elección de vectores unitarios perpendiculares a la dirección de propagación es  $\hat{e}_1 = \hat{x}$ ,  $\hat{e}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{z}$ . Asimismo se determinó que, con esta elección,

$p = \sqrt{2}$ ,  $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ . Así pues, la onda plana del enunciado puede ponerse como superposición de una onda plana polarizada circularmente a izquierdas cuyo campo eléctrico será

$$\vec{E}_I(\vec{r}) = \frac{E_o}{2}(1 + \sqrt{2})(\hat{x} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{z})e^{-j\sqrt{2}\pi(y+z)}$$

y de una onda plana polarizada circularmente a derechas, con campo eléctrico

$$\vec{E}_D(\vec{r}) = \frac{E_o}{2}(1 - \sqrt{2})(\hat{x} - j\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{y} + j\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{z})e^{-j\sqrt{2}\pi(y+z)}$$

### 3.4 Propagación de ondas planas uniformes en medios con pérdidas

En lo visto hasta ahora, figura la suposición implícita de que los medios en que se propagan las ondas electromagnéticas no presentan pérdidas: la amplitud de las ondas planas uniformes que se han analizado no sufría disminución alguna a medida que la onda se propagaba. Esto es una suposición excelente en el caso de propagación en el vacío, pero puede dejar de serlo en medios materiales. En lo que sigue discutiremos desde un punto de vista macroscópico el origen de las pérdidas en medios materiales y analizaremos el efecto de esas pérdidas en la propagación de ondas planas uniformes.

#### 3.4.1 Permitividad y permeabilidad complejas

Hasta ahora, al considerar la relación entre los campos instantáneos  $\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t)$  y  $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$  por una parte, y  $\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t)$  y  $\vec{\mathcal{B}}(\vec{r}, t)$  por otra, en un medio isótropo lineal, se ha supuesto una relación de proporcionalidad

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{D}} &= \epsilon \vec{\mathcal{E}} \\ \vec{\mathcal{B}} &= \mu \vec{\mathcal{H}}\end{aligned}\tag{3.4}$$

Sin embargo, ésa no es la relación lineal más general que se pueda suponer. En efecto, en la teoría de sistemas lineales, una relación lineal entre una magnitud “de entrada” y una magnitud “de salida” no se reduce a  $y(t) = k x(t)$ , sino que viene dada (Fig. 3.25) por

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) x(\tau) d\tau$$

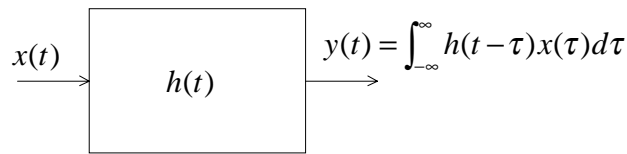


Fig. 3.25 Relación entre la salida y la entrada de un sistema lineal invariante con el tiempo de respuesta impulsional  $h(t)$

Así, la relación lineal más general entre  $\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t)$  y  $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$  es

$$\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} h_{\epsilon}(\vec{r}, t - \tau) \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, \tau) d\tau\tag{3.82}$$

donde  $h_{\epsilon}(\vec{r}, t)$  es la respuesta impulsional que relaciona en el tiempo la “respuesta”  $\vec{\mathcal{D}}$  a la entrada  $\vec{\mathcal{E}}$  en el punto  $\vec{r}$ . La respuesta impulsional pone de manifiesto que el medio, de cuya interacción con el campo  $\vec{\mathcal{E}}$  da una representación macroscópica, no responde, en general, instantáneamente a una excitación; si lo hiciera, la respuesta impulsional tomaría la forma particular  $h_{\epsilon}(\vec{r}, t) = \epsilon(\vec{r})\delta(t)$  y encontraríamos la relación manejada hasta ahora  $\vec{\mathcal{D}}(\vec{r}, t) = \epsilon \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t)$ .

Si suponemos ahora que estamos en régimen senoidal permanente, podemos denotar a los fasores correspondientes por  $\vec{D}(\vec{r}, \omega)$  y  $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$ , donde la frecuencia angular  $\omega$  se ha indicado explícitamente para facilitar la discusión. La relación (3.82) entre campos instantáneos implica que los fasores, que contienen la información de los campos variables con frecuencia  $\omega$ , se relacionan mediante

$$\vec{D}(\vec{r}, \omega) = \epsilon(\vec{r}, \omega) \vec{E}(\vec{r}, \omega)$$

donde  $\varepsilon(\vec{r}, \omega)$  es la transformada de Fourier de  $h_e(\vec{r}, t)$

$$\varepsilon(\vec{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h_e(\vec{r}, t) e^{-j\omega t} dt$$

y, por lo tanto, una magnitud en general compleja, aunque  $h_e(\vec{r}, t)$  es real.

El hecho de que  $\varepsilon(\vec{r}, \omega)$  sea complejo indica que existe un desfase entre  $\vec{D}(\vec{r}, \omega)$  y  $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$ , que es la manifestación, a nivel macroscópico, de un intercambio de energía entre el campo y la materia a nivel microscópico. En medios materiales en equilibrio térmico, o próximos a él la parte imaginaria de  $\varepsilon$  es negativa, por lo que, cuando interesa resaltar explícitamente el carácter complejo de la permitividad, suele escribirse

$$\varepsilon(\vec{r}, \omega) = \varepsilon'_i(\vec{r}, \omega) - j\varepsilon''_i(\vec{r}, \omega)$$

donde, tanto  $\varepsilon'_i$  como  $\varepsilon''_i$  son positivos. En ese caso, como se verá en el próximo apartado, la interacción del campo con el medio resulta en cesión de energía del campo a la materia, y se dice que el medio presenta pérdidas.

De manera similar podría razonarse que en la relación entre los fasores  $\vec{B}(\vec{r}, \omega)$  y  $\vec{H}(\vec{r}, \omega)$ ,  $\vec{B}(\vec{r}, \omega) = \mu(\vec{r}, \omega)\vec{H}(\vec{r}, \omega)$ ,  $\mu(\vec{r}, \omega)$  puede ser, en general, complejo. Habitualmente, su parte imaginaria será también negativa, por lo que suele escribirse

$$\mu(\vec{r}, \omega) = \mu'_i(\vec{r}, \omega) - j\mu''_i(\vec{r}, \omega)$$

con  $\mu'_i$  y  $\mu''_i$  positivos; de nuevo, esta situación da lugar a pérdidas de energía del campo electromagnético<sup>1</sup>.

Otra causa de pérdidas, que puede tratarse como una contribución a la parte imaginaria negativa de la permitividad eléctrica, es la conductividad del medio con el que interactúe el campo. En efecto, consideremos de nuevo la ley de Ampère-Maxwell en régimen senoidal permanente en un medio lineal:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega\varepsilon \vec{E}$$

<sup>1</sup> Suministrando energía a ciertos materiales, puede conseguirse que  $\varepsilon''_i$  o  $\mu''_i$  se hagan negativos; en esas condiciones puede llegarse a situaciones en que sea el medio el que ceda energía al campo. Se habla entonces de un *medio activo*. Ese es el fundamento de los dispositivos láser.

Si en el medio no hay fuentes independientes, pero presenta una conductividad  $\sigma$  finita, la densidad de corriente y el campo eléctrico estarán relacionados por la ley de Ohm

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Sustituyendo esta última expresión de la densidad de corriente en la ley de Ampère-Maxwell, tendremos

$$\nabla \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + j\omega\epsilon \vec{E}$$

Sacando factor común  $j\omega$  en el término de la derecha, la expresión anterior se escribe

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \left( \epsilon - j \frac{\sigma}{\omega} \right) \vec{E}$$

Comparando esta última expresión con la de la ley de Ampère-Maxwell en un medio lineal de conductividad nula:

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon \vec{E}$$

es obvio que el efecto de la conductividad es funcionalmente el mismo que el de dar lugar a una parte imaginaria de valor  $-\frac{\sigma}{\omega}$ . Si además consideramos explícitamente que  $\epsilon$  pueda tener una parte imaginaria debida al tiempo de respuesta finito de la polarización, la ley de Ampère-Maxwell se escribirá

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega \left( \epsilon'_i - j \frac{\sigma + \omega\epsilon''_i}{\omega} \right) \vec{E}$$

O bien, definiendo

$$\epsilon' = \epsilon'_i \quad (3.83 \text{ a})$$

$$\epsilon'' = \frac{\sigma}{\omega} + \epsilon''_i \quad (3.83 \text{ b})$$

la ley de Ampère-Maxwell termina escribiéndose

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega(\epsilon' - j\epsilon'')\vec{E} \quad (3.84)$$

donde es obvia la contribución de la conductividad  $\sigma$  a una parte imaginaria negativa de  $\epsilon$  efectiva.

### 3.4.2 Ondas planas uniformes en un medio con pérdidas

En el apartado anterior se razonó que los parámetros constitutivos – permitividad eléctrica y permeabilidad magnética – de un medio lineal que aparecen en las ecuaciones de Maxwell en régimen senoidal permanente pueden ser complejos. Se adelantó además que, cuando la parte imaginaria de esos parámetros es negativa, eso traduce desde un punto de vista macroscópico mecanismos de pérdidas del medio por los cuales el campo electromagnético cede energía a la materia. En lo que sigue vamos a ilustrar los efectos de estas pérdidas a partir del análisis del caso particular, pero suficientemente importante por sí mismo, de la propagación de ondas planas en un medio lineal y homogéneo que las presente.

Desde el punto de vista matemático el estudio se hace muy sencillo si notamos que, al escribir las ecuaciones de Maxwell en régimen senoidal permanente en una región desprovista de fuentes independientes:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\mu \vec{H}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \vec{H} = 0$$

$$\nabla \times \vec{H} = j\omega\epsilon \vec{E}$$

la forma matemática es la misma tanto si  $\epsilon$  y  $\mu$  son reales como complejos. Por lo tanto, campos de la forma de los que corresponden a ondas planas uniformes como las estudiadas en el apartado 3.2:

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} \\ \vec{H}(\vec{r}) &= \frac{\hat{k}}{\eta} \times \vec{E}_c e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}\end{aligned}$$

siguen siendo solución de las ecuaciones de Maxwell, sin más que tener en cuenta que las constantes  $\epsilon$  y  $\mu$  que aparecen en la definición del número de onda:

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$$

y en la de la impedancia intrínseca del medio:

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

son , en general complejas.



Aunque la solución sea formalmente idéntica a la considerada hasta ahora para la onda plana uniforme, en que  $\epsilon$  y  $\mu$  habían sido tomados como reales, el hecho de que estos parámetros tomen valores complejos tiene consecuencias físicas que se discuten a continuación. Para simplificar matemáticamente la discusión, pero sin que ello suponga pérdida alguna de generalidad, supondremos propagación en el sentido de  $\hat{z}$  – con lo que  $\vec{k} = k \hat{z}$  – y que las pérdidas del medio sólo se manifiestan en una permitividad eléctrica compleja  $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$  con  $\epsilon'$  y  $\epsilon''$  positivos. Así, tendremos

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \vec{E}_c e^{-jkz} \\ \vec{H}(\vec{r}) &= \frac{\hat{z}}{\eta} \times \vec{E}_c e^{-jkz}\end{aligned}$$

donde ahora  $k$  es complejo por serlo  $\epsilon$ . En efecto, en la figura 3.26 se ilustra de manera cualitativa la relación entre una permitividad eléctrica compleja de parte imaginaria negativa

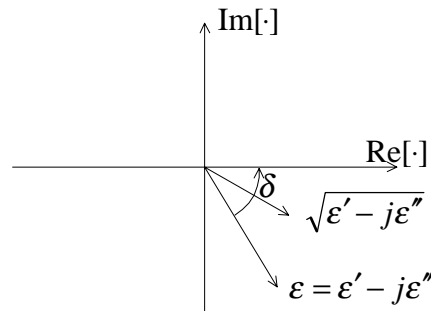


Fig. 3.26 Relación entre un valor complejo de permitividad, de parte imaginaria negativa, y su raíz cuadrada

y su raíz cuadrada: el resultado que hay que tener en cuenta es que la raíz cuadrada también tiene parte imaginaria negativa, por lo que se podrá poner

$$k = \omega\sqrt{\mu\epsilon} = \omega\sqrt{\mu(\epsilon' - j\epsilon'')} = \beta - j\alpha \quad (3.85)$$

donde  $\beta$ <sup>1</sup> y  $\alpha$  son constantes positivas en el caso común de que  $\epsilon''$  sea positivo. De manera cuantitativa, teniendo en cuenta que

<sup>1</sup> A pesar de utilizar el mismo símbolo, esta constante  $\beta$  no debe confundirse con el ángulo de orientación de la elipse de polarización definido en el apartado 3.3.2.

$$k^2 = \omega^2 \mu (\epsilon' - j\epsilon'') = (\beta - j\alpha)^2$$

se llega, igualando partes reales e imaginarias, al par de ecuaciones

$$\begin{aligned}\omega^2 \mu \epsilon' &= \beta^2 - \alpha^2 \\ \omega^2 \mu \epsilon'' &= 2\beta\alpha\end{aligned}$$

de las cuales se despeja

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon'} \left\{ \frac{[1 + \operatorname{tg}^2 \delta]^{1/2} + 1}{2} \right\}^{1/2} \quad (3.86 \text{ a})$$

$$\alpha = \omega \sqrt{\mu \epsilon'} \left\{ \frac{[1 + \operatorname{tg}^2 \delta]^{1/2} - 1}{2} \right\}^{1/2} \times \operatorname{signo}(\epsilon'') \quad (3.86 \text{ b})$$

donde se ha utilizado la llamada *tangente de pérdidas*, que se define como

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\epsilon''}{\epsilon'}$$

Nótese que  $-\delta$  es la fase de la permitividad compleja  $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$  (Fig. 3.26).

Así, los fasores campo eléctrico y campo magnético podrán escribirse

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_c e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad (3.87 \text{ a})$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \vec{H}_c e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \quad (3.87 \text{ b})$$

con  $\vec{H}_c = \frac{\hat{z}}{\eta} \times \vec{E}_c$  y  $\vec{E}_c$  un vector uniforme.

El factor  $e^{-j\beta z}$  en la expresión de los campos indica que la onda se propaga en el sentido de  $\hat{z}$  con una velocidad de fase (ver los razonamientos efectuados al final del apartado 3.2.3)

$$v_p = \frac{\omega}{\beta}$$

Por esta razón  $\beta$  se suele llamar *constante de propagación*. Sus unidades son las mismas que las del número de onda  $k$ , o sea,  $m^{-1}$ , aunque para distinguir que es la parte real del

número de onda complejo y que, por lo tanto, pone de manifiesto el desfase propio de la propagación, a menudo se le asignan unidades de  $rad\ m^{-1}$ , donde hay que recordar que el radián ( $rad$ ) es una unidad adimensional.

Asimismo, el factor  $e^{-\alpha z}$  expresa la atenuación que la onda experimenta a medida que progresa según  $\hat{z}$ , razón por la cual  $\alpha$  recibe el nombre de *constante de atenuación*; sus unidades son también de  $m^{-1}$ , aunque a menudo, para distinguirla de la constante de propagación, se le asignan unidades de  $neper\ m^{-1}$ , donde el neper es, como el radián, una unidad adimensional.

De nuevo, aunque toda la información sobre los campos en régimen senoidal permanente está contenida en los fasores, puede resultar instructivo efectuar una representación gráfica de una componente arbitraria de un campo instantáneo para asimilar mejor la situación física. La expresión de dicha componente será

$$\mathcal{E}_i = E_{oi} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi_i)$$

donde todas las magnitudes que aparecen son reales y  $E_{oi}$ ,  $\alpha$  y  $\beta$  son positivos. La representación gráfica aparece en la figura 3.27, donde se observa que, a medida que un frente de onda (un punto de la forma de onda, correspondiente a una fase determinada, en la representación bidimensional de la figura) progresa, la amplitud del campo disminuye; la

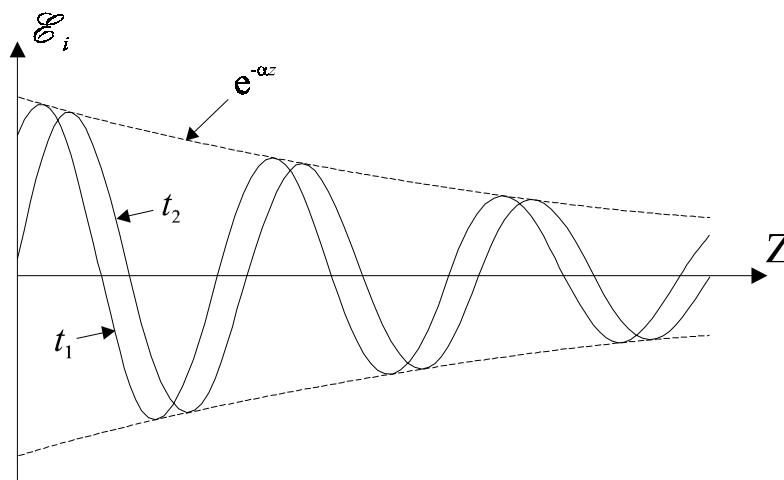


Fig. 3.27 Representación gráfica, en dos instantes sucesivos, de una componente del campo eléctrico instantáneo de una onda plana uniforme que se propaga en un medio con pérdidas

distancia entre puntos sucesivos a lo largo de la dirección de propagación con la misma fase será

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

mientras que la amplitud de la onda disminuye como  $e^{-\alpha z}$ .

Es evidente, a partir de las expresiones (3.87), que

$$|\vec{E}(z + \Delta z)|^2 = |\vec{E}(z)|^2 e^{-2\alpha \Delta z} < |\vec{E}(z)|^2$$

y que  $|\vec{H}|^2$  obedece a una relación idéntica. Por lo tanto, si calculamos el vector de Poynting  $\vec{P}$ , que es proporcional a  $|\vec{E}|^2$  y a  $|\vec{H}|^2$  en un plano arbitrario correspondiente a una  $z$  dada, y en un plano  $\Delta z$  más allá en la dirección de las  $z$  crecientes (Fig. 3.28), su módulo será menor en el plano  $z + \Delta z$ :

$$P(z + \Delta z) < P(z)$$

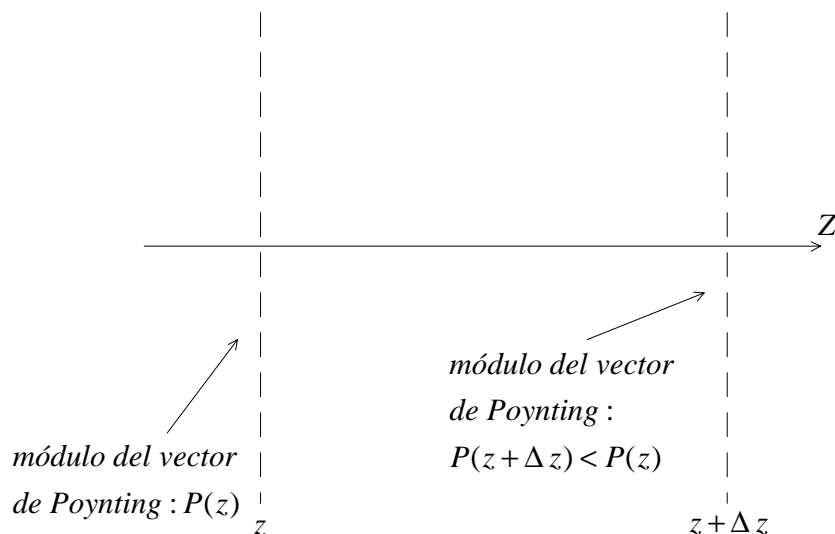


Fig. 3.28 Disipación de potencia en una onda electromagnética que se propaga en un medio con pérdidas: el módulo del vector de Poynting disminuye a medida que la onda se propaga

El principio de conservación de la energía indica, pues, que ha pasado energía de la onda al medio. Se dice que el medio presenta pérdidas y que disipa potencia (del campo electromagnético). La onda va perdiendo la potencia que transporta a medida que se propaga.

### 3.4.3 Casos límite: *buen dieléctrico y buen conductor*

En el apartado anterior se consideró el caso de una onda plana que se propagaba en un medio genérico con pérdidas, y se encontraron las expresiones generales – con la limitación de que las pérdidas se manifiesten a través de una permitividad compleja – para la constante de propagación  $\beta$  y la constante de atenuación  $\alpha$ . La constante de propagación define la longitud de onda y la de atenuación el decrecimiento de la amplitud de las componentes de los campos a medida que la onda se propaga.

Resulta interesante encontrar expresiones aproximadas para la longitud de onda y la constante de atenuación para dos casos límite que se encuentran a menudo en situaciones de interés práctico.

La expresión (3.86 b) indica que, cuanto menor sea la tangente de pérdidas de un medio, menor será la atenuación que experimente una onda que se propague por él y, por lo tanto, menor la pérdida de la potencia que la onda transporta. Así pues, cuando se estén diseñando sistemas en los que una onda deba propagarse por un medio material, será conveniente que éste presente una pequeña tangente de pérdidas. Se dice que un medio es un *buen dieléctrico* cuando se da la condición

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{\varepsilon''}{\varepsilon'} \ll 1 \quad (3.88)$$

Un valor típico de la tangente de pérdidas de un dieléctrico utilizado en la práctica, por ejemplo, en la construcción de circuitos de microondas, puede ser  $\operatorname{tg} \delta \approx 10^{-4}$ . Si se cumple la condición (3.88), las expresiones (3.86) admiten las siguientes aproximaciones mediante un desarrollo en serie de Taylor limitado al orden más bajo distinto de 0 y no nulo:

$$\beta \approx k' \left[ 1 + \frac{1}{8} \operatorname{tg}^2 \delta \right] \quad (3.89 \text{ a})$$

$$\alpha \approx \frac{1}{2} k' \operatorname{tg} \delta \quad (3.89 \text{ b})$$

donde se ha definido  $k' = \omega \sqrt{\mu \varepsilon'}$ . Asimismo, la impedancia intrínseca del medio podrá aproximarse por

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \approx \eta' \left\{ \left[ 1 + \frac{3}{8} \operatorname{tg}^2 \delta \right] + j \frac{1}{2} \operatorname{tg} \delta \right\}$$

donde  $\eta' = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon'}}$ . En la práctica se toma el valor dado por la expresión (3.89 b) para calcular la atenuación, mientras que la constante de propagación y la impedancia intrínseca se aproximan por

$$\beta \approx k' \quad (3.90)$$

y

$$\eta \approx \eta'$$

Es de notar que en el buen dieléctrico, según las expresiones (3.89 b) y (3.90),  $\alpha \ll \beta$ , lo que desde el punto de vista práctico significa que la onda debe propagarse a lo largo de muchas longitudes de onda para que la atenuación sea apreciable (Fig. 3.29).

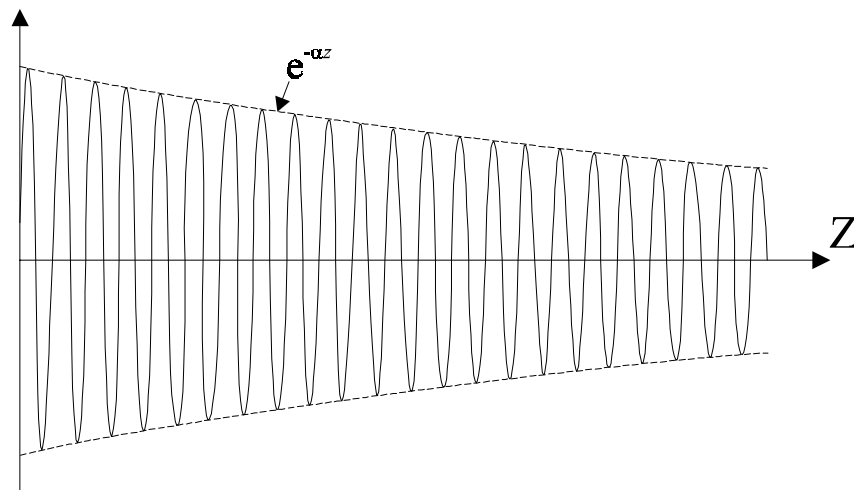


Fig. 3.29 Propagación de una onda plana uniforme en un buen dieléctrico: la atenuación es pequeña en el espacio de una longitud de onda

En la práctica a menudo las ondas interactúan con buenos conductores (por ejemplo, en guías de onda, como se verá en el capítulo 5, o en una antena). Atendiendo a las expresiones (3.83), se definirá un *buen conductor* como un medio en el que el efecto de la conductividad es predominante frente a la constante dieléctrica, o, lo que es lo mismo, en el que la corriente a que da lugar el campo eléctrico, según la ley de Ohm, es mucho mayor que la corriente de desplazamiento. Formalmente esto se traduce en que

$$|\sigma \vec{E}| \gg |\omega \epsilon \vec{E}|$$

o, simplemente,

$$\sigma \gg \omega \epsilon'_i, \omega \epsilon''_i \quad (3.91)$$

Nótese que el comportamiento de un medio como un buen conductor depende de la frecuencia de la trabajo. La expresión anterior supone que en la expresión de la ley de Ampère-Maxwell para un medio con pérdidas (3.84) la permitividad compleja  $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$  podrá aproximarse por

$$\epsilon \approx -j \frac{\sigma}{\omega}$$

Así, el número de onda complejo será

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \approx \omega \sqrt{\mu \left( -j \frac{\sigma}{\omega} \right)} = \frac{1-j}{\delta_p} \quad (3.92)$$

donde  $\delta_p$  es una constante con unidades de longitud que recibe el nombre de *profundidad de penetración*. Elaborando la expresión anterior se deduce fácilmente la de  $\delta_p$

$$\delta_p = \frac{1}{\sqrt{\pi \mu \sigma f}} \quad (3.93)$$

donde  $\mu$  es la permeabilidad magnética del medio,  $\sigma$  su conductividad y  $f$  la frecuencia. Identificando en el término de la derecha de (3.92)  $\alpha$  y  $\beta$ , según (3.85), se obtiene

$$\frac{1-j}{\delta_p} = \beta - j\alpha$$

de donde

$$\beta = \frac{1}{\delta_p}$$

$$\alpha = \frac{1}{\delta_p}$$

La expresión anterior de  $\alpha$  muestra que la profundidad de penetración  $\delta_p$  representa la distancia sobre la que la amplitud de los campos de una onda plana que se

propaga en un buen conductor se reduce en un factor  $e$ ; al mismo tiempo, la expresión de  $\beta$  indica que la longitud de onda es

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi\delta_p$$

Esta situación se muestra gráficamente en la figura 3.30, y las magnitudes típicas de la profundidad de penetración en un conductor real se ilustran mediante el ejemplo siguiente.

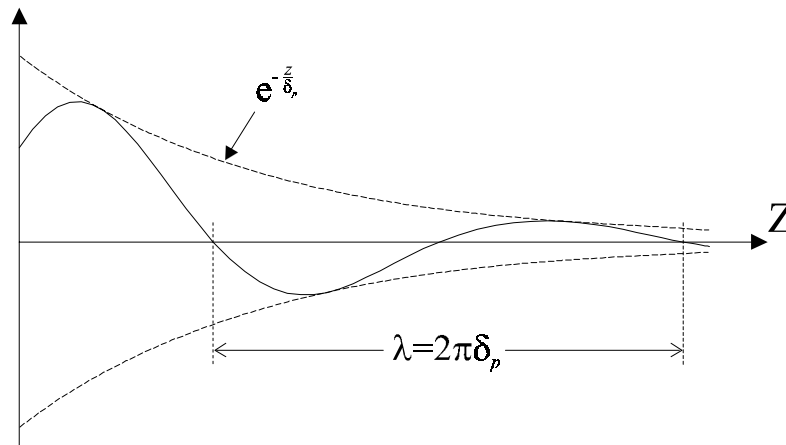


Fig. 3.30 Propagación de una onda plana uniforme en un buen conductor. Las constantes de propagación y de atenuación son iguales

### Ejemplo 3.13. Profundidad de penetración en el cobre.

El cobre presenta una conductividad de  $\sigma = 5.8 \times 10^7 \text{ S/m}$ , y es un material diamagnético, por lo que, con buena aproximación  $\mu \approx \mu_0$ . Sustituyendo los valores anteriores en la expresión (3.93), se obtiene para el cobre

$$\delta_p = \frac{66,1}{\sqrt{f}} \text{ mm}$$

donde la frecuencia debe expresarse en  $\text{Hz}$ . Así, para  $f = 50 \text{ Hz}$  se encuentra  $\delta_p = 9,35 \text{ mm}$ , mientras que para  $f = 500 \text{ MHz}$  la profundidad de penetración se ha reducido a  $\delta_p = 2,96 \mu\text{m}$ . Esta es la razón por la que, en muchas aplicaciones



de radiofrecuencia puede suponerse, por lo menos en primera aproximación, que los campos en el interior de un buen conductor son despreciables.

Resulta interesante también examinar a qué frecuencia dejaría de cumplirse en el cobre la condición (3.91). Para ello impondremos la igualdad  $\sigma = \omega \epsilon$  y supondremos que  $\epsilon \approx \epsilon_0$ . Despejando la frecuencia se encuentra que la igualdad anterior se daría para  $f \approx 10^{18} \text{ Hz}$  que es una frecuencia correspondiente a rayos X. Hay que tomar este cálculo con precaución, porque, conforme la frecuencia aumenta, aparecerán fenómenos que harán que los valores considerados para la conductividad y la permitividad se aparten de los que se han tomado para el cálculo. Sin embargo, el cálculo es ilustrativo de que puede esperarse que el cobre se comporte como un buen conductor hasta frecuencias muy altas.

También es interesante comparar la profundidad de penetración  $\delta_p$  y la longitud de onda en el conductor  $2\pi\delta_p$  con la longitud de onda a la misma frecuencia en el aire. Tomando la frecuencia de  $500 \text{ MHz}$ , encontramos que en el aire  $\lambda = 60 \text{ cm} \gg \delta_p$ . Tomando  $\lambda$  como medida representativa de las distancias sobre las que el campo varía de manera apreciable en el aire, resulta razonable pensar que, cuando una onda procedente del aire interactúe con la superficie de un buen conductor, éste podrá considerarse, si se da la condición  $\lambda \gg \delta_p$ , como localmente plano.

Si calculamos la impedancia intrínseca del buen conductor, encontramos que, puesto que  $\epsilon \approx -j \frac{\sigma}{\omega}$ ,

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \approx \sqrt{j \frac{\mu \omega}{\sigma}} = (1 + j) R_s \Omega$$

donde el parámetro  $R_s$ , con unidades de  $\Omega$ , se llama resistencia superficial, o resistencia de un cuadrado de superficie. De la expresión anterior, y atendiendo a la definición de la profundidad de penetración  $\delta_p$ , resulta que

$$R_s = \frac{1}{\sigma \delta_p}$$

o, teniendo en cuenta la expresión (3.93) de  $\delta_p$ ,

$$R_s = \sqrt{\frac{\pi \mu f}{\sigma}} \quad (3.94)$$

Así, la impedancia intrínseca en un buen conductor tiene una parte imaginaria igual a la parte real; ambas son menores cuando la conductividad es mayor y crecen con la frecuencia como  $\sqrt{f}$ .

El significado de la resistencia superficial puede ilustrarse considerando una onda plana uniforme que se propaga hacia el interior de un conductor, perpendicularmente a su superficie. El sistema de coordenadas se toma de manera que el origen de coordenadas esté en la superficie y el eje  $Z$  sea perpendicular a la misma (Fig. 3.31); la onda se supone polarizada linealmente, de manera que el campo eléctrico sea

$$\vec{E} = E_o e^{-\frac{z}{\delta_p}} e^{-j\frac{z}{\delta_p}} \hat{x}$$

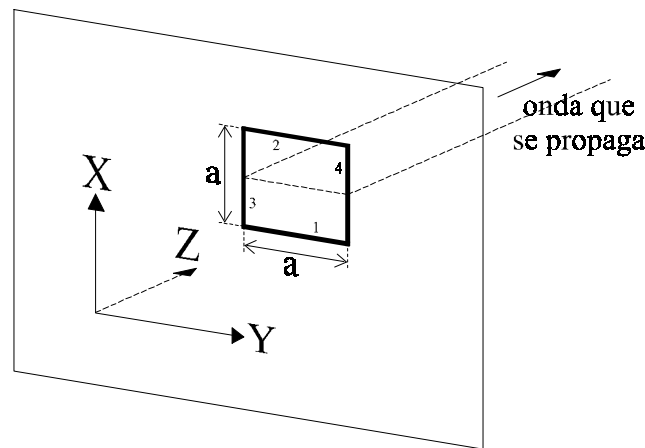


Fig. 3.31 Ilustración del significado de la impedancia superficial

La densidad de corriente será entonces

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \sigma E_o e^{-\frac{z}{\delta_p}} e^{-j\frac{z}{\delta_p}} \hat{x} \quad (3.95)$$

Consideremos un cuadrado de lado  $a$  sobre la superficie del conductor, como se representa en la figura 3.31, con dos de sus lados, los numerados en la figura como 1 y 2,

perpendiculares al eje  $X$ . Como el campo magnético es perpendicular a la dirección de propagación, según la ley de Faraday tendremos

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -j\omega\mu \int_S \vec{H} \cdot d\vec{s} = 0$$

siempre que  $C$  sea un contorno contenido en un plano perpendicular a la dirección de propagación; en efecto,  $S$  puede ser cualquier superficie limitada por ese contorno y si, en particular, elegimos la superficie contenida en el plano perpendicular a la dirección de propagación, vemos inmediatamente que el flujo de  $\vec{H}$  debe ser nulo. Pero que  $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ , es equivalente a que la circulación de  $\vec{E}$  entre dos puntos cualesquiera sea independiente del camino elegido, lo cual implica que es posible definir, en un plano perpendicular a la dirección de propagación, una “diferencia de potencial” de manera no ambigua. En particular, podemos calcular esa tensión entre los lados 1 y 2 de la figura 3.31 a partir de la expresión de  $\vec{E}$  para  $z = 0$ :

$$V_{12} = \int_1^2 \vec{E}(z=0) \cdot d\vec{l} = E_o a$$

Consideremos ahora la superficie constituida por una tira de anchura  $a$  y longitud infinita, que se extienda hacia el interior del conductor desde su superficie, perpendicularmente a ella y esté limitada en ésta por el lado 1 (Fig. 3.31). Si calculamos la corriente  $I$  que la atraviesa, tendremos

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_0^\infty \int_{y_o}^{y_o+a} \vec{J} \cdot dy dz \hat{x} = a \int_0^\infty \vec{J} \cdot \hat{x} dz$$

donde  $y_o$  es la coordenada  $y$  del extremo izquierdo del lado 1. Teniendo en cuenta la expresión (3.95) de la densidad de corriente, se encuentra que la expresión anterior da para la corriente

$$I = \frac{E_o a}{R_s (1+j)}$$

Esta corriente es la que atraviesa el lado 1 del cuadrado “por debajo” de la superficie, y, al no depender de  $x$ , es obviamente la misma que atraviesa por debajo el lado 2 o cualquier línea que una el lado 3 del cuadrado al lado 4. Podemos, pues, decir que ésta es la corriente que atraviesa el cuadrado por debajo de su superficie. Teniendo en cuenta, además, que hemos calculado que la tensión entre el lado 1 y el lado 2 del cuadrado es  $V_{12} = E_o a$ , la expresión anterior puede ponerse como

$$\frac{V_{12}}{I} = (1 + j)R_s$$

Interpretando que el cuadrado es un elemento “accesible” desde su superficie, y que  $I$  es la corriente que lo atraviesa en el sentido del lado 1 al lado 2 cuando se le aplica en su superficie una tensión entre esos lados  $V_{12}$ , puede llamarse impedancia del cuadrado de superficie (o impedancia superficial) a la magnitud

$$Z_s = \frac{V_{12}}{I} = (1 + j)R_s$$

que coincide con la impedancia intrínseca del medio. A la parte real de dicha impedancia se le llama, por razones obvias, resistencia del cuadrado de superficie o resistencia superficial.

De nuevo, la resistencia superficial no es una magnitud que posea un interés puramente teórico. Cuando se calcula la constante de atenuación debida a las pérdidas en los conductores en líneas de transmisión, o en guías de onda reales, se encuentran expresiones que dependen de la geometría de la sección recta de la línea de transmisión o guía, en las que la resistencia superficial es un parámetro que aparece como una constante de proporcionalidad. Cuanto “mejor” es un conductor (mayor su conductividad  $\sigma$ ), menor es su resistencia superficial, como lo indica la expresión (3.94). En el ejemplo siguiente se ilustra la evolución de la resistencia superficial del cobre en función de la frecuencia.

**Ejemplo 3.14.** *Cálculo de la resistencia superficial en el cobre.*

Tomando los datos para el cobre del ejemplo 3.13 y utilizando la expresión (3.94), se encuentra que a  $50\text{ Hz}$  la resistencia superficial es  $R_s = 1,8 \times 10^{-6} \Omega$ , mientras que a  $500\text{ MHz}$  es  $R_s = 5,82 \times 10^{-3} \Omega$ , ya que la resistencia superficial crece como  $\sqrt{f}$ .

## PROBLEMAS – CAPÍTULO 3

1. Una onda electromagnética plana uniforme se propaga en el vacío con un campo eléctrico dado por

$$\vec{E} = E_o (\hat{x} + j \hat{y}) e^{-j\sqrt{2}\pi z}.$$

- ¿En qué dirección y sentido se propaga la onda?
- ¿Cuál es su frecuencia?
- ¿Qué tipo de polarización tiene?
- Si  $E_o = 1 \mu V / m$ , calcular la potencia media que la onda transporta por unidad de superficie.

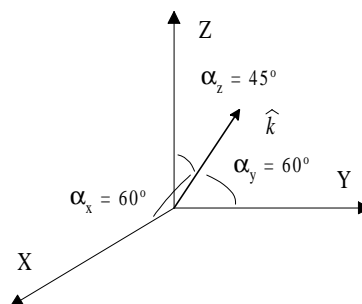
2. El campo eléctrico de una onda que se propaga en el vacío es

$$\vec{E} = \frac{E_o}{2} \left[ (\sqrt{2} + j)\hat{x} + (\sqrt{2} - j)\hat{y} + j\sqrt{2}\hat{z} \right] e^{-j\pi(x+y+\sqrt{2}z)}$$

con  $E_o$  real. Determinar:

- La frecuencia de la onda.
- La dirección de propagación.
- El tipo de polarización.
- Las expresiones de los campos eléctrico y magnético instantáneos.
- Si la onda transporta una densidad de flujo de potencia media de  $100 \mu W / m^2$ , ¿cuánto vale  $E_o$ ?

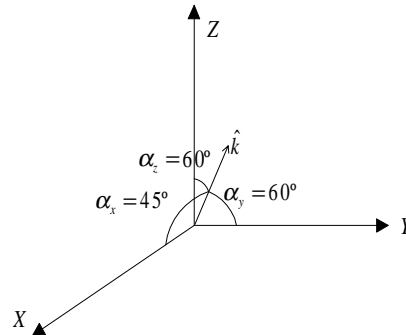
3. Una onda plana uniforme de frecuencia  $f = 3 GHz$ , polarizada linealmente, se propaga en el vacío en una dirección cuyos cosenos directores son  $l = \frac{1}{2}$ ,  $m = \frac{1}{2}$ ,  $n = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Determinar los campos eléctrico y magnético instantáneos en cualquier punto del espacio sabiendo que en  $t = 0$ ,  $\vec{r} = 0$  el campo eléctrico instantáneo vale



$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r} = 0, t = 0) = -\frac{1}{2} E \hat{x} - \frac{1}{2} E \hat{y} + \frac{\sqrt{2}}{2} E \hat{z}$$

y su módulo es máximo.

4. Una onda plan uniforme de frecuencia  $600\text{ MHz}$ , polarizada circularmente a derechas, se propaga en el vacío en una dirección y sentido tales que el vector de onda forma ángulos de  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  y  $60^\circ$  con los sentidos positivos de los ejes  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  respectivamente. La onda transporta una densidad de flujo de potencia media de  $100\text{ }\mu\text{W}/\text{m}^2$ . En el instante  $t=0$ , en el origen de coordenadas el campo magnético está contenido en el plano  $z=0$  y forma un ángulo agudo con el sentido positivo del eje  $X$ .

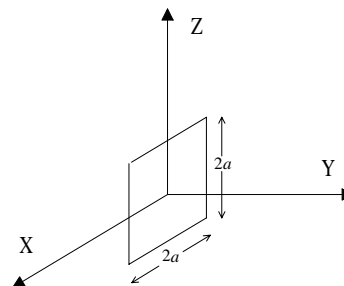


- Determinar el vector de onda.
- Determinar el vector unitario en la dirección y sentido del campo magnético en  $t=0$  y en el origen de coordenadas.
- Determinar la expresión del campo magnético  $\vec{H}$ .
- Determinar la expresión del campo eléctrico  $\vec{E}$ .

5. Una onda plana uniforme de frecuencia  $f=900\text{ MHz}$  se propaga en el vacío. Los ejes de coordenadas se han tomado de tal manera que la onda se propaga en el sentido positivo del eje  $Z$ . La onda está polarizada elípticamente a derechas. En  $t=0$ ,  $z=0$  el campo eléctrico instantáneo vale  $1\hat{x}\text{ V/m}$ , y su módulo es máximo. La onda transporta una densidad media de flujo de potencia de  $2\text{ mW}/\text{m}^2$ .

- Encontrar las expresiones de los fasores  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$ .
- ¿Cuál es el menor  $t>0$  para el cual el campo eléctrico instantáneo en  $z=0$  está contenido en la dirección  $Y$ ?
- ¿Cuánto vale la relación axial de la elipse de polarización?

6. Dos ondas planas uniformes de igual amplitud y frecuencia se propagan en el vacío en el sentido positivo del eje  $Z$ . Ambas están polarizadas circularmente, una de ellas a derechas y la otra a izquierdas. El campo eléctrico instantáneo de la onda polarizada a derechas en  $\vec{r}=0$  y  $t=0$  es  $\vec{\mathcal{E}}_D(\vec{r}=0, t=0) = E_o\hat{x}$ , mientras que para la onda polarizada a izquierdas se tiene  $\vec{\mathcal{E}}_I(\vec{r}=0, t=0) = -E_o\hat{y}$ .

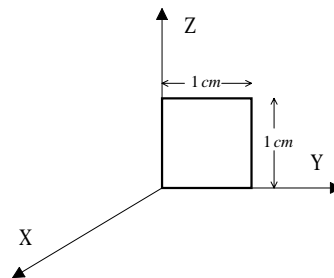


- Escribir las expresiones de los fasores  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  de las dos ondas.

- b) Describir el tipo de polarización de la onda resultante de la superposición de las dos anteriores.
- c) Hallar la densidad de potencia media que transporta la onda resultante.
- d) Obtener la fuerza electromotriz inducida en una espira cuadrada, de lado  $2a$ , centrada en el origen de coordenadas y situada en el plano  $y = 0$ , con sus lados paralelos a los ejes  $X$  y  $Z$ .
- e) Encontrar el mínimo valor de la frecuencia de la onda para el cual la fuerza electromotriz inducida en la espira del apartado anterior es máxima en  $t = 0$ .

7. El campo eléctrico de una onda plana uniforme es de la forma  $\vec{E} = E_o e^{-jkz} \hat{y}$ , con  $k$  el número de onda y  $E_o$  en general un escalar complejo.

- a) ¿Cuál es la dirección y sentido de propagación de la onda?
- b) ¿Cuál es la polarización de la onda?
- c) ¿Cuál es el campo magnético de la onda?
- d) Si la frecuencia de la onda es  $f = 300 \text{ MHz}$  y transporta una densidad de flujo de potencia de  $0,33 \text{ nW/m}^2$ , calcular  $k$  y  $E_o$  (suponer que se ha tomado el origen de tiempos de tal manera que para  $t = 0$ ,  $z = 0$  el campo eléctrico es máximo y dirigido según  $\hat{y}$ ).
- e) Calcular el fasor de la fuerza electromotriz inducida en una espira cuadrada de  $1 \text{ cm}$  de lado situada como se indica en la figura.



8. El campo magnético de una onda plana uniforme que se propaga en el vacío es

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{E_o}{\eta_o} \left[ (1 + j) \hat{x} + j\sqrt{2} e^{j\pi/4} \hat{z} \right] e^{jk y}$$

donde  $E_o$  es una constante real y  $\eta_o$  la impedancia intrínseca del vacío

- a) Determinar la dirección y sentido de propagación de la onda. Si la frecuencia es  $1 \text{ GHz}$ , ¿cuánto valen la longitud de onda  $\lambda$  y el número de onda  $k$ ?
- b) Escribir la expresión del campo eléctrico.
- c) Determinar el tipo de polarización y el sentido de giro de los campos.
- d) Escribir la expresión del vector de Poynting.

9. El campo magnético instantáneo de una onda plana uniforme que se propaga en el aire es

$$\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) = H_o \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{x} - \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{y} \right) \sin \left[ \omega t - \frac{1}{2} (x + y + \sqrt{2} z) \right] \text{ A/m}$$

con  $H_o$  real.

- a) Escribir el fasor campo magnético  $\vec{H}(\vec{r})$ .
- b) Determinar el vector unitario  $\hat{k}$  que indica la dirección y sentido de propagación de la onda. Comprobar que, en efecto, el campo magnético dado corresponde a una onda plana uniforme.
- c) Determinar la frecuencia de la onda.
- d) Determinar el fasor del campo eléctrico.
- e) Si  $H_o = 2,30 \times 10^{-3} \text{ A/m}$ , calcular la densidad de flujo de potencia asociada a la onda.

**10.** Una onda atraviesa dos polarizadores dispuestos perpendicularmente a la dirección de propagación, con orientaciones arbitrarias y, en general, distintas en cada uno de ellos. La onda incidente está polarizada linealmente. Explicar si el orden de los polarizadores es importante

- a) para determinar la dirección de polarización del campo de la onda que emerge del segundo polarizador;
- b) para determinar la densidad de flujo de potencia que transporta la onda emergente.

Responder a las misma preguntas (preguntas c) y d)) para el caso en que la onda incidente tenga polarización circular.



## 4 Incidencia de ondas planas sobre medios materiales

### 4.1 Introducción. Condiciones de contorno de las ecuaciones de Maxwell

Tal como se ha establecido en el capítulo precedente, las ondas planas son las soluciones naturales de las ecuaciones de Maxwell en un medio lineal, homogéneo e isótropo, cuando este medio es indefinido, es decir, cuando comprende todo el espacio y no contiene distribuciones de carga o de corriente. Es evidente que no todas estas condiciones definen un caso ideal: en realidad, aunque el medio cumpla las condiciones de linealidad, homogeneidad e isotropía, en algún lugar tiene que haber distribuciones de carga y de corriente que actúen como fuentes generadoras del campo electromagnético. Entonces, un posible procedimiento para resolver las ecuaciones de Maxwell consiste en dividir el espacio en dos regiones, de manera que todas las fuentes que generan el campo estén incluidas en una única región, a la que llamaremos región I (Fig. 4.1).

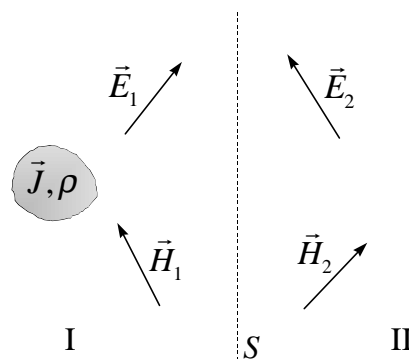


Fig. 4.1 Aplicación de las condiciones de contorno a la resolución de problemas dinámicos. Al no haber cargas ni corrientes en la región II, podemos expresar el campo en esta región como una combinación de ondas planas, cuya composición exacta viene determinada por las condiciones de contorno en la superficie de separación

En este caso, al no haber cargas ni corrientes en la región II, podemos suponer que el campo en esta región será una onda plana o bien una combinación de ondas planas. La solución exacta será la que cumpla las condiciones de contorno en la superficie de separación entre las dos regiones (ver sección 2.4), es decir

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \Big|_S = 0 \quad (4.1)$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Big|_S = \sigma \quad (4.2)$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \Big|_S = 0 \quad (4.3)$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \Big|_S = \vec{J}_S \quad (4.4)$$

donde  $S$  representa la superficie de separación y  $\hat{n}$  es un vector unitario perpendicular (normal) a ella y que aquí se ha tomado dirigido hacia el interior de la región II.

De hecho, se puede demostrar que en régimen senoidal permanente, únicamente dos de estas condiciones, las que afectan a las componentes tangenciales del campo (ecs. (4.1) y (4.4)), son necesarias para asegurar la validez de la solución, ya que, si se cumplen éstas, las condiciones que afectan a las componentes normales se verifican de forma automática (ecs. (4.2) y (4.3)).

Supongamos, pues, que de alguna forma hemos sido capaces de medir las componentes tangenciales del campo electromagnético generado por las fuentes situadas en la región I justo en la superficie  $S$  de separación entre las dos regiones. A partir de esta medida, podremos determinar exactamente qué ondas habrá en la región II, es decir, cuál será la dirección de propagación y la amplitud de las ondas. Más aún, podemos considerar que es el campo electromagnético en la superficie  $S$  el que excita una serie de ondas planas en la región II, cuya amplitud, frecuencia y dirección de propagación dependerá, lógicamente, de la variación temporal y espacial del campo que las ha excitado<sup>1</sup>.

Un ejemplo típico en el que podemos aplicar este principio es el que muestra la figura 4.2. En este caso tenemos dos regiones formadas por medios distintos que se encuentran en contacto. Si suponemos que el medio de la región I es un dieléctrico lineal, homogéneo e isotrópico no conductor y estamos en régimen senoidal permanente, podemos considerar que el campo en esta región será una onda plana o, a lo sumo, una combinación de ondas planas, de manera que cada una de estas ondas deberá cumplir la ecuación de Helmholtz, es decir

<sup>1</sup> Como  $S$  puede ser una superficie cualquiera, esta afirmación se aplica a todos los puntos del espacio, lo que se conoce como principio de Huygens, ya que fue Christiaan Huygens quien la estableció allá por el año 1690.

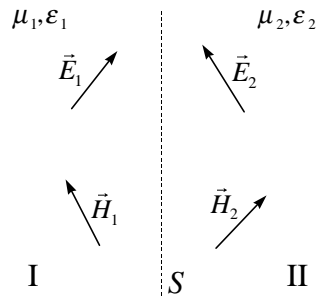


Fig. 4.2 Las condiciones de contorno nos permiten abordar los problemas derivados de un cambio de medio

$$\nabla^2 \vec{E}_1 + k_1^2 \vec{E}_1 = 0$$

e igualmente para el vector  $\vec{H}_1$  de intensidad de campo magnético, donde  $k_1 = \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1}$  es la constante de propagación de las ondas en el medio. Si el medio que forma la región II también es un dieléctrico de las mismas características, pero de permitividad y permeabilidad distintas, las ondas excitadas en este segundo medio deberán cumplir la ecuación

$$\nabla^2 \vec{E}_2 + k_2^2 \vec{E}_2 = 0$$

Por lo tanto, podemos esperar que las soluciones serán ondas distintas en ambas regiones. Sin embargo, el hecho de que los campos  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$  deban cumplir la condición (4.1) en la superficie de separación nos permite “conectar” el campo eléctrico que aparece en la región II con el campo eléctrico presente en la región I. Del mismo modo, la condición (4.4) nos permite la conexión entre los campos  $\vec{H}_1$  y  $\vec{H}_2$ . Como en el caso anterior, podemos entender que el campo electromagnético que aparece en la superficie  $S$  al incidir la onda u ondas que se propagan por la región I excita ondas secundarias en la región II.

En el presente capítulo nos hemos propuesto como objetivo establecer, mediante la aplicación sistemática de las condiciones de contorno, un conjunto de leyes generales que nos permitan relacionar el campo generado en la región II con el campo generado en la región I, en los casos en que dichas regiones están formadas por medios distintos (para simplificar, vamos a considerar que la superficie de separación es simplemente un plano). Las posibilidades a considerar serán, básicamente, las tres siguientes: una de ellas es la ya mencionada, en la que ambos medios son dieléctricos perfectos, lineales, homogéneos e

isótropos; una segunda posibilidad, en la que uno de los dos medios es un conductor perfecto; y finalmente, podemos considerar el caso intermedio en que por lo menos uno de los dos medios sea parcialmente conductor.

Por fortuna, las herramientas de cálculo necesarias para el estudio de las cuestiones relativas a la incidencia de ondas electromagnéticas sobre conductores y dieléctricos no resultan de una complejidad excesiva, lo que nos permitirá abordar con detalle los aspectos físicos de los fenómenos involucrados. La comprensión de estos fenómenos es de vital importancia para entender los principios en los que se basan un gran número de aplicaciones. Como ejemplos de especial relevancia, podemos citar la propagación guiada de las señales electromagnéticas, ya sea a través de fibra óptica o por guía de ondas, la emisión láser, basada en la resonancia electromagnética en cavidades cerradas, o algunos fenómenos relacionados con la propagación atmosférica, entre otros. La importancia que han adquirido estas tecnologías en la telecomunicación moderna y el papel todavía más importante que desempeñarán en un futuro inmediato hacen imprescindible el estudio de estos fenómenos, el cual abordaremos de forma sistemática en el próximo capítulo, aunque en este podremos avanzar ya algunos de sus aspectos más relevantes.

## 4.2 Incidencia normal sobre conductores perfectos

### 4.2.1 Reflexión en la superficie de un conductor perfecto

De los distintos casos de incidencia tratados en el presente capítulo, el más sencillo de analizar es el de incidencia normal sobre conductores perfectos. Es fácil demostrar, atendiendo a criterios de conservación de la energía, que la incidencia de una onda plana sobre la superficie de un conductor perfecto provoca la existencia de una onda reflejada de la misma frecuencia que la incidente, originada en la superficie del conductor.

Para analizar cualitativamente el fenómeno, nos podemos fijar en la figura 4.3a. Supongamos que sobre la superficie del conductor incide una onda plana, dirigida perpendicularmente hacia la superficie (caso de incidencia normal), tal como muestra la figura. Según vimos en el capítulo 1, un conductor perfecto se encuentra siempre en situación de equilibrio electrostático, por lo que no habrá campo en su interior, por muy alta que sea la frecuencia de la onda incidente (*i.e.* por muy rápidas que sean las variaciones temporales del campo en la superficie), ya que un conductor perfecto alcanza la situación de equilibrio de forma instantánea. En este caso, tendremos un flujo de potencia sobre la superficie del conductor, generado por la onda incidente, mientras que no se transmitirá potencia hacia el interior del conductor. Tal como muestra la figura 4.3b, si consideramos una sección cualquiera de la superficie del conductor, incluida dentro de la región limitada por las superficies  $S_1$  y  $S_2$ , el flujo de potencia entrante en esta región es

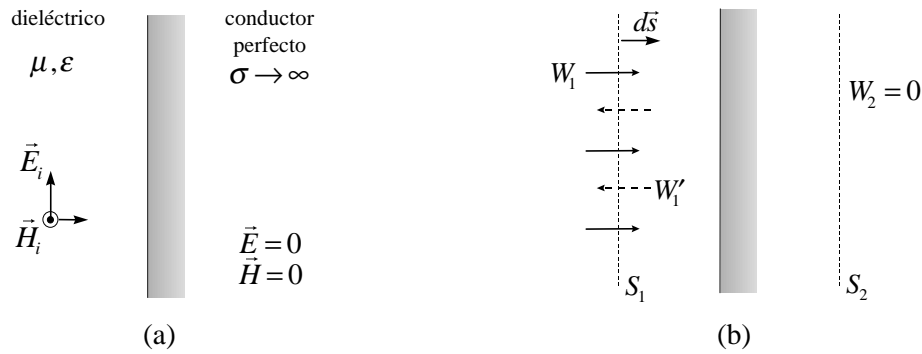


Fig. 4.3 (a) Incidencia normal (perpendicular) de una onda plana sobre un conductor perfecto. (b) El flujo de potencia asociado a la onda incidente debe ser contrarrestado de alguna forma, mediante la creación de un campo adicional (la onda reflejada)

$$W_1 = \int_{S_1} \vec{P}_i \cdot d\vec{s} > 0$$

donde  $\vec{P}_i$  representa el vector de Poynting asociado a la onda incidente. Evidentemente, no habrá flujo de potencia alguno a través de la superficie  $S_2$  (i.e.,  $\int_{S_2} \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}_2 \times \vec{H}_2) \cdot d\vec{s} = 0$ ), ya que se encuentra en el interior del conductor perfecto, lo cual resulta en un flujo neto de potencia que entra en la región limitada por las superficies  $S_1$  y  $S_2$ .

Según el razonamiento anterior, deberíamos concluir que habrá una acumulación de energía en el interior de esta región, la cual debe disiparse de algún modo, ya que de lo contrario la energía total acumulada aumentaría hasta llegar a ser infinita, lo cual es absurdo. Sin embargo, sabemos que en el interior de un conductor perfecto no se produce disipación de potencia (ver sección 2.5.2). Del mismo modo, en un dieléctrico perfecto (es decir, sin pérdidas) tampoco se disipa potencia ninguna.

Por consiguiente, para evitar caer en esta contradicción, debemos asumir la existencia en la superficie  $S_1$  de un flujo de potencia saliente  $W_1'$  que contrarreste<sup>2</sup> el flujo entrante  $W_1$  (es decir,  $W_1 + W_1' = 0$ ), de manera que no pueda acumularse energía en el interior de la región delimitada por  $S_1$  y  $S_2$ . De aquí a suponer la existencia de una onda

<sup>2</sup> Este flujo será negativo, según hemos definido el vector  $d\vec{s}$  (Fig. 4.3b).

plana reflejada que se propaga en dirección opuesta a la de la onda incidente sólo hay un paso, ya que las ondas planas son las soluciones naturales de la ecuación de Helmholtz que rige el comportamiento del campo electromagnético en el dieléctrico<sup>3</sup>.

Pero, ¿cómo se puede originar esta onda reflejada? El razonamiento anterior no basta para explicar completamente la presencia de esta onda. Hay que responder además a esta cuestión que se nos plantea de forma inevitable. Para ello, nos fijamos las condiciones de contorno que afectan al campo electromagnético en la superficie de un conductor perfecto. En este caso, al no haber campo en el conductor (región II, según la figura 4.3a), las condiciones (4.1)-(4.4) se reducen a

$$\hat{n} \times \vec{E}|_S = 0 \quad (4.5)$$

$$\hat{n} \cdot \vec{D}|_S = \sigma \quad (4.6)$$

$$\hat{n} \cdot \vec{B}|_S = 0 \quad (4.7)$$

$$\hat{n} \times \vec{H}|_S = \vec{J}_S \quad (4.8)$$

para el campo electromagnético presente en el dieléctrico (tras haber redefinido el vector unitario  $\hat{n}$  de forma que quede orientado hacia el exterior del conductor -la región I, en este caso). Para que se cumplan estas condiciones, debe haber necesariamente cargas y corrientes en la superficie del conductor. Físicamente, lo que ocurre es que el campo de la onda incidente induce estas cargas y corrientes, las cuales variarán temporalmente con la misma frecuencia que el campo que las ha inducido<sup>4</sup>. Las distribuciones de carga o de corriente variables generan siempre, es decir, radían, campos electromagnéticos variables (ver capítulo 6). En este caso, el campo radiado sólo se puede propagar hacia el dieléctrico y sus componentes serán tales que cumplan las condiciones (4.5)-(4.7).

#### **Ejemplo 4.1:** *La telemetría láser y la teledetección*

Dos aplicaciones prácticas de este sencillo principio se hallan en la base de la telemetría láser y de la teledetección o radar (del inglés *radio detection and*

<sup>3</sup> Naturalmente, este planteamiento sólo es válido para el régimen estacionario. Durante el régimen transitorio será necesaria la absorción de una cierta cantidad de potencia para dar lugar a la formación de la onda reflejada.

<sup>4</sup> De hecho, en el caso de incidencia normal sólo se inducen corrientes, al ser el campo eléctrico de la onda incidente tangente a la superficie del conductor. Sin embargo, tal como veremos más adelante, en el caso de incidencia oblicua aparecen también distribuciones superficiales de carga, inducidas por la componente del campo normal a la superficie.

ranging). El telemetro láser actúa mediante la emisión de un rayo desde un extremo de la distancia que se quiere medir, apuntando hacia un blanco situado en el extremo opuesto (ver figura 4.4a). Aunque en la práctica se utilizan varios esquemas de diseño y diferentes principios de funcionamiento (tiempo de vuelo, triangulación, diferencia de fases, etc.), todos ellos deben analizar alguna característica de la onda devuelta por el blanco. Cuando la aplicación lo permite, se utilizan blancos cooperativos, que devuelven toda la potencia emitida. El blanco cooperativo más sencillo es un conductor perfecto. Más adelante veremos que, no obstante, los dieléctricos también generan ondas reflejadas, aunque en menor proporción. Del mismo modo, la teledetección o radar nos permite determinar la distancia a la que se encuentra un objeto reflector cualquiera, ya sea fijo o móvil (Fig. 4.4b), aunque en este caso se trabaja con señales de microondas.

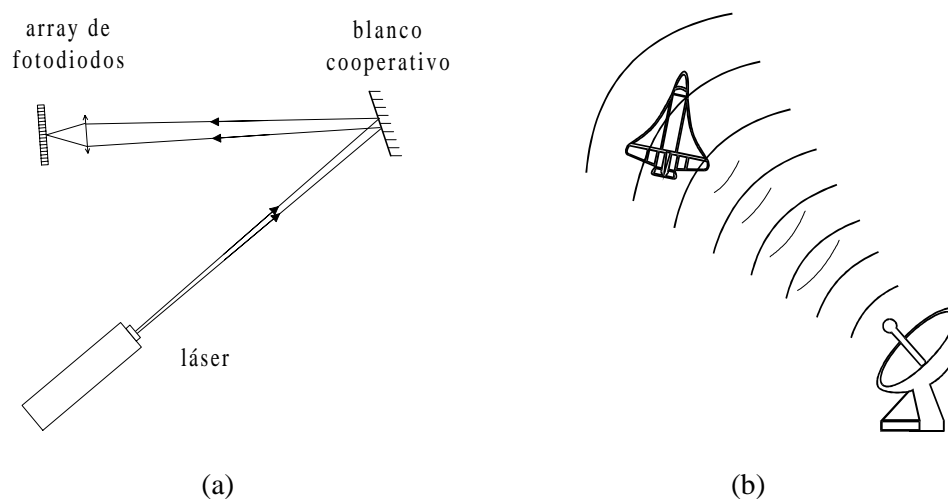


Fig. 4.4 Dos aplicaciones prácticas del fenómeno de la reflexión en conductores: (a) telémetro láser; (b) radar

(a) Onda incidente con polarización lineal

Ahora que ya hemos sido capaces de comprender los principios en los que se basa el fenómeno de la reflexión de las ondas en las superficies conductoras, procedamos a abordar el problema de forma cuantitativa. Al no haber campo en el interior del conductor, la aplicación de las condiciones se simplifica enormemente. De hecho, bastará con imponer la condición (4.5), según la cual las componentes del campo eléctrico tangentes a la superficie del conductor deben anularse en esta superficie, a las soluciones de la ecuación  $\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$  para que el campo electromagnético presente en el dieléctrico que constituye la región I quede completamente determinado. Aplicando luego las condiciones

(4.6) y (4.8), podemos obtener las cargas y corrientes inducidas en la superficie del conductor, mientras que la condición (4.7) se verificará de forma automática. El primer paso a realizar, pues, consiste en identificar las componentes tangentes del campo  $\vec{E}$  y comprobar que se cumple la condición (4.5).

Tomemos como punto de partida la expresión genérica de la onda incidente. Al tratarse de una onda plana en régimen senoidal permanente, el campo fasorial asociado a la onda será de la forma

$$\begin{aligned}\vec{E}_i(\vec{r}) &= \vec{E}_{0i} e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \\ \vec{H}_i(\vec{r}) &= \frac{1}{\eta} \hat{k}_i \times \vec{E}_i(\vec{r})\end{aligned}$$

donde  $\vec{k}_i \equiv k\hat{k}_i$  es el vector de propagación de la onda.  $\eta \equiv \sqrt{\mu/\epsilon}$  y  $k \equiv \omega\sqrt{\mu\epsilon}$  representan, respectivamente, la impedancia intrínseca y la constante de propagación del dieléctrico. En principio, el campo  $\vec{E}_i$  puede tener una polarización cualquiera. De momento y para simplificar el cálculo, consideraremos que la onda incidente está polarizada linealmente<sup>5</sup>. En este caso, podemos fijar los ejes de coordenadas como se indica en la figura 4.5, de manera que uno de ellos (por ejemplo, el eje  $Z$ ) sea perpendicular a la superficie del conductor, con lo que coincidirá con la dirección de propagación de la onda (es decir,  $\hat{k}_i = \hat{z}$ ), mientras que otro (el eje  $Y$ ) coincida con la dirección del campo eléctrico. Bajo estas condiciones, la onda incidente toma la forma

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = E_{0i} \hat{y} e^{-jkz} \quad (4.9)$$

$$\vec{H}_i(\vec{r}) = \frac{1}{\eta} \hat{z} \times \hat{y} E_{0i} e^{-jkz} = -\frac{E_{0i}}{\eta} \hat{x} e^{-jkz} \quad (4.10)$$

Tal como hemos visto, la presencia del conductor nos obliga a asumir la existencia de una onda reflejada. Para simplificar el cálculo, vamos a suponer que la onda reflejada se propaga en dirección opuesta a la de la onda incidente (es decir  $\hat{k}_r = -\hat{z}$ ), con lo cual tenemos<sup>6</sup>

<sup>5</sup> Recuérdese que una onda con una polarización cualquiera puede descomponerse como combinación de dos ondas polarizadas linealmente en direcciones ortogonales.

<sup>6</sup> Esta es la hipótesis más simple, fácilmente justificable bajo consideraciones de simetría: en este caso, tanto el medio como el campo de excitación (la onda incidente) presentan únicamente variaciones en la dirección normal a la superficie del conductor, por lo que podemos esperar que la respuesta obtenida (la onda reflejada) presente características similares. También podríamos partir de una expresión más general para el campo de la onda reflejada, pero el resultado final sería el mismo.



$$\vec{E}_r(\vec{r}) = \vec{E}_{0r} e^{jkz} \quad (4.11)$$

$$\vec{H}_r(\vec{r}) = -\frac{1}{\eta} \hat{z} \times \vec{E}_r(\vec{r}) \quad (4.12)$$

para el campo asociado.

Finalmente, podemos situar la superficie de separación entre el dieléctrico y el conductor de manera que coincida con el plano  $z = 0$  (Fig. 4.5). En este caso y teniendo en cuenta que el campo total en el dieléctrico es el resultado de la superposición del campo eléctrico de la onda incidente y el de la onda reflejada (*i.e.*,  $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r$ ), podemos descomponer la condición (4.5) para las componentes tangenciales del campo eléctrico de la forma

$$(E_{ix} + E_{rx})|_{z=0} = 0 \quad (4.13)$$

$$(E_{iy} + E_{ry})|_{z=0} = 0 \quad (4.14)$$

Al haber impuesto que el campo eléctrico de la onda incidente sólo tenga componente en la dirección del eje  $Y$  (expresión (4.9)), tenemos  $E_{ix} = 0$ , por lo que a la fuerza debe ser  $E_{rx} = 0$  en la superficie del conductor. En consecuencia, en el campo eléctrico de la onda reflejada sólo aparece la componente en la dirección del eje  $Y$ , es decir <sup>7</sup>

$$\vec{E}_r(\vec{r}) = E_{0r} \hat{y} e^{jkz}$$

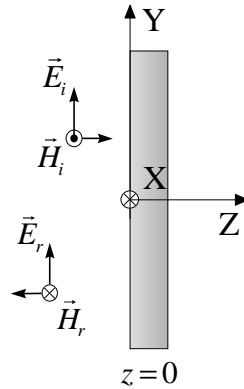


Fig. 4.5 Sistema de coordenadas empleado para la resolución del problema

<sup>7</sup> Recordemos que para que un fasor se anule en un punto cualquiera, su amplitud debe valer cero en ese punto. Al ser  $E_{rx}$  una magnitud fasorial de amplitud constante, sólo puede anularse en un punto concreto si se anula simultáneamente en todos los puntos del espacio.

debiendo ser, además,  $E_{0r} = -E_{0i}$ , de acuerdo con (4.14), con lo que nos queda

$$\vec{E}_r(\vec{r}) = -E_{0i} \hat{y} e^{jkz} \quad (4.15)$$

para la onda reflejada. En otras palabras: para que se cumpla la condición de contorno (4.5) en la superficie del conductor, la amplitud y la polarización del campo eléctrico deben ser las mismas en las ondas incidente y reflejada. Por otro lado, el signo “-” que aparece en la expresión (4.15) nos introduce un desfase  $\Delta\phi = \pi$  en el campo instantáneo de la onda reflejada con respecto al de la onda incidente. En cuanto al campo magnético, nos queda

$$\vec{H}_r(\vec{r}) = -\frac{1}{\eta} \hat{z} \times (-\hat{y}) E_{0i} e^{jkz} = -\frac{E_{0i}}{\eta} \hat{x} e^{jkz} \quad (4.16)$$

### *Cargas y corrientes inducidas en el conductor*

Pero, ¿qué ocurre con las condiciones de contorno restantes? Para estar completamente seguros de que, efectivamente, hemos dado con la solución del problema, es necesario comprobar que se cumplen las condiciones (4.6)-(4.8). Para ello debemos conocer los campos totales, eléctrico y magnético, presentes en el dieléctrico tras la reflexión. Sumando las expresiones (4.9) y (4.15), obtenemos la siguiente expresión fasorial

$$\vec{E}(z) = E_{0i} (e^{-jkz} - e^{jkz}) \hat{y} = -2jE_{0i} \hat{y} \sin kz \quad (4.17)$$

para el campo eléctrico total<sup>8</sup>.

Empecemos por la condición (4.6), la cual nos permitirá conocer la distribución de carga inducida en el conductor. En este caso, tal como hemos fijado los ejes de coordenadas en la figura 4.5, resulta

$$\sigma = (-\hat{z}) \cdot (\epsilon \vec{E}) \Big|_{z=0} = 0 \quad (4.18)$$

ya que, según (4.17), el campo  $\vec{E}$  no tiene componente en la dirección  $\hat{z}$ . Como habíamos anticipado al principio de esta sección, en este caso no se induce carga alguna en la superficie del conductor. Sin embargo, no debemos tomar este resultado como norma general, ya que más adelante veremos que en el caso de incidencia oblicua sí pueden aparecer cargas inducidas.

---

<sup>8</sup> Vemos que el campo total también es tangente a la superficie del conductor. Tal como pretendíamos,  $\vec{E}_y \Big|_{z=0} = 0$ , con lo que se verifica la condición (4.5).

Las condiciones (4.7) y (4.8) afectan a la intensidad de campo magnético total (fasorial, en este caso) la cual podemos expresar como superposición de los campos magnéticos asociados a las ondas incidente y reflejada. Entonces, sumando las expresiones correspondientes, (4.10) y (4.16), obtenemos

$$\vec{H}(z) = -\frac{E_{0i}}{\eta} \hat{x} (e^{-jkz} + e^{jkz}) = -2 \frac{E_{0i}}{\eta} \hat{x} \cos kz \quad (4.19)$$

para la intensidad total de campo magnético presente en el dieléctrico. Vemos que en este caso no aparece componente en la dirección  $\hat{z}$  (i.e., el campo magnético es tangente a la superficie del conductor), con lo que se verifica la condición (4.7), ya que, tras particularizarla para la situación de la figura 4.5, nos queda de la forma

$$(-\hat{z}) \cdot (\mu \vec{H}) \Big|_{z=0} = 0 \quad (4.20)$$

Finalmente, la condición (4.8) nos permite obtener la distribución de corriente inducida en la superficie del conductor por la onda incidente. Particularizándola para la situación de la figura 4.5 y sustituyendo según (4.19), obtenemos

$$\vec{J}_s = (-\hat{z}) \times \vec{H} \Big|_{z=0} = -\hat{z} \times \hat{x} (-2) \frac{E_{0i}}{\eta} \cos kz \Big|_{z=0} = 2 \frac{E_{0i}}{\eta} \hat{y} \quad (4.21)$$

Es decir, como consecuencia de la incidencia de una onda plana sobre un conductor perfecto, se induce una corriente superficial de tipo senoidal, cuyo fasor es constante, y que circula en la dirección del campo eléctrico de la onda incidente. En el capítulo 3 habíamos generado una onda plana a partir de una corriente uniforme, distribuida a lo largo y ancho de una superficie plana infinita; he aquí, pues, la causa que genera la onda plana reflejada, cuya existencia habíamos postulado al principio<sup>9</sup>.

<sup>9</sup> De hecho, un sistema formado por un dieléctrico limitado por un conductor perfecto sobre el que incide una onda plana uniforme es equivalente, en cuanto al comportamiento electromagnético, a la superposición de la onda incidente con las dos ondas, progresiva y regresiva, que generaría una lámina infinita por la que circulara una corriente de fasor constante, situada justo donde se encuentra la superficie del conductor (Fig. 4.6). Para que ambos sistemas sean totalmente equivalentes, el campo eléctrico de la onda incidente y el de la onda progresiva generada por la lámina de corriente deben tener la misma amplitud y estar en contrafase, de modo que se produzca una interferencia destructiva en la región del espacio que ocupaba el conductor. Según el resultado obtenido en el ejemplo 3.1, ello ocurrirá cuando se cumpla la relación (4.21) entre el fasor de densidad de corriente inducida y la amplitud de la onda incidente. En este caso, resulta evidente que la onda regresiva generada por la lámina (la onda reflejada) también tendrá la misma amplitud que la onda incidente y estará en oposición de fase con ella justo en la lámina, ya que, por razones de simetría, las ondas progresiva y regresiva deben ser idénticas, exceptuando el hecho de que se propagan en direcciones opuestas.

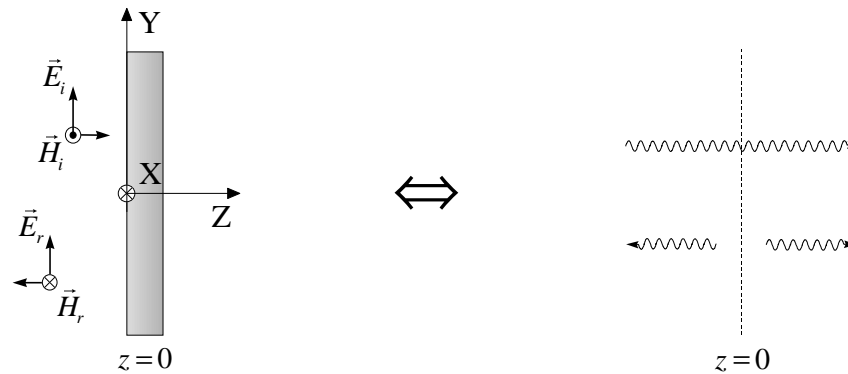


Fig. 4.6 La situación creada por una onda plana y las ondas progresiva y regresiva generadas por una lámina de corriente infinita y de fasor constante es equivalente a la creada por la unión de un dieléctrico y un conductor perfecto

(b) Onda incidente con una polarización cualquiera

Como resultado del análisis realizado, podemos concluir que el fenómeno de la reflexión de una onda polarizada linealmente que incide perpendicularmente sobre un conductor perfecto presenta las propiedades siguientes:

- Conservación de la polarización tras la reflexión.
- La onda reflejada y la onda incidente tienen la misma amplitud.
- Justo en la superficie del conductor, la onda reflejada se encuentra en oposición de fase con la onda incidente, hecho representado por un signo “-” en el fasor correspondiente (expresión (4.15)).

Antes de pasar a analizar qué consecuencias conllevan estas tres propiedades, podemos extenderlas fácilmente al caso más general de una onda incidente con una polarización cualquiera. El primer paso consiste en comprobar que el resultado obtenido no depende de la dirección del campo asociado a la onda incidente. Observemos, en primer lugar, la figura 4.7a, donde tenemos la misma situación que en la figura 4.5. En este caso se cumplirán las tres propiedades reseñadas. Pero, ¿y si giramos la orientación del campo  $90^\circ$  en sentido antihorario? O, lo que es lo mismo, ¿qué ocurre si giramos el conductor  $90^\circ$  en sentido contrario? Pues nada en particular, excepto que ahora la dirección del campo eléctrico de la onda incidente coincide con la del eje X (Fig. 4.7b). Ambas ondas observan exactamente lo mismo: un conductor perfecto cuya superficie se extiende hacia el infinito en todas direcciones (nuestro problema tiene simetría cilíndrica). Por lo tanto, todas las propiedades que se obtienen para el caso de la figura 4.7a se cumplen también para el caso

de la figura 4.7b, y en general, para cualquier onda polarizada linealmente, sea cuál sea la dirección del campo eléctrico.

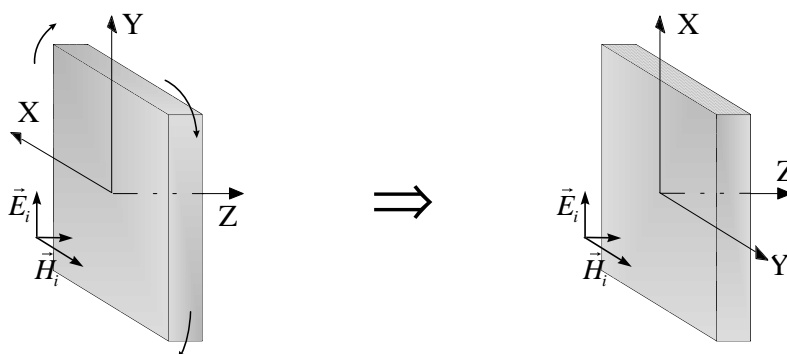


Fig. 4.7 Debido a la simetría que presenta la situación planteada, el resultado no depende de la orientación del campo eléctrico

Finalmente, ¿qué ocurre si la onda no tiene polarización lineal, sino que está polarizada circular o elípticamente? En este caso, según hemos comprobado en la sección 3.3.3, podemos descomponerla en dos ondas planas polarizadas linealmente en direcciones ortogonales. Como acabamos de ver, ambas componentes cumplirán las tres propiedades reseñadas, por lo que es fácil comprobar que también se cumplirán para el campo total de la onda incidente.

Hay que observar, sin embargo y contra lo que podría parecer, que la reflexión introduce un cambio en el sentido de giro del campo instantáneo con respecto al de la onda incidente, aunque ello es sólo consecuencia del convenio adoptado en la sección 3.3.1 para fijar el sentido de giro de una onda plana. Según dicho convenio, los vectores unitarios que definen el sentido de giro de las ondas incidente y reflejada quedarán como se indica en la figura 4.8. Como podemos ver, el convenio  $\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{k}$  da lugar a un intercambio entre los vectores  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$  en la onda reflejada con respecto a la onda incidente, como consecuencia del cambio producido en la dirección de propagación. No obstante, si observamos ambas ondas *desde un mismo punto*, por ejemplo desde la superficie del conductor, veremos cómo en los dos casos el campo instantáneo gira en el mismo sentido. Ello debe ser así para que las condiciones de contorno se cumplan en todo momento.

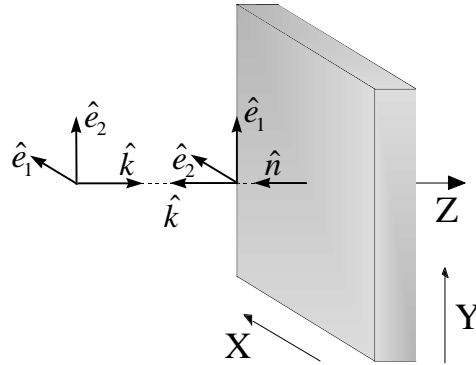


Fig. 4.8 Los vectores unitarios empleados para definir el sentido de giro del campo instantáneo se intercambian entre sí tras la reflexión

#### 4.2.2 Ondas estacionarias

En cuanto a las consecuencias que conllevan las tres propiedades reseñadas, cabe decir, en primer lugar, que los flujos de potencia asociados a las ondas incidente y reflejada se contrarrestan, tal como habíamos planteado al principio de la sección 4.2.1. Volviendo a la figura 4.3a, podemos calcular el flujo de potencia  $W_1$  entrante a través de la superficie  $S_1$  y el flujo saliente  $W_1'$  integrando los vectores de Poynting asociados a las ondas incidente y reflejada, lo que nos da

$$W_1 = \int_{S_1} \vec{P}_i \cdot d\vec{s} = \int_{S_1} \frac{|E_{0i}|^2}{2\eta} \hat{z} \cdot d\vec{s} = \frac{|E_{0i}|^2}{2\eta} S_1$$

$$W_1' = \int_{S_1} \vec{P}_r \cdot d\vec{s} = \int_{S_1} \frac{|E_{0r}|^2}{2\eta} (-\hat{z}) \cdot d\vec{s} = -\frac{|E_{0i}|^2}{2\eta} S_1$$

donde hemos tenido en cuenta la relación (4.15). Vemos que ahora sí se cumple la condición  $W_1 + W_1' = 0$ , necesaria para que no se acumule potencia indefinidamente en la región delimitada por las superficies  $S_1$  y  $S_2$ .

La segunda consecuencia consiste en la formación de una *onda estacionaria* en el dieléctrico, como resultado de la superposición de las ondas incidente y reflejada. Las ondas estacionarias, a diferencia de las ondas planas, no se propagan a través del espacio, con lo que no permiten la transmisión de potencia (ni de ningún tipo de información) de un punto a otro. Sin embargo, presentan otras propiedades que son de enorme utilidad práctica. El

estudio de estas propiedades, así como de algunas de sus aplicaciones más comunes, es el objetivo que nos hemos planteado en esta sección.

Empecemos por ver qué es una onda estacionaria. Para ello, retomamos la expresión fasorial (4.17), obtenida en la sección 4.2.1 para el campo total presente en el dieléctrico tras la reflexión de la onda incidente

$$\vec{E}(z) = -2jE_{0i}\hat{y}\sin kz \quad (4.22)$$

Fijando el origen de tiempos de manera que la amplitud  $E_{0i}$  sea un número real, se obtiene la siguiente expresión para el campo instantáneo<sup>10</sup>:

$$\vec{\mathcal{E}}(z, t) = \text{Re}\left[\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t}\right] = 2E_{0i}\hat{y}\sin kz \sin \omega t \quad (4.23)$$

A diferencia de lo que ocurre con una onda plana, el campo representado por la expresión (4.23) es una función que no se desplaza con el tiempo, sino que permanece estacionaria (de ahí su nombre), tal como podemos ver en la figura 4.9. El comportamiento que se obtiene se asemeja al de una cuerda vibrante, sujeta por un extremo. Para entender lo que ocurre, podemos considerar el término  $E_{0i}\sin \omega t$  como una amplitud instantánea que multiplica a la función  $\sin kz$ . En este caso,  $\vec{\mathcal{E}}(z, t)$  es una función senoidal de la forma

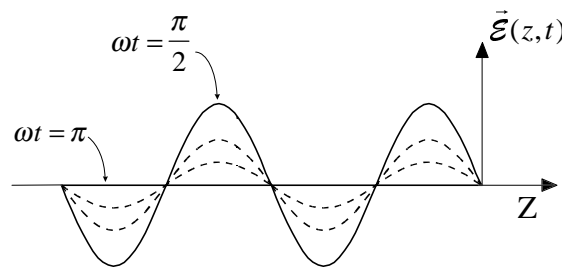


Fig. 4.9 Representación espacial del campo eléctrico instantáneo correspondiente a una onda estacionaria

<sup>10</sup> En general, el término de amplitud es un fasor del tipo  $E_{0i} = |E_{0i}|e^{j\varphi_{0i}}$ , donde el término  $\varphi_{0i}$  representa la fase inicial de la onda. En este caso, la expresión (4.23) toma la forma

$$\vec{\mathcal{E}}(z, t) = 2E_{0i}\hat{y}\sin kz \sin(\omega t + \varphi_{0i})$$

Es fácil comprobar que el valor concreto de la fase inicial  $\varphi_{0i}$  no afecta al comportamiento genérico de la función, por lo que podemos simplificarla, fijando  $\varphi_{0i} = 0$ .

$$\vec{\mathcal{E}}(z, t) \equiv \mathcal{E}_o(t) \sin kz \hat{y}$$

cuya amplitud  $\mathcal{E}_o(t) \equiv 2E_{0i} \sin \omega t$  toma valores diferentes para distintos instantes de tiempo, siendo máxima para valores  $\omega t = \pi/2, 3\pi/2$ , etc. y mínima para valores  $\omega t = 0, \pi, 2\pi$ , etc. (ver Fig. 4.9).

Por otro lado, existen una serie de puntos en los que el campo es nulo para todo instante de tiempo. Estos puntos reciben el nombre de *nodos* (los puntos en los que el campo se hace máximo reciben el nombre de *vientres*). En el caso considerado, estos nodos están situados a distancias

$$z_m = m \frac{\pi}{k} = m \frac{\lambda}{2} \quad m = 0, 1, \dots \quad (4.24)$$

del conductor, obtenidas imponiendo la condición  $\sin kz|_{z=z_m} = 0$  en la expresión (4.23). Según (4.24), la distancia  $l$  entre dos nodos consecutivos corresponde a una semilongitud de onda en el dieléctrico.

Igualmente, si calculamos el campo  $\vec{\mathcal{H}}$  instantáneo, a partir de la expresión (4.19), obtenemos

$$\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{H}(\vec{r})e^{j\omega t}] = -2\hat{x} \frac{E_{0i}}{\eta} \cos kz \cos \omega t \quad (4.25)$$

El comportamiento que se obtiene es análogo al del campo eléctrico instantáneo, exceptuando el hecho que ahora el campo no se anula en la pared conductora.

Finalmente, podemos comprobar, calculando el vector de Poynting medio, que se verifica

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] = \frac{1}{2} \text{Re}[4j|E_{0i}|^2 (\hat{y} \times \hat{x}) \sin kz \cos kz] = 0 \quad (4.26)$$

esto es, que una onda estacionaria *no permite el transporte de potencia ni, por consiguiente, de información alguna a través del espacio*. Este hecho es el resultado de la superposición de dos flujos de potencia, asociados a las ondas incidente y reflejada, de igual intensidad y dirección opuesta, tal como hemos visto al principio de esta sección.

### Cavidades resonantes

Una consecuencia interesante y de gran interés práctico de la formación de ondas estacionarias por la reflexión de ondas planas en conductores, la encontramos en el fenómeno de la resonancia en cavidades. Aunque en la sección 5.4 se estudiará con más



profundidad el comportamiento de las cavidades resonantes, podemos entenderlo, a grandes rasgos, del modo siguiente:

Imaginemos que disponemos dos paredes conductoras, situadas una frente a otra y separadas por una distancia  $d$ , tal como muestra la figura 4.10a. Supongamos que hemos conseguido excitar una onda plana en el interior de la cavidad, en la dirección perpendicular a la superficie de las paredes y con el campo eléctrico polarizado linealmente según el eje  $Y$ . Tras incidir en una de ellas, por ejemplo en la situada en  $z = 0$ , y como consecuencia de la reflexión producida, se genera una onda estacionaria en el interior de la cavidad. Como hemos visto, la condición de contorno  $\vec{E}_{tan}|_{z=0} = 0$  impone que el fasor del campo eléctrico asociado a la onda estacionaria sea de la forma indicada por la expresión (4.17). Hasta aquí el problema es idéntico al de la figura 4.3a. Sin embargo, la presencia de la segunda pared nos impone la condición adicional

$$\vec{E}_{tan}|_{z=-d} = 0$$

Luego, en la posición  $z = -d$  debemos tener un nodo de la onda estacionaria para que se verifique esta última condición, por lo que se debe cumplir

$$d = m \frac{\lambda}{2} \quad m=0,1,\dots \quad (4.27)$$

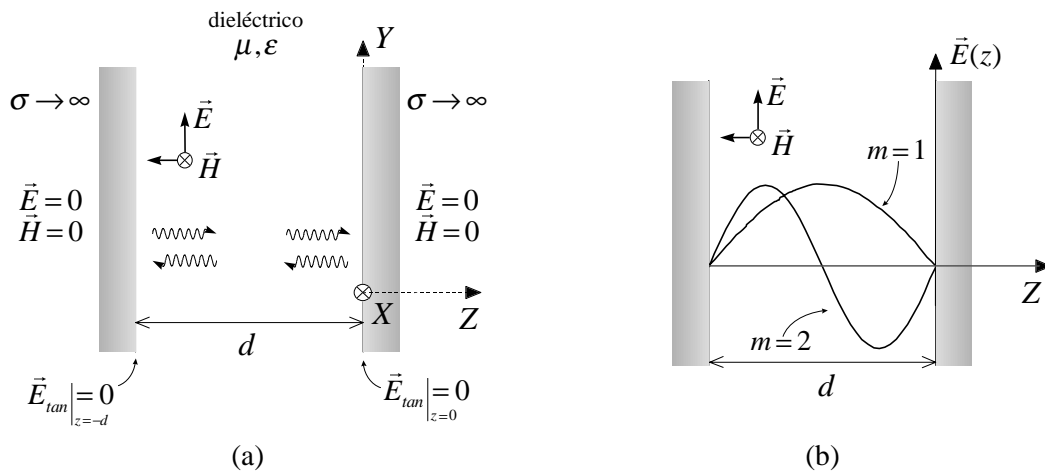


Fig. 4.10 (a) Cavidad resonante formada por dos paredes conductoras separadas por un medio dieléctrico. (b) Modos de vibración de la cavidad

o, lo que es lo mismo,  $kd = \frac{2\pi}{\lambda}d = m\pi$ <sup>11</sup>. Es decir, en el interior de la cavidad sólo se pueden generar un número limitado de ondas estacionarias, las cuales reciben el nombre de *modos de vibración* de la cavidad y se identifican según el valor de  $m$ . En la figura 4.10b aparecen representados los modos correspondientes a  $m=1$  y  $m=2$ . Las *frecuencias de resonancia* correspondientes son  $f = v/2d$  y  $f = v/d$ , respectivamente, donde  $v$  es la velocidad de propagación de las ondas planas en el dieléctrico. La frecuencia de resonancia para un modo  $m$  cualquiera es  $f = m \frac{v}{2d}$ .

#### **Ejemplo 4.2:** Cavidades láser

Una aplicación del fenómeno de la resonancia se encuentra en las cavidades láser. Aunque existen muchos tipos de láser distintos, uno de los más corrientes es el láser de He-Ne, en el que un gas formado por una mezcla de helio y neón se encuentra encerrado en el interior de una cavidad cilíndrica, limitada en sus extremos por dos espejos metálicos, uno de los cuales es un reflector perfecto, mientras que el otro sólo refleja parte de la onda incidente y deja pasar el resto. La onda estacionaria se genera en el interior de la cavidad mediante el proceso conocido con el nombre de *emisión estimulada*, tras la excitación de los átomos del gas por medio de un campo externo, de manera que el número de átomos excitados supera al de átomos no excitados (lo que se conoce como *inversión de población*). La descripción exacta del fenómeno escapa al propósito de este libro, ya que no puede ser explicado mediante la teoría clásica de campos y es necesario recurrir a la mecánica cuántica. Sin embargo, podemos entender el fenómeno a grandes rasgos del modo siguiente: el paso de una onda elemental o fotón cerca de un átomo excitado provoca su desexcitación. Para que la desexcitación se produzca, la energía del fotón debe coincidir con la energía de excitación del átomo. En este caso, al desexcitarse, el átomo emite una onda de características (frecuencia y fase) idénticas a las de la onda incidente, a la que cede la energía que había adquirido al ser excitado por el campo externo. Cuando existe inversión de población, la emisión estimulada se reproduce en cascada, ya que los dos fotones resultantes pueden desexcitar, a su vez, más átomos, y así sucesivamente. La presencia de los espejos

<sup>11</sup> También podemos entender el fenómeno del modo siguiente: una onda plana excitada en el punto  $z=0$ , tras ser reflejada en la pared situada en  $z=-d$ , regresa al punto de partida, donde se superpone a la onda inicial, y así sucesivamente. Si el desfase  $e^{-jk2d}$  acumulado por las ondas secundarias generadas tras cada ida y vuelta es un múltiplo de  $2\pi$ , todas las ondas llegarán al punto  $z=0$  con la misma fase y se reforzarán entre sí (*interferencia constructiva*). Por el contrario, si la frecuencia de la onda inicial es tal que no se cumple la condición  $2kd = m2\pi$ , las ondas llegarán con fases distintas, dando lugar a contribuciones positivas y negativas para el campo eléctrico total en la cavidad. Repitiendo el proceso hasta el infinito, se puede comprobar que las distintas contribuciones se contrarrestan completamente (*interferencia destructiva*).

reflectores en los extremos de la cavidad provoca que únicamente las ondas cuya frecuencia coincida con una de las frecuencias de resonancia de la cavidad darán lugar a interferencias constructivas. Las ondas restantes interferirán destructivamente entre ellas (de ahí el carácter monocromático de la luz láser).

Por lo tanto, en una cavidad resonante con un medio activo (la mezcla de He-Ne u otro), existen dos condicionantes para la frecuencia de emisión: el primero viene dado por las diferencias energéticas de los niveles atómicos implicados en el proceso (según la conocida relación  $E = hf$ , en la que  $E$  representa dicha diferencia de energía,  $f$  es la frecuencia de la onda emitida y  $h$  es una constante universal, conocida como *constante de Planck*) y el segundo por las frecuencias propias de la cavidad. De ambas condiciones la segunda es, en la práctica, la más restrictiva.

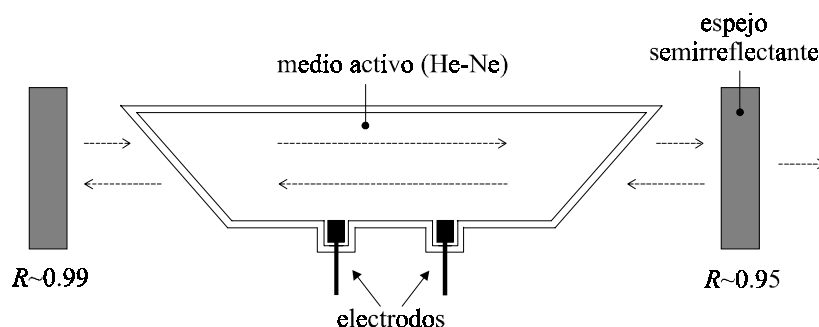


Fig. 4.11 Resonancia en una cavidad láser

### 4.3 Incidencia normal sobre medios dieléctricos

#### 4.3.1 Reflexión y transmisión en la superficie de un medio dieléctrico

Consideremos ahora el caso en que el medio sobre el que incide la onda es un material dieléctrico no conductor. ¿Qué fenómenos podemos esperar que se produzcan ahora como consecuencia de la incidencia de una onda plana sobre la superficie de separación? Para empezar, podemos suponer que, como ocurría con los conductores perfectos, aparecerá una onda reflejada en el primer medio. La novedad se encuentra en el hecho que ahora el campo no tiene porqué ser nulo en el segundo medio, al tratarse de un dieléctrico no conductor, por lo que debemos asumir la existencia de, por lo menos, una onda transmitida<sup>12</sup>, tal como indica la figura 4.12a.

<sup>12</sup> Como principio de actuación, debemos optar siempre por la hipótesis más sencilla posible. Si luego no logramos que se cumplan las condiciones de contorno, siempre estaremos a tiempo de añadir elementos adicionales.

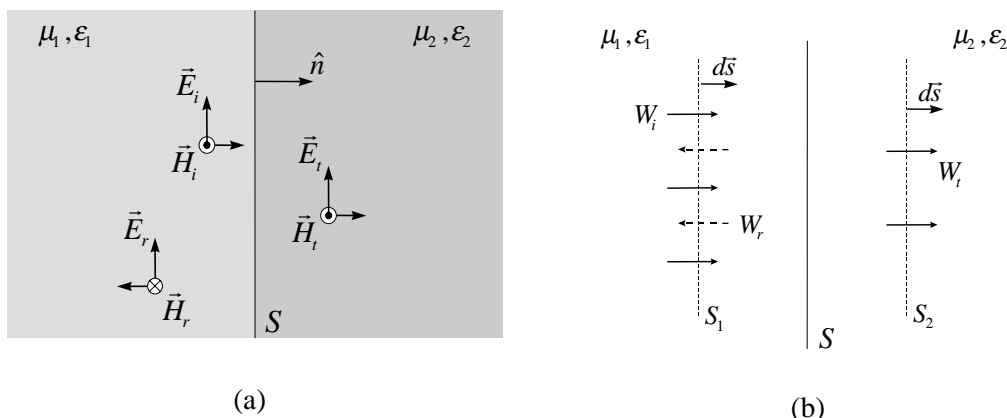


Fig. 4.12 (a) Incidencia normal de una onda plana sobre un medio dieléctrico no conductor. En este caso el campo no ha de ser nulo necesariamente en la región II y debemos asumir la existencia de una onda transmitida. (b) Flujo de potencia asociado a las ondas incidente, reflejada y transmitida

Tal como vimos en la sección precedente, si no existen pérdidas en ninguno de los dos medios, cuando estamos en régimen senoidal permanente el flujo medio de potencia que incide en la superficie de separación debe equilibrarse con el flujo que sale de ella (Fig. 4.12b). Es decir, debe cumplirse la relación

$$W_i + W_r = W_t$$

donde  $W_i$  y  $W_r$  representan el flujo medio de potencia a través de  $S_1$  asociado a las ondas incidente y reflejada, respectivamente, mientras que  $W_t$  corresponde al flujo de potencia a través de  $S_2$  asociado a la onda transmitida. Dicho de otro modo

$$\int_{S_1} \vec{P}_i \cdot d\vec{s}_1 + \int_{S_1} \vec{P}_r \cdot d\vec{s}_1 = \int_{S_2} \vec{P}_t \cdot d\vec{s}_2 \quad (4.28)$$

donde  $\vec{P}_i$ ,  $\vec{P}_r$  y  $\vec{P}_t$  son los vectores de Poynting correspondientes<sup>13</sup>.

<sup>13</sup> Nótese que el término  $W_r = \int_{S_1} \vec{P}_r \cdot d\vec{s}_1$ , correspondiente a la onda reflejada, da lugar a una contribución negativa, puesto que  $\vec{P}_r$  y  $d\vec{s}_1$  tienen sentidos opuestos.

Por otro lado, el campo electromagnético resultante debe satisfacer las condiciones de contorno (4.1)-(4.4). Suponiendo que no hay cargas ni corrientes de portadores libres en ninguno de los dos medios<sup>14</sup>, las condiciones que afectan a las componentes tangenciales del campo toman la forma<sup>15</sup>

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \Big|_S = 0 \quad (4.29)$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \Big|_S = 0 \quad (4.30)$$

Ahora bien, si no hay cargas ni corrientes de portadores libres, ¿cómo se generan en este caso las ondas reflejada y transmitida? La causa habrá que buscarla ahora en las cargas (y corrientes) ligadas al medio. Tal como vimos en el capítulo 2, éstas se encuentran formando dipolos, los cuales se orientan según el campo electromagnético presente en el medio. Si este campo es variable en el tiempo, como es el caso de una onda plana uniforme que incide sobre su superficie, se producirá una reorientación de los dipolos acorde con la variación del campo, lo que modificará la posición de las cargas ligadas, así como la dirección e intensidad de las corrientes. Luego, estas variaciones serán las que originarán las ondas reflejada y transmitida.

Una vez aclarado su origen, pasemos a determinar el campo que resulta de la reflexión y transmisión en la superficie de separación, mediante el procedimiento empleado en la sección 4.2.1 para la incidencia normal sobre conductores perfectos, es decir, consideraremos, de momento y para simplificar el cálculo, que la onda incidente tiene polarización lineal, para más adelante extender el resultado obtenido a ondas con polarización circular y elíptica.

Tal como muestra la figura 4.12a, fijamos los ejes de coordenadas de manera que el eje  $Z$  coincida con la dirección de propagación de la onda incidente y el eje  $Y$  coincida con la dirección de polarización del campo eléctrico asociado. En este caso, los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  de la onda incidente de nuevo vendrán dados por las expresiones (4.9) y (4.10), es decir

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = E_{0i} \hat{y} e^{-jk_1 z} \quad (4.31)$$

$$\vec{H}_i(\vec{r}) = -\frac{E_{0i}}{\eta_1} \hat{x} e^{-jk_1 z} \quad (4.32)$$

<sup>14</sup> A diferencia de lo que ocurre en un conductor, en un dieléctrico no conductor sólo puede haber portadores de carga libres si son introducidos por medio de algún mecanismo externo.

<sup>15</sup> Recordemos, una vez más, que en régimen senoidal permanente, si se cumplen éstas, las condiciones que afectan a las componentes normales se verifican de forma automática.

donde  $\eta_1 \equiv \sqrt{\mu_1 / \epsilon_1}$  y  $k_1 \equiv \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1}$  son, respectivamente, la impedancia intrínseca y la constante de propagación del dieléctrico que forma la región I.

Para la onda reflejada supondremos que se propaga en dirección opuesta a la de la onda incidente ( $-\hat{z}$ , según la figura 4.12a) y que conserva la misma polarización (tal como habíamos hecho en la sección 4.2.1 para la incidencia sobre conductores<sup>16</sup>), es decir

$$\vec{E}_r(\vec{r}) = E_{0r} \hat{y} e^{jk_1 z} \quad (4.33)$$

$$\vec{H}_r(\vec{r}) = -\frac{1}{\eta_1} \hat{z} \times \vec{E}_r(\vec{r}) = \frac{E_{0r}}{\eta_1} \hat{x} e^{jk_1 z} \quad (4.34)$$

Finalmente, suponiendo que la onda transmitida hacia la región II también conserva la polarización y se propaga en la misma dirección que la onda incidente, obtenemos

$$\vec{E}_t(\vec{r}) = E_{0t} \hat{y} e^{-jk_2 z} \quad (4.35)$$

$$\vec{H}_t(\vec{r}) = -\frac{E_{0t}}{\eta_2} \hat{x} e^{-jk_2 z} \quad (4.36)$$

donde  $\eta_2 \equiv \sqrt{\mu_2 / \epsilon_2}$  es la impedancia intrínseca y  $k_2 \equiv \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2}$  la constante de propagación del dieléctrico que forma la región II.

Apliquemos a continuación la condición de contorno (4.29) al campo eléctrico en la superficie de separación entre los dos medios (plano  $z = 0$  en la figura 4.12a). Al no haber campo eléctrico en la dirección del eje  $X$ , la única componente tangencial afectada por dicha condición es la componente en la dirección del eje  $Y$ , es decir

$$(E_{iy} + E_{ry})|_{z=0} = E_{ty}|_{z=0}$$

Sustituyendo las expresiones de los campos, (4.31), (4.33) y (4.35), obtenemos

$$E_{0i} e^{-jk_1 z}|_{z=0} + E_{0r} e^{jk_1 z}|_{z=0} = E_{0t} e^{-jk_2 z}|_{z=0}$$

de donde resulta la siguiente relación de amplitudes

$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} \quad (4.37)$$

<sup>16</sup> De no hacer esta suposición, la resolución del problema sería bastante más laboriosa, para llegar al final al mismo resultado.

En el caso de incidencia normal sobre un conductor perfecto, la relación obtenida era, simplemente,  $E_{0i} + E_{0r} = 0$  (o, lo que es lo mismo,  $E_{0r} = -E_{0i}$ ), con lo que el problema quedaba resuelto en este punto. Como consecuencia de la presencia de la onda transmitida, tenemos ahora una incógnita más, por lo que se hace necesario obtener una relación adicional para determinar las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida. Esta relación la obtendremos aplicando la condición (4.30) a la componente tangencial del campo magnético, es decir

$$(H_{ix} + H_{rx})|_{z=0} = H_{tx}|_{z=0}$$

y sustituyendo en ella las expresiones de los campos correspondientes, (4.32), (4.34) y (4.36), resulta

$$-\frac{E_{0i}}{\eta_1} + \frac{E_{0r}}{\eta_1} = -\frac{E_{0t}}{\eta_2} \quad (4.38)$$

La resolución del sistema de ecuaciones formado por (4.37) y (4.38) nos permite relacionar las amplitudes de las ondas generadas con la de la onda incidente. Estas relaciones suelen expresarse comúnmente de la forma

$$E_{0r} = \rho E_{0i} \quad (4.39)$$

$$E_{0t} = \tau E_{0i} \quad (4.40)$$

donde los símbolos  $\rho$  y  $\tau$  representan los llamados *coeficientes de reflexión y transmisión* en la superficie, los cuales se definen, respectivamente, como la relación de amplitudes entre la onda reflejada y la onda incidente, por un lado, y entre las ondas transmitida e incidente, por el otro. El uso de los estos coeficientes nos permite expresar las ecuaciones (4.37) y (4.38) de forma más compacta

$$1 + \rho = \tau \quad (4.41)$$

$$1 - \rho = \tau \frac{\eta_2}{\eta_1} \quad (4.42)$$

Resolviendo este sistema, obtenemos las siguientes expresiones genéricas para los coeficientes  $\rho$  y  $\tau$

$$\rho = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \quad (4.43)$$

$$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \quad (4.44)$$

Este es el resultado principal del problema planteado, según el cual la resolución de un problema de incidencia normal sobre medios dieléctricos de una onda plana, polarizada linealmente, se reduce al cálculo de los coeficientes de reflexión y transmisión en la

superficie, mediante las expresiones (4.43) y (4.44), en las que intervienen únicamente las impedancias intrínsecas de los medios involucrados. Estas expresiones pueden combinarse, además, con las relaciones (4.41) y (4.42), según convenga.

En el caso de medios no magnéticos, es más frecuente expresar los coeficientes de reflexión y transmisión en función de los llamados *índices de refracción* de los medios I y II. En general, se define el índice de refracción de un medio dieléctrico como la relación entre las velocidades de propagación de la luz en el espacio libre y en el medio en cuestión, es decir

$$n \equiv \frac{c}{v} = \frac{k}{k_0} \quad (4.45)$$

donde  $k$  y  $k_0$  representan, respectivamente, las constantes de propagación de la luz en el dieléctrico y en el espacio libre. Si el dieléctrico es, además un medio no magnético (*i. e.*,  $\mu = 1$ , lo cual, por otro lado, es bastante frecuente), se verifica

$$n = \sqrt{\epsilon_r} \quad (4.46)$$

lo que nos permite expresar la impedancia intrínseca  $\eta$  del medio de la forma

$$\eta = \frac{\eta_0}{n} \quad (4.47)$$

donde  $\eta_0 \equiv 120\pi \Omega$  corresponde a la del espacio libre. Según esta última relación, las expresiones (4.43) y (4.44) de los coeficientes de reflexión y transmisión para dieléctricos no magnéticos se reducen a

$$\rho = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad (4.48)$$

$$\tau = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \quad (4.49)$$

donde  $n_1$  y  $n_2$  son, respectivamente, los índices de reflexión en las regiones I y II.

### 4.3.2 Ondas parcialmente estacionarias

Una vez obtenidos los coeficientes de reflexión y transmisión, podemos comprobar que en la superficie de separación se cumple el balance de flujos de potencia que habíamos expresado mediante la relación (4.28), en la que el término de la onda reflejada daba lugar a una contribución negativa. Por este motivo, es más frecuente presentar este balance de la siguiente forma, mucho más intuitiva



$$R + T = 1 \quad (4.50)$$

donde  $R$  y  $T$  representan la *reflectividad* y la *transmitividad* en la superficie, las cuales se definen, respectivamente, como las fracciones de potencia reflejada y transmitida y se obtienen a partir de la relación entre los flujos de potencia en la dirección normal asociados a las ondas reflejada e incidente, por un lado, y entre los correspondientes a las ondas transmitida e incidente, por el otro. En el caso de incidencia normal, estas relaciones se obtienen a partir de los vectores de Poynting respectivos, es decir

$$R \equiv \frac{|\vec{P}_r|}{|\vec{P}_i|} = \frac{\frac{|E_{0r}|^2}{2\eta_1}}{\frac{|E_{0i}|^2}{2\eta_1}} = |\rho|^2 \quad T \equiv \frac{|\vec{P}_t|}{|\vec{P}_i|} = \frac{\frac{|E_{0t}|^2}{2\eta_2}}{\frac{|E_{0i}|^2}{2\eta_1}} = |\tau|^2 \frac{\eta_1}{\eta_2} \quad (4.51)-(4.52)$$

Luego, el balance de potencias anterior se cumple si se verifica la relación

$$|\rho|^2 + |\tau|^2 \frac{\eta_1}{\eta_2} = 1 \quad (4.53)$$

lo que podemos comprobar fácilmente, sustituyendo los coeficientes  $\rho$  y  $\tau$  por sus expresiones correspondientes, (4.43) y (4.44). Por otro lado, al ser  $R$  y  $T$ , por definición, cantidades positivas, se debe cumplir, además, la propiedad

$$0 \leq R, T \leq 1 \quad (4.54)$$

De lo contrario, se violaría el principio de conservación de la energía.

Podemos comprobar, también, de forma inmediata que, cuando existe adaptación de impedancias (es decir,  $\eta_2 = \eta_1$ ), se obtiene  $\rho = 0$  y  $\tau = 1$ , por lo que no habrá reflexión en la superficie y toda la potencia incidente será transmitida a la región II. Este resultado puede parecer de perogrullo, ya que se puede considerar que, de hecho, no hay cambio de medio alguno en ese caso. Sin embargo, el concepto de adaptación de impedancias, análogo al empleado en teoría de circuitos, es mucho más potente de lo que parece, tal como veremos en la sección 4.7.

La situación opuesta, en la que toda la potencia incidente se refleja y no se transmite potencia a la región II, es justamente la obtenida en el caso de incidencia sobre conductores perfectos. En este caso, la reflexión producida en la superficie daba lugar a la formación de una onda estacionaria en el dieléctrico de la región I. Si entendemos el fenómeno de la reflexión en conductores como un caso particular de incidencia en el que se cumple  $R = 1$  y

$T = 0$ <sup>17</sup>, nos podemos preguntar ahora si obtendremos un comportamiento similar en el caso general. Para responder a esta pregunta, debemos sumar de nuevo los campos eléctricos asociados a las ondas incidente y reflejada, para obtener la siguiente expresión fasorial para el campo total presente en la región I

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_{0i} e^{-jk_1 z} \hat{y} + \rho E_{0i} e^{jk_1 z} \hat{y}$$

Manipulándola convenientemente, obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= (1 + \rho) E_{0i} e^{-jk_1 z} \hat{y} + \rho E_{0i} (e^{jk_1 z} - e^{-jk_1 z}) \hat{y} = \\ &= \tau E_{0i} e^{-jk_1 z} \hat{y} + 2j\rho E_{0i} \hat{y} \sin k_1 z \end{aligned} \quad (4.55)$$

donde hemos hecho uso de la relación (4.41). El primer término de la expresión final corresponde a una onda plana que se desplaza en la dirección de la onda incidente, mientras que el segundo término es análogo al de la expresión (4.22), correspondiente a una onda estacionaria, resultante de la interferencia de la onda incidente con la onda reflejada. En el caso particular  $\rho \rightarrow -1$ ,  $\tau \rightarrow 0$ , ambas expresiones son idénticas. En el caso general, la presencia de la onda progresiva en la expresión (4.55) se debe a que ahora no toda la potencia se refleja. Por este motivo, una onda como la representada por dicha expresión recibe el nombre de *onda parcialmente estacionaria*.

Las ondas de este tipo se pueden caracterizar mediante la denominada *relación de onda estacionaria*  $S$ <sup>18</sup>, la cual se define como la relación entre los valores máximo y mínimo que toma el campo instantáneo en el medio de la región I, es decir

$$S = \frac{\mathcal{E}_{1max.}}{\mathcal{E}_{1min.}} \quad (4.56)$$

Teniendo en cuenta que una onda parcialmente estacionaria es el resultado de la superposición de una onda incidente y una onda reflejada, la amplitud del campo total será máxima en aquellos puntos en los que ambas ondas tengan la misma fase y mínima en los puntos en los que las ondas estén en contrafase, es decir

<sup>17</sup> Es interesante comprobar que en el caso límite  $\eta_2 \rightarrow 0$ , según las expresiones (4.43) y (4.44), se obtiene  $\rho \rightarrow -1$  y  $\tau \rightarrow 0$ . Desde este punto de vista, podemos considerar un conductor perfecto como un dieléctrico de impedancia nula. En este caso, utilizando la terminología de circuitos, podemos considerar que hemos “cortocircuitado” el dieléctrico de la región I colocando un conductor perfecto en su extremo.

<sup>18</sup> Se denomina también con las iniciales, ROE (o SWR, del inglés *standing wave ratio*).

$$S = \frac{(1+|\rho|)E_{0i}}{(1-|\rho|)E_{0i}} = \frac{1+|\rho|}{1-|\rho|} \quad (4.57)$$

En la figura 4.13 hemos representado la envolvente del campo para un valor de  $\rho > 0$ <sup>19</sup>. En este caso, la amplitud de oscilación del campo instantáneo alcanza los valores extremos

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\equiv \mathcal{E}_{\max} = 1+|\rho| & \text{si} & \quad z = m \frac{\lambda}{2} \\ \mathcal{E} &\equiv \mathcal{E}_{\min} = 1-|\rho| & \text{si} & \quad z = (2m+1) \frac{\lambda}{4} \end{aligned}$$

Si el medio de la región II fuera un conductor perfecto, tendríamos  $|\rho|=1$ , con lo que los mínimos de oscilación serían puntos de oscilación nula o nodos de la función, es decir, la onda sería una onda estacionaria pura, tal como vimos en la sección 4.2.2.

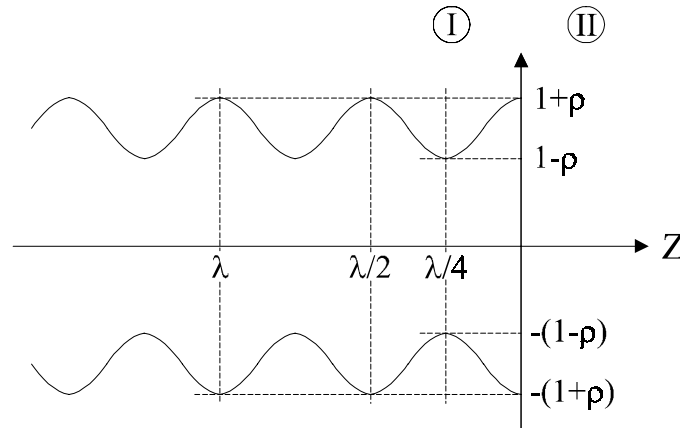


Fig. 4.13 Envolvente del campo instantáneo en una onda parcialmente estacionaria

<sup>19</sup> La envolvente del campo instantáneo representa la amplitud de la oscilación temporal del mismo. Para obtenerla basta hallar los valores extremos de la función del campo instantáneo normalizado (*i.e.* considerando  $E_{0i} = 1$  para la onda incidente). La función correspondiente al campo dado por la expresión (4.55) es de la forma  $f(z,t) = (1+\rho)\cos\omega t \cos k_1 z + (1-\rho)\sin\omega t \sin k_1 z$  cuyos valores extremos son  $f_{\text{ext}} = \pm(1+\rho^2 + 2\rho \cos 2k_1 z)^{1/2}$  los cuales se obtienen fácilmente a partir de la derivada temporal de  $f(z,t)$ .

## 4.4 Incidencia oblicua sobre conductores perfectos

### 4.4.1 Planteamiento del problema

Hasta ahora nos hemos limitado al estudio de la incidencia normal de ondas planas, tanto sobre conductores como sobre dieléctricos. El análisis de estos casos sencillos nos ha permitido profundizar en lo que podríamos llamar la “física del problema”. Por otro lado, podemos extrapolar sin dificultad muchas de las conclusiones obtenidas a casos más generales.

Abordemos, por ejemplo, el problema general de la incidencia de ondas planas sobre conductores perfectos, ahora con un ángulo cualquiera. Como ocurría en incidencia normal, debemos asumir la existencia de una onda reflejada, originada a partir de la interacción entre el campo de la onda incidente y los portadores de carga libre presentes en el conductor. Esta onda reflejada será la encargada de extraer la potencia electromagnética aportada por la onda incidente. Lógicamente, para que el balance energético sea nulo, las dos ondas deben tener la misma amplitud, resultado que ya habíamos obtenido para incidencia normal. De hecho, podemos adelantar que se cumplirán las tres propiedades observadas (conservación de la polarización y de la amplitud y desfase  $\Delta\phi = \pi$  entre las ondas incidente y reflejada) en este último caso.

¿Qué diferencia habrá, pues? En el caso de incidencia normal habíamos supuesto que la onda reflejada se propagaba en la misma dirección y en sentido opuesto al de la onda incidente, lo cual se ajustaba perfectamente a nuestra intuición, aunque no lo hubiéramos demostrado explícitamente. Sin embargo, el hecho de las expresiones obtenidas para el campo total cumplieran las condiciones de contorno era una demostración *a posteriori* de que habíamos dado con la solución del problema (según reza el teorema de unicidad de las soluciones de las ecuaciones de Maxwell). En el caso de incidencia oblicua podríamos efectuar el mismo razonamiento: suponer que las ondas incidente y reflejada tienen la misma dirección y sentido opuesto y verificar que se cumplan las condiciones de contorno en la superficie del conductor. El resultado sería, no obstante, negativo, por lo que no vamos a perder más tiempo en este asunto, ya que ello no nos llevaría a ninguna parte.

Por lo tanto, esta vez, partiremos de la hipótesis opuesta, es decir, supondremos que la onda reflejada se propaga en una dirección distinta de la de la onda incidente cuando ésta no incide normalmente sobre el conductor. El problema se hace ahora matemáticamente más complicado, por lo que vale la pena pensar un poco antes de empezar a resolverlo. La primera medida que se debe tomar consiste en fijar los ejes de coordenadas estratégicamente, con el fin de eliminar componentes en los vectores. Para ello, se define el *plano de incidencia* de la forma siguiente: supongamos que tenemos una onda plana polarizada linealmente que incide sobre un conductor plano, desviada un cierto ángulo  $\theta_i$  respecto a la dirección normal (Fig. 4.14a). Llamamos plano de incidencia al *plano formado por el vector de propagación de la onda incidente  $\vec{k}_i$  y el vector  $\hat{n}$ , normal a la superficie* (y dirigido

hacia el exterior del conductor, tal como habíamos convenido en la sección 4.2.1), mientras que  $\theta_i$  recibe el nombre de *ángulo de incidencia*. Por el hecho de contener el vector  $\hat{n}$ , *el plano de incidencia es perpendicular a la superficie del conductor*.

Una vez definido el plano de incidencia, podemos fijar los ejes de coordenadas manteniendo el criterio adoptado para incidencia normal, de manera que el eje  $Z$  sea perpendicular a la superficie del conductor y los ejes  $X$  e  $Y$  estén contenidos en ella. Como tenemos varias posibilidades para éstos últimos, lo más adecuado será imponer que uno de ellos, por ejemplo el eje  $Y$ , esté contenido además en el plano de incidencia, tal como indica la figura 4.14. De este modo, el vector de propagación  $\vec{k}_i$  sólo tendrá dos componentes no nulos,  $k_{iy}$  y  $k_{iz}$ . Luego, podemos expresar dicho vector, en función del ángulo de incidencia, de la forma

$$\vec{k}_i = k\hat{k}_i = k(\sin\theta_i \hat{y} + \cos\theta_i \hat{z}) \quad (4.58)$$

donde  $k$  es la constante de propagación de la onda en el dieléctrico.

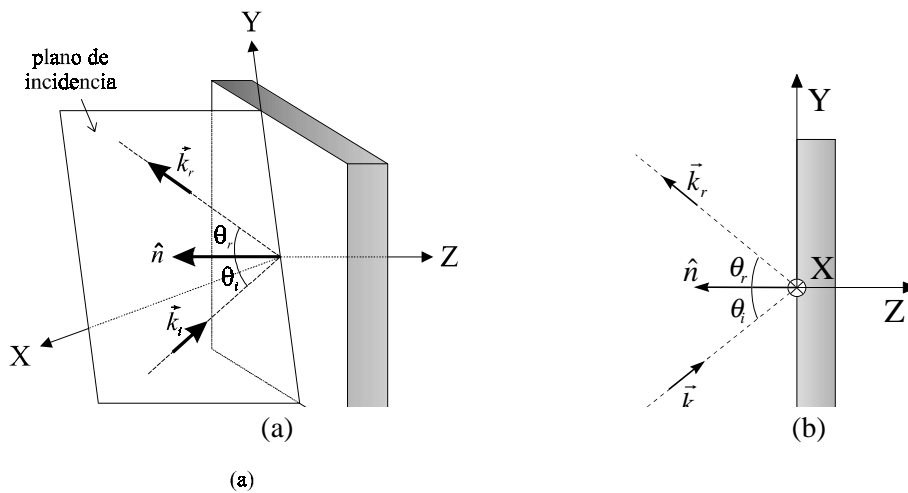


Fig. 4.14 (a) Los vectores  $\vec{k}_i$  y  $\hat{n}$  definen el plano de incidencia (plano YZ, según se han fijado los ejes en este caso). El vector de propagación  $\vec{k}_r$  está incluido también en el plano de incidencia. (b) Vista de perfil de la situación anterior, desde un punto situado sobre el eje  $X$ . El ángulo de reflexión se define de forma similar a la del ángulo de incidencia

Vamos a aceptar ahora que el vector de propagación  $\vec{k}_r$  de la onda reflejada está contenido también en el plano de incidencia<sup>20</sup>. Definiendo el *ángulo de reflexión*  $\theta_r$  como el *ángulo formado por el vector  $\vec{k}_r$  con la recta normal a la superficie* (Fig. 4.14b), podemos expresar dicho vector de la forma

$$\vec{k}_r = k\hat{k}_r = k(\sin\theta_r \hat{y} - \cos\theta_r \hat{z}) \quad (4.59)$$

En cuanto a los campos eléctricos asociados a las ondas incidente y reflejada, serán fasores del tipo

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \vec{E}_{0i} e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} = \vec{E}_{0i} e^{-jk(\sin\theta_i \hat{y} + \cos\theta_i \hat{z})} \quad (4.60)$$

$$\vec{E}_r(\vec{r}) = \vec{E}_{0r} e^{-j\vec{k}_r \cdot \vec{r}} = \vec{E}_{0r} e^{-jk(\sin\theta_r \hat{y} - \cos\theta_r \hat{z})} \quad (4.61)$$

### *Descomposición de la onda incidente en dos ondas polarizadas linealmente*

Como empieza a ser habitual, nuestro caballo de batalla será la aplicación de las condiciones de contorno para el campo total en la superficie de separación. Si consideramos que la onda incidente está polarizada en una dirección cualquiera, tendremos, a lo sumo, dos componentes del campo eléctrico tangenciales a la superficie, y lo mismo ocurrirá para la onda reflejada. Por consiguiente, podemos descomponer la condición (4.5) de la forma

$$(E_{ix} + E_{rx})|_{z=0} = 0 \quad (4.62)$$

$$(E_{iy} + E_{ry})|_{z=0} = 0 \quad (4.63)$$

En este punto, el concepto de plano de incidencia se nos revela de una gran utilidad, ya que nos permitirá la simplificación del proceso, mediante el siguiente procedimiento: descomponemos la onda incidente, cuya polarización, en el caso más general, será elíptica, en dos ondas planas con el campo eléctrico polarizado linealmente en direcciones ortogonales<sup>21</sup>, como se indica en la figura 4.15, de modo que en una de ellas el fasor de campo eléctrico es paralelo al plano de incidencia, mientras que en la otra es perpendicular a él, lo que podemos expresar matemáticamente de la forma siguiente:

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{i\parallel} + \vec{E}_{i\perp} \quad (4.64)$$

$$\vec{H}_i = \vec{H}_{i\parallel} + \vec{H}_{i\perp} \quad (4.65)$$

<sup>20</sup>La demostración de este supuesto la dejamos para más adelante.

<sup>21</sup> Ver sección 3.3.1.

donde los campos  $\vec{H}_{i\parallel}$  y  $\vec{H}_{i\perp}$  están relacionados, respectivamente, con  $\vec{E}_{i\parallel}$  y  $\vec{E}_{i\perp}$  por la condición  $\vec{H} = \frac{1}{\eta} \hat{k} \times \vec{E}$ .

De este modo, conseguimos reducir el problema general en dos casos más sencillos, esto es, el de una onda con el campo eléctrico polarizado linealmente según el plano de incidencia y el de una onda con el campo eléctrico polarizado perpendicularmente. Las expresiones que obtengamos en ambos casos para el campo total en el dieléctrico pueden ser utilizadas luego para ondas con una polarización cualquiera, por medio de las relaciones (4.64) y (4.65).

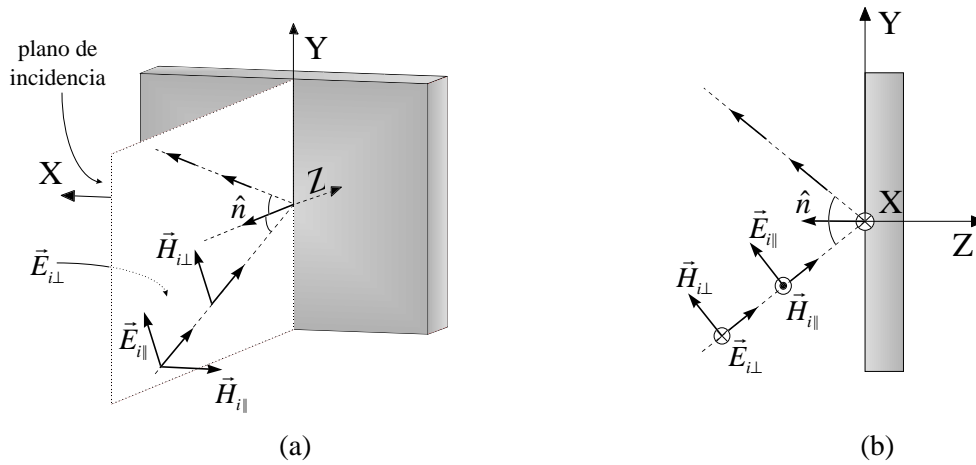


Fig. 4.15 (a) Descomposición de la onda incidente en dos ondas polarizadas linealmente. (b) Representación esquemática (de perfil) de la situación anterior

(a) Onda incidente con polarización lineal perpendicular al plano de incidencia

Según hemos fijado los ejes de coordenadas en la figura 4.15, la dirección perpendicular al plano de incidencia coincide con la del eje X. Luego, si imponemos que el campo eléctrico de la onda incidente esté polarizado linealmente según esta dirección, la componente en la dirección del eje Y debe anularse (*i.e.*,  $E_{iy} = 0$ ), con lo que, por fuerza, deberá ser también  $E_{ry} = 0$ , para que se verifique la condición (4.63). Por consiguiente, las expresiones vectoriales (4.60) y (4.61) se reducen a

$$\vec{E}_{i\perp}(\vec{r}) = E_{0i\perp} \hat{x} e^{-jk(\sin\theta_i y + \cos\theta_i z)} \quad (4.66)$$

$$\vec{E}_{r\perp}(\vec{r}) = E_{0r\perp} \hat{x} e^{-jk(\sin\theta_r y - \cos\theta_r z)} \quad (4.67)$$

Tal como ocurría en el caso de incidencia normal, el estado de polarización de la onda incidente se mantiene intacto tras la reflexión (Fig. 4.16). Por otro lado, sustituyendo (4.66) y (4.67) en (4.62), obtenemos

$$E_{0i\perp} e^{-jk(\sin\theta_i y + \cos\theta_i z)} \Big|_{z=0} + E_{0r\perp} e^{-jk(\sin\theta_r y - \cos\theta_r z)} \Big|_{z=0} = 0 \quad (4.68)$$

Es decir, se debe cumplir

$$E_{0i\perp} e^{-jk \sin\theta_i y} + E_{0r\perp} e^{-jk \sin\theta_r y} = 0 \quad (4.69)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{E_{0r\perp}}{E_{0i\perp}} = -e^{-jk(\sin\theta_i - \sin\theta_r)y} \quad (4.70)$$

para que la condición (4.62) se satisfaga.

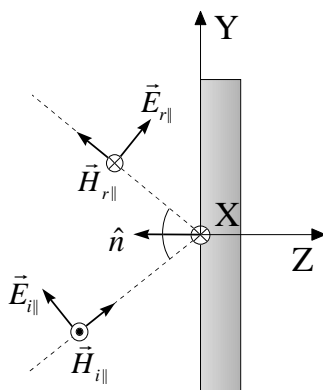


Fig. 4.16 Reflexión de una onda plana uniforme con el campo eléctrico polarizado linealmente en la dirección perpendicular al plano de incidencia. El estado de polarización se mantiene tras la reflexión en la superficie del conductor

Por tratarse de ondas planas y uniformes, los términos de amplitud  $E_{0i\perp}$  y  $E_{0r\perp}$  son constantes. Por lo tanto, si el término de la izquierda de la igualdad (4.70) es una constante, el término de la derecha también debe serlo. La única posibilidad de que ello ocurra es que sea  $\sin\theta_r = \sin\theta_i$  o, lo que es lo mismo,



$$\theta_r = \theta_i \quad (4.71)$$

(ya que  $0 \leq \theta_i, \theta_r \leq \pi/2$ ), para que desaparezca la dependencia en  $y$ . Tenemos, pues, como primera conclusión, que para que se verifique la condición de contorno (4.5) para las componentes tangenciales del campo eléctrico en la superficie del conductor, *el ángulo de reflexión debe ser igual al ángulo de incidencia*. En este caso, la relación (4.70) entre las amplitudes de las ondas incidente y reflejada se reduce a

$$\frac{E_{0r\perp}}{E_{0i\perp}} = -1 \quad (4.72)$$

que es la misma que habíamos obtenido en el caso de incidencia normal. Es decir, de nuevo obtenemos que la amplitud de la onda incidente debe conservarse tras la reflexión para que el campo total en el dieléctrico pueda satisfacer las condiciones de contorno justo en la superficie de separación con el conductor, mientras que aparece un desfase  $\Delta\varphi = \pi$  entre las ondas incidente y reflejada, representado por el signo “-” en la expresión (4.72). Según este resultado, el campo eléctrico de la onda reflejada queda de la forma

$$\vec{E}_{r\perp}(\vec{r}) = -E_{0i\perp} \hat{x} e^{-jk(\sin\theta_i y - \cos\theta_i z)} \quad (4.73)$$

Antes de proseguir, recordemos que hemos aceptado como supuesto la pertenencia a un mismo plano, perpendicular a la superficie del conductor y al que hemos convenido en llamar plano de incidencia, de las direcciones de propagación de las ondas incidente y reflejada. Podemos utilizar ahora un razonamiento similar al efectuado para obtener la relación (4.71) entre los ángulos de incidencia y de reflexión para comprobar que ello, efectivamente, es así.

Tomemos como punto de partida la hipótesis contraria, es decir, supongamos que el vector de propagación  $\vec{k}_r$  de la onda reflejada no está contenido en el plano de incidencia<sup>22</sup>. Tal como hemos fijado los ejes en la figura 4.14, dicho plano corresponde con el plano  $YZ$ , por lo que, en este caso, el vector  $\vec{k}_r$  deberá tener una componente no nula en la dirección del eje  $X$ , a la que llamaremos  $k_{rx}$ . Por consiguiente, deberemos reescribir la expresión (4.59) de la forma

$$\vec{k}_r = k_{rx} \hat{x} + k(\sin\theta_r \hat{y} - \cos\theta_r \hat{z})$$

sin que resulte alterada la expresión (4.58) para el vector  $\vec{k}_i$  de la onda incidente.

<sup>22</sup> Recordemos que, según hemos definido el plano de incidencia, el vector de propagación  $\vec{k}_i$  debe estar contenido forzosamente en él.

Nuestro objetivo consiste en demostrar que la componente  $k_{rx}$  debe anularse para que se verifiquen las condiciones de contorno en la superficie del conductor. Consideremos, por ejemplo, la condición (4.68) para una de las dos componentes tangenciales del campo eléctrico, de donde habíamos obtenido las relaciones (4.69) y (4.70). En este caso, deberíamos reescribirlas de la forma

$$\begin{aligned} E_{0i\perp} e^{-jk \sin \theta_i y} + E_{0r\perp} e^{-j(k_{rx}x + k \sin \theta_r y)} &= 0 \\ \frac{E_{0r\perp}}{E_{0i\perp}} &= -e^{jk_{rx}x} e^{-jk(\sin \theta_i - \sin \theta_r)y} \end{aligned}$$

Como ya hemos visto anteriormente, para que se cumpla esta última igualdad, el término de la derecha debe ser constante. Luego, además de la condición  $\theta_r = \theta_i$ , debe cumplirse

$$k_{rx} = 0$$

tal como queríamos demostrar.

(b) Onda incidente con polarización lineal paralela al plano de incidencia

Según la figura 4.17, en este caso el campo eléctrico de la onda incidente carece de la componente en la dirección del eje  $X$   $E_{ix} = 0$ . En cuanto a las otras dos componentes, se cumple

$$\vec{E}_{i\parallel}(\vec{r}) = E_{0i\parallel}(\cos \theta_i \hat{y} - \sin \theta_i \hat{z}) e^{-jk(\sin \theta_i y + \cos \theta_i z)} \quad (4.74)$$

De la condición (4.62) obtenemos que la onda reflejada tampoco tendrá componente en dicha dirección. Teniendo en cuenta que se debe cumplir, además,  $\vec{E}_{r\parallel} \perp \vec{k}_r$ , por tratarse de una onda plana, el campo eléctrico de la onda reflejada nos quedará como se indica en la figura. Matemáticamente, podemos expresarlo de la forma

$$\vec{E}_{r\parallel}(\vec{r}) = E_{0r\parallel}(\cos \theta_r \hat{y} + \sin \theta_r \hat{z}) e^{-jk(\sin \theta_r y - \cos \theta_r z)} \quad (4.75)$$

Luego, nos queda la componente en la dirección  $Y$  como única componente tangente a la superficie del conductor. Aplicando la condición de contorno correspondiente (4.63), obtenemos

$$E_{0i\parallel} \cos \theta_i e^{-jk \sin \theta_i y} + E_{0r\parallel} \cos \theta_r e^{-jk \sin \theta_r y} = 0$$

y de aquí,

$$\frac{E_{0r\parallel}}{E_{0i\parallel}} = -\frac{\cos \theta_i}{\cos \theta_r} e^{-jk(\sin \theta_i - \sin \theta_r)y}$$

Por consiguiente, de nuevo debe cumplirse

$$\theta_r = \theta_i \quad \frac{E_{0r\parallel}}{E_{0i\parallel}} = -1 \quad (4.76)$$

para satisfacer las condiciones de contorno, con lo que nos queda, para la onda reflejada

$$\vec{E}_{r\parallel}(\vec{r}) = -E_{0i\parallel}(\cos\theta_i \hat{y} + \sin\theta_i \hat{z}) e^{-jk(\sin\theta_i y - \cos\theta_i z)} \quad (4.77)$$

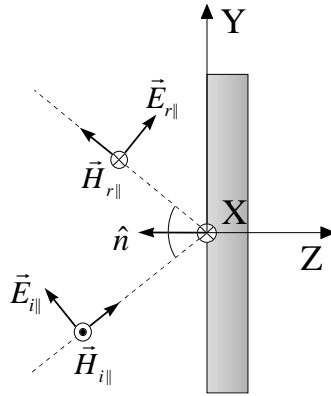


Fig. 4.17 Reflexión de una onda plana uniforme con el campo eléctrico polarizado linealmente en la dirección paralela al plano de incidencia. Como en el caso anterior, el estado de polarización se mantiene tras la reflexión en la superficie del conductor

#### 4.4.2 Ondas estacionarias mixtas

Tal como hicimos en el caso de incidencia normal, una vez obtenidas las expresiones generales para el campo eléctrico de la onda reflejada, podemos estudiar el comportamiento del campo total resultante de la superposición en el dieléctrico de las ondas incidente y reflejada. Recordemos que, en el caso de incidencia normal, el campo total presente en el dieléctrico tras la reflexión quedaba determinado por una función periódica que dependía únicamente de la distancia al conductor, función que habíamos convenido en llamar onda estacionaria, ya que no se producía propagación de señal ni transmisión de potencia alguna.

Por otro lado, podemos considerar el caso de incidencia normal como un caso particular de incidencia, en el que se cumple  $\theta_i = 0$ . En el caso general,  $\theta_i \neq 0$ , podemos

prever un comportamiento más complejo para el campo total presente en el dieléctrico. En concreto y tal como hemos fijado los ejes de coordenadas, nos aparecerá una doble dependencia, tanto de la coordenada  $Z$  como de la coordenada  $Y$ , para el campo total. Veamos a continuación cómo resulta ser esta dependencia en los dos casos estudiados en la sección 4.4.1:

(a) Onda incidente con polarización lineal perpendicular al plano de incidencia

Sumando las expresiones (4.66) y (4.73), correspondientes, respectivamente, a las ondas incidente y reflejada, obtenemos la siguiente expresión fasorial para el campo eléctrico total:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\perp}(\vec{r}) &= E_{0i\perp} \hat{x} e^{-jk \sin \theta_i y} (e^{-jk \cos \theta_i z} - e^{jk \cos \theta_i z}) = \\ &= -2jE_{0i\perp} \hat{x} \sin(k \cos \theta_i z) e^{-jk \sin \theta_i y}\end{aligned}\quad (4.78)$$

En cuanto al campo magnético, tenemos, para las ondas incidente y reflejada

$$\begin{aligned}\vec{H}_{i\perp}(\vec{r}) &= \frac{1}{\eta} \hat{k}_i \times \vec{E}_{i\perp} = \frac{1}{\eta} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \sin \theta_i & \cos \theta_i \\ E_{0i\perp} & 0 & 0 \end{vmatrix} e^{-jk_i \cdot \vec{r}} = \\ &= \frac{E_{0i\perp}}{\eta} (\cos \theta_i \hat{y} - \sin \theta_i \hat{z}) e^{-jk(\sin \theta_i y + \cos \theta_i z)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{H}_{r\perp}(\vec{r}) &= \frac{1}{\eta} \hat{k}_r \times \vec{E}_{r\perp} = \frac{1}{\eta} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \sin \theta_i & -\cos \theta_i \\ -E_{0i\perp} & 0 & 0 \end{vmatrix} e^{-jk_r \cdot \vec{r}} = \\ &= \frac{E_{0i\perp}}{\eta} (\cos \theta_i \hat{y} + \sin \theta_i \hat{z}) e^{-jk(\sin \theta_i y - \cos \theta_i z)}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\vec{H}_{\perp}(\vec{r}) &= \vec{H}_{i\perp}(\vec{r}) + \vec{H}_{r\perp}(\vec{r}) = \\ &= 2 \frac{E_{0i\perp}}{\eta} [\cos \theta_i \cos(k \cos \theta_i z) \hat{y} + j \sin \theta_i \sin(k \cos \theta_i z) \hat{z}] e^{-jk \sin \theta_i y}\end{aligned}\quad (4.79)$$

para la intensidad de campo magnético total.

## (b) Onda incidente con polarización lineal paralela al plano de incidencia

Para el campo eléctrico total obtenemos, sumando las expresiones (4.74) y (4.77), correspondientes a las ondas incidente y reflejada

$$\vec{E}_{\parallel}(\vec{r}) = -2E_{0i\parallel} [j \cos \theta_i \sin(k \cos \theta_i z) \hat{y} + j \sin \theta_i \cos(k \cos \theta_i z) \hat{z}] e^{-jk \sin \theta_i y} \quad (4.80)$$

Para el campo magnético, obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{H}_{i\parallel}(\vec{r}) &= \frac{1}{\eta} \hat{k}_i \times \vec{E}_{i\parallel} = -\frac{E_{0i\parallel}}{\eta} \hat{x} e^{-jk(\sin \theta_i y + \cos \theta_i z)} \\ \vec{H}_{r\parallel}(\vec{r}) &= \frac{1}{\eta} \hat{k}_r \times \vec{E}_{r\parallel} = -\frac{E_{0i\parallel}}{\eta} \hat{x} e^{-jk(\sin \theta_i y - \cos \theta_i z)} \\ \vec{H}_{\parallel}(\vec{r}) &= \vec{H}_{i\parallel}(\vec{r}) + \vec{H}_{r\parallel}(\vec{r}) = -2 \frac{E_{0i\parallel}}{\eta} \hat{x} \cos(k \cos \theta_i z) e^{-jk \sin \theta_i y} \end{aligned} \quad (4.81)$$

Es inmediato comprobar que en el caso particular  $\theta_i = 0$  recuperamos las expresiones obtenidas en la sección 4.2.1 para incidencia normal. Para valores de  $\theta_i \neq 0$ , el campo total en el dieléctrico presenta, como hemos dicho, una doble dependencia, en  $Y$  y en  $Z$ . Para analizar este comportamiento consideremos, por ejemplo, la expresión (4.78), que representa la función del campo eléctrico total en el caso de polarización perpendicular. Podemos identificar los términos  $k \sin \theta_i$  y  $k \cos \theta_i$  con las componentes en las direcciones  $\hat{y}$  y  $\hat{z}$ , respectivamente, del vector de propagación de la onda incidente, el cual, según (4.58), era de la forma

$$\vec{k}_i = k(\sin \theta_i \hat{y} + \cos \theta_i \hat{z})$$

Por consiguiente, podemos reescribir la expresión (4.78) como sigue

$$\vec{E}_{\perp}(\vec{r}) = -2jE_{0i\perp} \hat{x} \sin(k_{iz}z) e^{-jk_{iy}y} \quad (4.82)$$

donde  $k_{iy} \equiv k \sin \theta_i$  y  $k_{iz} \equiv k \cos \theta_i$ . Imponiendo, para simplificar, que el fasor de amplitud  $E_{0i\perp}$  sea una magnitud real (o, lo que es lo mismo, que la fase inicial de la onda incidente sea nula), el campo instantáneo resulta ser de la forma

$$\vec{\mathcal{E}}_{\perp}(\vec{r}, t) = -2E_{0i\perp} \hat{x} \sin(k_{iz}z) \sin(\omega t - k_{iy}y) \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{H}}_{\perp}(\vec{r}, t) = & 2\hat{y} \frac{E_{0i\perp}}{\eta} \cos\theta_i \cos(k_{iz}z) \cos(\omega t - k_{iy}y) \\ & + 2\hat{z} \frac{E_{0i\perp}}{\eta} \sin\theta_i \sin(k_{iz}z) \sin(\omega t - k_{iy}y)\end{aligned}\quad (4.84)$$

Según este resultado, si nos fijamos en un punto del eje  $Y$  y nos desplazamos a lo largo del eje  $Z$ , esto es, perpendicularmente a la superficie del conductor, el término  $\sin(\omega t - k_{iy}y)$  del campo eléctrico permanece constante, con lo que se obtiene un comportamiento análogo al de la onda estacionaria de la expresión (4.23). La única diferencia respecto a ésta última estriba en las posiciones  $z_m$  de los nodos de la función (Fig. 4.18), las cuales vienen dadas ahora por

$$k_{iz}z_m = m\pi \quad (4.85)$$

donde  $m$  representa el número de orden del nodo, con lo que la distancia entre dos nodos consecutivos vale

$$\Delta z = \frac{\pi}{k_{iz}} = \frac{\pi}{k \cos\theta_i} = \frac{\lambda}{2 \cos\theta_i} \quad (4.86)$$

es decir, aumenta con el ángulo de incidencia.

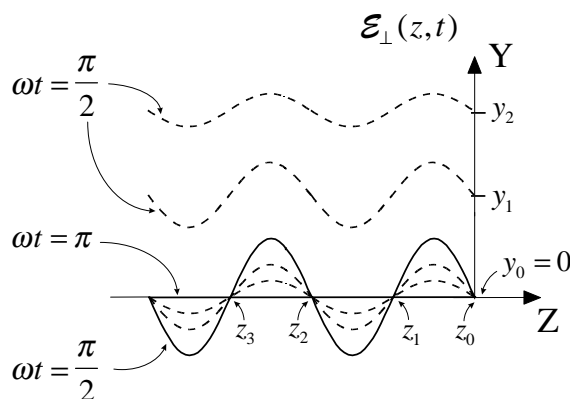


Fig. 4.18 Dependencia espacio-temporal de la función (4.83). Para un valor de  $y$  fijo, el comportamiento es análogo al obtenido en la figura 4.7 para una onda estacionaria pura

Por otro lado, si nos fijamos en un punto cualquiera del eje  $Z$  y nos desplazamos a lo largo del eje  $Y$  (esto es, paralelamente a la superficie del conductor y al plano de incidencia),

el término  $k_{iz}z$  de la expresión (4.83) permanece ahora constante, con lo que la función resultante corresponde a la de una onda plana cuya fase se propaga en esta misma dirección con una velocidad

$$v = \frac{\omega}{k_{iy}} = \frac{\omega}{k \sin \theta_i} \quad (4.87)$$

Finalmente, si nos fijamos en la expresión (4.84), obtenida para la función de intensidad de campo magnético instantáneo, observamos exactamente el mismo comportamiento en ambas componentes. Debido a este doble comportamiento, representado en la figura 4.18, de onda estacionaria en la dirección perpendicular al conductor y de onda viajera en la dirección paralela, las funciones de campo (4.83) y (4.84) reciben el nombre de *onda estacionaria mixta*.

Habida cuenta de las características que acabamos de observar para una onda estacionaria mixta, podemos prever que no habrá flujo neto de potencia alguno en la dirección perpendicular a la superficie del conductor y sí en la dirección paralela a la superficie y al plano de incidencia. Para comprobar que, efectivamente, ello es así, basta con obtener el vector de Poynting medio correspondiente. En el caso de polarización perpendicular, comparando las expresiones (4.78) y (4.79), vemos que la componente del campo magnético tangente a la superficie del conductor se encuentra en cuadratura de fase con el campo eléctrico, por lo que no contribuye al transporte de potencia, ya que el producto entre ambos da como resultado un término imaginario puro. Por el contrario, la componente normal del campo magnético se encuentra en fase con el campo eléctrico, y da lugar a una contribución real. La expresión resultante para el vector de Poynting medio es

$$\begin{aligned} \vec{P}_m &= \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \vec{E}_\perp \times \vec{H}_\perp^* \right] = \\ &= \frac{1}{2} \text{Re} \left[ -2jE_{0i\perp} \sin(k_{iz}z) e^{-jk_{iy}y} \hat{x} \times (-2j) \frac{(E_{0i\perp})^*}{\eta} \sin \theta_i \sin(k_{iz}z) e^{-jk_{iy}y} \hat{z} \right] = \\ &= 2 \frac{|E_{0i\perp}|^2}{\eta} \sin \theta_i \sin^2(k_{iz}z) \hat{y} \end{aligned} \quad (4.88)$$

donde esta vez hemos considerado también la posibilidad de una amplitud  $E_{0i}$  compleja.

Por otro lado, si observamos las expresiones (4.80) y (4.81), obtenidas para los campos eléctrico y magnético totales en el caso de polarización paralela, vemos que su comportamiento es totalmente análogo al obtenido en el caso de polarización perpendicular, pues se forma también una onda estacionaria mixta que se propaga a lo largo del plano de incidencia y de la superficie del conductor. La expresión que se obtiene en este caso para la densidad media de flujo de potencia es

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2} \text{Re} \left[ \vec{E}_{\parallel} \times \vec{H}_{\parallel}^* \right] = 2 \frac{|E_{0\parallel}|^2}{\eta} \sin \theta_i \cos^2(k_{iz}z) \hat{y} \quad (4.89)$$

Por consiguiente, existe una transmisión neta de potencia en la dirección de propagación de la onda. Podemos afirmar, pues, como conclusión, que el campo presente en un dieléctrico limitado por un conductor perfecto tras la reflexión de una onda plana permite la transmisión de señal en la dirección paralela a la superficie del conductor y al plano de incidencia.

### **Ejemplo 4.3:** *Guías de onda de paredes conductoras*

El fenómeno de formación de ondas estacionarias mixtas tras la incidencia oblicua de una onda plana sobre un conductor perfecto encuentra una aplicación práctica de gran transcendencia en las llamadas guías de onda de paredes conductoras, a cuyo estudio dedicaremos buena parte del capítulo siguiente. A grandes rasgos, podemos entender su funcionamiento mediante un razonamiento similar al efectuado en la sección 4.2.2 para ilustrar el comportamiento de una cavidad resonante.

Como en este último caso, imaginemos que disponemos dos paredes conductoras una frente a otra y separadas por una distancia  $d$ , tal como muestra la figura 4.19a. Supongamos que hemos excitado una onda plana en la región situada entre ambas, formada por un medio dieléctrico cualquiera, de modo que incida oblicuamente sobre una de ellas, por ejemplo, en la que aparece situada en el plano  $z = 0$  en la figura. Según hemos visto, la superposición de esta onda con la onda reflejada en la pared dará lugar a la formación de una onda estacionaria mixta. Por otro lado, y debido a la presencia de la segunda pared, situada en el plano  $z = -d$ , el campo total en el dieléctrico debe satisfacer la siguiente condición adicional:

$$\vec{E}_{tan} \Big|_{z=-d} = 0$$

Comparando las figuras 4.18 y 4.19a, resulta evidente que en régimen permanente sólo puede aparecer un campo estable si se cumple la condición

$$k_{iz} = m \frac{\pi}{d} \quad (4.90)$$

con  $m$  entero, necesaria para que uno de los nodos de la función del campo total esté situado justo en  $z = -d$  (Fig. 4.19b). Luego, con  $k_{iz} \equiv k \cos \theta_i$ , sólo podemos excitar en el interior de la guía, en régimen permanente, ondas planas con un ángulo



$$\cos \theta_i = m \frac{\pi}{kd}$$

De no cumplirse esta condición, las múltiples reflexiones producidas en ambas paredes dan lugar a interferencias destructivas. Únicamente cuando se cumple la condición anterior, las distintas reflexiones interfieren constructivamente, y se forma una onda estacionaria mixta estable, la cual se propaga a lo largo de la guía. Esta onda recibe el nombre de *modo de propagación* o *modo propio de la guía*. Por lo tanto, en una guía como la de la figura 4.19 sólo pueden excitarse tantos modos como valores posibles de  $m$  tengamos. La velocidad de fase con que se propagan estos modos viene dada por

$$v = \frac{\omega}{k_{iy}} = \frac{\omega}{k \sqrt{1 - \cos^2 \theta_i}} = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - \left(m \frac{\pi}{kd}\right)^2}} \quad (4.91)$$

Evidentemente, la velocidad  $v$  sólo puede tomar valores reales, por lo que debe cumplirse, además, la condición

$$k > m \frac{\pi}{d}$$

o, lo que es lo mismo,

$$m < \frac{kd}{\pi} = \frac{2d}{\lambda} \quad (4.92)$$

para que el modo en cuestión se propague por el interior de la guía. Es decir, en una guía formada por dos paredes conductoras sólo podemos excitar un cierto número de modos, limitado por la longitud de onda de la onda incidente y por la separación entre las paredes. Cada uno de estos modos se caracteriza por el valor de  $m$  correspondiente, denominado *número de orden* o, simplemente, *orden* del modo en cuestión. El valor tiene su reflejo en el número de nodos que presenta la función del campo a lo largo del plano transversal de la guía (Fig. 4.19b). Por otro lado, para cada valor de  $m$  tenemos dos tipos de excitación posibles: mediante ondas con polarización perpendicular al plano de incidencia y mediante ondas con polarización paralela. En el primer caso, según la expresión (4.78), se generan modos propios con el campo eléctrico paralelo al plano transversal de la guía, los cuales se denominan *modos transversales eléctricos*, o simplemente *modos TE*. En el segundo caso, se generan *modos transversales magnéticos* o *modos TM*, ya que, según las expresiones (4.80) y (4.81), el campo magnético es transversal, mientras que el campo eléctrico presenta una componente en la dirección longitudinal.

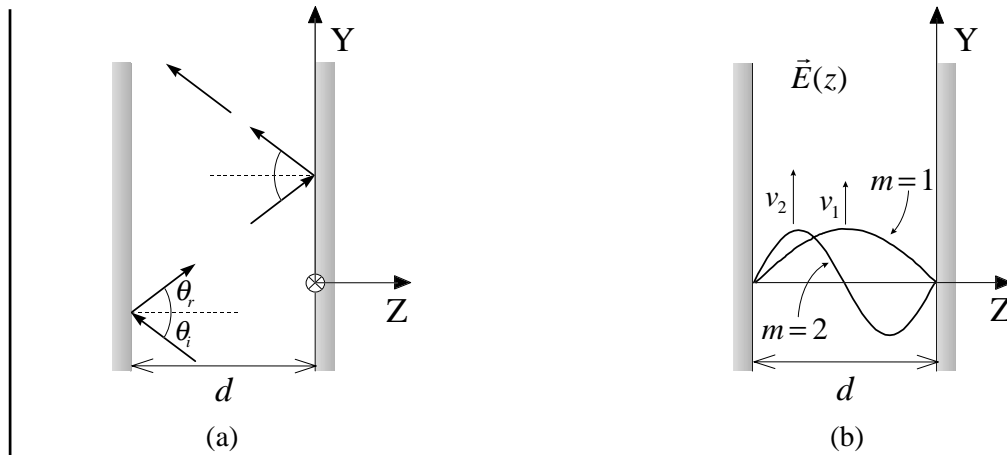


Fig. 4.19 (a) Guía de onda formada por dos paredes conductoras, separadas por un medio dieléctrico de grosor  $d$ . La reflexión de una onda plana en una de las paredes dará lugar a la formación de una onda plana mixta. (b) En régimen permanente sólo existirán ondas que cumplan las condiciones de contorno en ambas paredes, denominadas modos propios de la guía

#### Cargas y corrientes inducidas en la superficie del conductor

Según la expresión (4.78), cuando el campo eléctrico de la onda incidente presenta polarización perpendicular al plano de incidencia, el campo eléctrico total que se forma en el dieléctrico es tangente a la superficie del conductor. Por este motivo, no se induce carga alguna, al igual que ocurría en el caso de incidencia normal. Por el contrario, cuando la polarización del campo incidente es paralela al plano de incidencia, sí que se induce una distribución superficial de carga en el conductor, al presentar el campo eléctrico total una componente normal a la superficie del mismo. Aplicando la condición de contorno (4.6) a la expresión (4.80), obtenemos el siguiente fasor de densidad de carga inducida

$$\sigma = (-\hat{z}) \cdot (\epsilon \vec{E}) \Big|_{z=0} = 2\epsilon E_{0i\parallel} \sin \theta_i e^{-jk_{iy}y} \quad (4.93)$$

En cuanto a la corriente inducida, obtenemos, aplicando la condición de contorno (4.8)

$$\vec{J}_s = (-\hat{z}) \times \vec{H}_{\perp} \Big|_{z=0} = 2 \frac{E_{0i\perp}}{\eta} \hat{x} \cos \theta_i e^{-jk_{iy}y} \quad (4.94)$$

para el caso de incidencia con polarización perpendicular y

$$\vec{J}_S = (-\hat{z}) \times \vec{H}_{\parallel} \Big|_{z=0} = 2 \frac{E_{0i\parallel}}{\eta} \hat{y} e^{-jk_{iy}y} \quad (4.95)$$

para el caso de incidencia con polarización paralela.

#### 4.5 Incidencia oblicua sobre dieléctricos

El estudio de casos de incidencia sencillos, tanto sobre medios dieléctricos como sobre conductores, nos ha permitido ofrecer con cierto detalle una visión de los fenómenos físicos involucrados. Ahora podemos abordar el problema general de la incidencia sobre medios dieléctricos de forma sistemática, partiendo de la base de que los fenómenos que aparezcan serán básicamente los mismos que los observados en el caso de incidencia normal, sin que dependan en esencia de la dirección de la onda incidente. Las consideraciones de partida serán, pues, las siguientes:

- Los medios dieléctricos son lineales, isótropos, homogéneos y no conductores.
- No hay aportación externa de cargas libres, con lo que sólo pueden aparecer distribuciones de carga y de corriente de portadores ligados al medio.
- Como resultado de la interacción entre la onda plana incidente y las cargas ligadas al medio de la región II, se formará una onda reflejada, dirigida hacia la región I, y una onda transmitida, dirigida hacia el interior de la región II (Fig. 4.20).

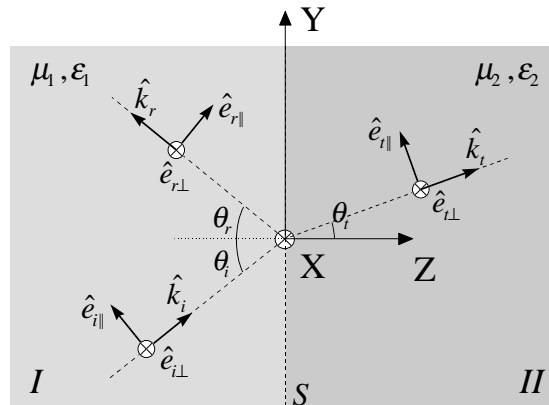


Fig. 4.20 Incidencia oblicua de una onda plana sobre un medio dieléctrico no conductor

Por consiguiente, las condiciones de contorno que deben satisfacerse en la superficie de separación serán las mismas que utilizamos en la sección 4.3.1 para tratar la incidencia normal, es decir

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \Big|_S = 0 \quad (4.96)$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \Big|_S = 0 \quad (4.97)$$

Por otro lado, el procedimiento que seguiremos será el mismo que el realizado para el caso de incidencia oblicua sobre conductores: en primer lugar, vamos a determinar las leyes que fijan las direcciones de propagación de las ondas generadas, para luego determinar los campos asociados a las mismas, descomponiendo la onda incidente, polarizada elípticamente en el caso general, en dos ondas polarizadas linealmente en direcciones ortogonales.

#### 4.5.1 Leyes de Snell para la reflexión y la refracción de ondas planas

Recordemos que habíamos podido comprobar, en el caso de incidencia oblicua sobre conductores, que para que se cumplieran las condiciones de contorno en la superficie del conductor las direcciones de propagación de las ondas incidente y reflejada debían estar contenidas necesariamente en un mismo plano, perpendicular a la superficie, al que habíamos convenido en llamar plano de incidencia. Esta propiedad, conocida como *primera ley de Snell*, en honor a su descubridor, se cumple independientemente de si el medio que constituye la región II es un conductor o un dieléctrico. En el caso de incidencia sobre medios dieléctricos, además, es fácil demostrar que se verifica también para la onda transmitida, ejercicio que dejamos para el lector.

Bajo este supuesto, si fijamos los ejes de coordenadas como se indica en la figura 4.20, de forma que el plano de incidencia coincida con el plano YZ, y definimos los *ángulos de incidencia, de reflexión y de transmisión*  $\theta_i$ ,  $\theta_r$  y  $\theta_t$ , respectivamente, como los ángulos que forman los vectores de propagación  $\vec{k}_i$ ,  $\vec{k}_r$  y  $\vec{k}_t$ , de las ondas incidente reflejada y transmitida con la normal a la superficie de separación entre los dos dieléctricos, podemos expresar matemáticamente los campos eléctricos asociados de la forma

$$\begin{aligned} \vec{E}_i(\vec{r}) &= \vec{E}_{0i} e^{-jk_1(\sin\theta_i y + \cos\theta_i z)} \\ \vec{E}_r(\vec{r}) &= \vec{E}_{0r} e^{-jk_1(\sin\theta_r y - \cos\theta_r z)} \\ \vec{E}_t(\vec{r}) &= \vec{E}_{0t} e^{-jk_2(\sin\theta_t y + \cos\theta_t z)} \end{aligned}$$

La onda transmitida se denomina también onda *refractada*. (Se entiende por refracción el paso de una onda electromagnética de un medio dieléctrico a otro).

Por otro lado, al coincidir la superficie de separación con el plano  $Z=0$  (Fig. 4.20), podemos descomponer la condición de contorno (4.96) como sigue:

$$(E_{ix} + E_{rx})|_{z=0} = E_{tx}|_{z=0} \quad (4.98)$$

$$(E_{iy} + E_{ry})|_{z=0} = E_{ty}|_{z=0} \quad (4.99)$$

Expresando los fasores de amplitud de la forma  $\vec{E}_{0i} = E_{0ix}\hat{x} + E_{0iy}\hat{y} + E_{0iz}\hat{z}$  para la onda incidente, y similarmente para las ondas reflejada y transmitida, y aplicando la condición (4.98) para la componente en la dirección del eje  $X$ , obtenemos la expresión

$$E_{0ix}e^{-jk_1 \sin \theta_i y} + E_{0rx}e^{-jk_1 \sin \theta_r y} = E_{0tx}e^{-jk_2 \sin \theta_t y}$$

similar a (4.68), con la diferencia que ahora aparece, además, el término correspondiente a la onda transmitida. Despejando  $E_{0ix}$ , obtenemos

$$E_{0ix} = -E_{0rx}e^{-jk_1(\sin \theta_r - \sin \theta_i)y} + E_{0tx}e^{-j(k_2 \sin \theta_t - k_1 \sin \theta_i)y} \quad (4.100)$$

Al ser  $E_{0ix}$  un término de fase constante, por fuerza el término de la derecha de la igualdad deber serlo también, por lo que se debe cumplir

$$\theta_r = \theta_i \quad (4.101)$$

$$k_1 \sin \theta_i = k_2 \sin \theta_t \quad (4.102)$$

La relación (4.101), conocida como la *segunda ley de Snell*, ya había sido obtenida para incidencia sobre conductores. En cuanto a la *tercera ley de Snell*, suele escribirse más a menudo de la forma

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (4.103)$$

donde  $n_1$  y  $n_2$  representan los índices de refracción de los dieléctricos que constituyen las regiones I y II, respectivamente, los cuales se definen mediante la relación (4.45).

#### 4.5.2 Ecuaciones de Fresnel

En conjunto, las tres leyes de Snell determinan completamente las direcciones de propagación de las ondas reflejada y transmitida, en función de la de la onda incidente. Una vez obtenidas estas direcciones, el siguiente paso que se debe realizar consiste en hallar unas expresiones generales que relacionen entre sí los campos respectivos. Estas expresiones son conocidas comúnmente como *ecuaciones de Fresnel*. Para ello, vamos a descomponer la

onda incidente, que en el caso más general tendrá polarización elíptica, en dos ondas con el campo eléctrico polarizado linealmente, según las direcciones paralela y perpendicular al plano de incidencia, utilizando para ello la notación empleada para el caso de incidencia sobre conductores. Para el campo eléctrico, tendremos

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{i\parallel} + \vec{E}_{i\perp} \quad (4.104)$$

y, para el campo magnético,

$$\vec{H}_i = \vec{H}_{i\parallel} + \vec{H}_{i\perp} \quad (4.105)$$

(a) *Onda incidente con polarización lineal perpendicular al plano de incidencia*

Empecemos por la onda polarizada linealmente en la dirección perpendicular al plano de la incidencia. Tal como se han fijado los ejes en la figura 4.20, esta dirección coincide con la del eje X, por lo que podemos expresar el fasor de campo eléctrico asociado a la onda de la forma

$$\vec{E}_{i\perp}(\vec{r}) = E_{0i\perp} \hat{x} e^{-jk_1(\sin\theta_i y + \cos\theta_i z)}$$

Los campos asociados a las ondas reflejada y transmitida, asumiendo que mantienen la misma polarización, serán de la forma

$$\vec{E}_{r\perp}(\vec{r}) = E_{0r\perp} \hat{x} e^{-jk_1(\sin\theta_r y - \cos\theta_r z)}$$

$$\vec{E}_{t\perp}(\vec{r}) = E_{0t\perp} \hat{x} e^{-jk_2(\sin\theta_t y + \cos\theta_t z)}$$

Teniendo en cuenta la equivalencia  $E_{0ix} \equiv E_{0i\perp}$ ,  $E_{0rx} \equiv E_{0r\perp}$  y  $E_{0tx} \equiv E_{0t\perp}$ , junto con la segunda y la tercera leyes de Snell, (4.101) y (4.102), la relación (4.100) nos queda de la forma

$$E_{0i\perp} + E_{0r\perp} = E_{0t\perp} \quad (4.106)$$

En el caso de incidencia sobre conductores, teníamos  $E_{0t} = 0$ , con lo que esta relación bastaba para determinar la amplitud de la onda reflejada. En el caso de incidencia sobre dieléctricos, la presencia de la onda transmitida nos obliga a hallar una relación adicional, que obtendremos a partir de la condición de contorno (4.97) para las componentes tangenciales del campo magnético, la cual se descompone de la forma

$$(H_{ix} + H_{rx})\Big|_{z=0} = H_{tx}\Big|_{z=0} \quad (4.107)$$

$$(H_{iy} + H_{ry})\Big|_{z=0} = H_{ty}\Big|_{z=0} \quad (4.108)$$

Las expresiones genéricas del campo magnético asociado a cada una de las ondas involucradas se obtienen mediante la relación habitual,  $\vec{H} = \eta^{-1} \hat{k} \times \vec{E}$ , lo que nos da

$$\begin{aligned}\vec{H}_{i\perp}(\vec{r}) &= \frac{E_{0i\perp}}{\eta_1} (\cos\theta_i \hat{y} - \sin\theta_i \hat{z}) e^{-jk_1(\sin\theta_i y + \cos\theta_i z)} \\ \vec{H}_{r\perp}(\vec{r}) &= -\frac{E_{0r\perp}}{\eta_1} (\cos\theta_r \hat{y} + \sin\theta_r \hat{z}) e^{-jk_1(\sin\theta_r y - \cos\theta_r z)} \\ \vec{H}_{t\perp}(\vec{r}) &= \frac{E_{0t\perp}}{\eta_2} (\cos\theta_t \hat{y} - \sin\theta_t \hat{z}) e^{-jk_2(\sin\theta_t y + \cos\theta_t z)}\end{aligned}$$

En este caso, el campo magnético está contenido en el plano de incidencia (Fig. 4.21), y la componente tangencial a la superficie de separación es la componente en la dirección del eje  $Y$ . Imponiendo la condición (4.108) a dicha componente, obtenemos la relación que nos faltaba

$$\frac{E_{0i\perp}}{\eta_1} \cos\theta_i e^{-jk_1 \sin\theta_i y} - \frac{E_{0r\perp}}{\eta_1} \cos\theta_r e^{-jk_1 \sin\theta_r y} = \frac{E_{0t\perp}}{\eta_2} \cos\theta_t e^{-jk_2 \sin\theta_t y}$$

en la que podemos eliminar los términos exponenciales, de acuerdo con la segunda y la tercera leyes de Snell, con lo que nos queda

$$\frac{E_{0i\perp} - E_{0r\perp}}{\eta_1} \cos\theta_i = \frac{E_{0t\perp}}{\eta_2} \cos\theta_t \quad (4.109)$$

Finalmente, resolviendo el sistema de ecuaciones formado por (4.106) y (4.109), obtenemos las expresiones generales que nos relacionan las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida con la de la onda incidente:

$$E_{0r\perp} = \frac{\eta_2 \cos\theta_i - \eta_1 \cos\theta_t}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t} E_{0i\perp} \quad (4.110)$$

$$E_{0t\perp} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t} E_{0i\perp} \quad (4.111)$$

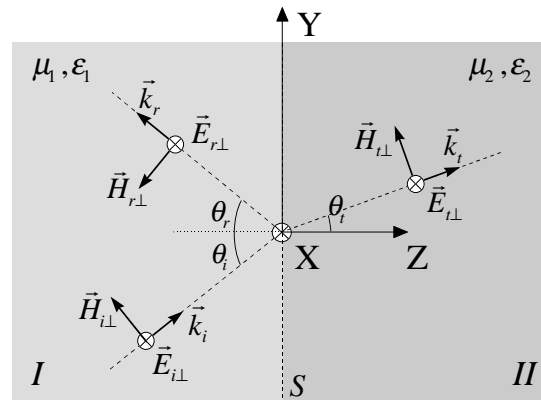


Fig. 4.21 Disposición de los campos asociados a las ondas incidente, reflejada y transmitida. Al ser, en este caso, el campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia (plano YZ), el campo magnético es paralelo a él. Las componentes del campo tangenciales a la superficie de separación entre los dos dieléctricos son la componente X para el campo eléctrico y la componente Y para el campo magnético

(b) Onda incidente con polarización lineal paralela al plano de incidencia

Es ahora el turno de la onda polarizada linealmente en la dirección paralela al plano de la incidencia. Tal como muestra la figura 4.22, en este caso podemos expresar el campo eléctrico asociado a las ondas incidente, reflejada y transmitida de la forma

$$\begin{aligned}\vec{E}_{i\parallel}(\vec{r}) &= E_{0i\parallel}(\cos\theta_i \hat{y} - \sin\theta_i \hat{z}) e^{-jk_1(\sin\theta_i y + \cos\theta_i z)} \\ \vec{E}_{r\parallel}(\vec{r}) &= E_{0r\parallel}(\cos\theta_r \hat{y} + \sin\theta_r \hat{z}) e^{-jk_1(\sin\theta_r y - \cos\theta_r z)} \\ \vec{E}_{t\parallel}(\vec{r}) &= E_{0t\parallel}(\cos\theta_t \hat{y} - \sin\theta_t \hat{z}) e^{-jk_2(\sin\theta_t y + \cos\theta_t z)}\end{aligned}$$

mientras que el campo magnético será ahora perpendicular al plano de incidencia:

$$\begin{aligned}\vec{H}_{i\parallel}(\vec{r}) &= \frac{1}{\eta_1} \hat{k}_i \times \vec{E}_{i\parallel} = -\frac{E_{0i\parallel}}{\eta_1} \hat{x} e^{-jk_1(\sin\theta_i y + \cos\theta_i z)} \\ \vec{H}_{r\parallel}(\vec{r}) &= \frac{1}{\eta_1} \hat{k}_r \times \vec{E}_{r\parallel} = \frac{E_{0r\parallel}}{\eta_1} \hat{x} e^{-jk_1(\sin\theta_r y - \cos\theta_r z)} \\ \vec{H}_{t\parallel}(\vec{r}) &= \frac{1}{\eta_2} \hat{k}_t \times \vec{E}_{t\parallel} = -\frac{E_{0t\parallel}}{\eta_2} \hat{x} e^{-jk_2(\sin\theta_t y + \cos\theta_t z)}\end{aligned}$$



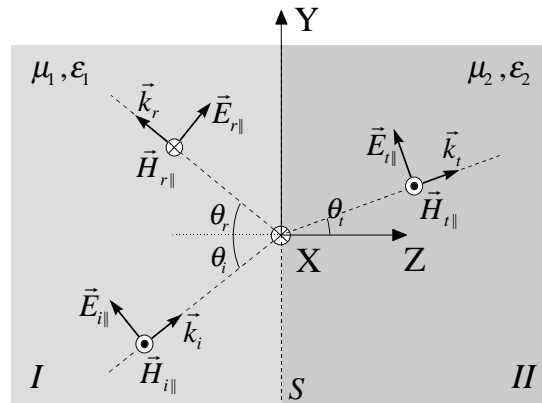


Fig. 4.22 Disposición de los campos asociados a las ondas incidente, reflejada y transmitida para el caso de polarización paralela. La situación resultante es justo la complementaria de la obtenida para polarización perpendicular, con el campo eléctrico paralelo al plano de incidencia (plano YZ) y el campo magnético perpendicular a él

Comparando las figuras 4.21 y 4.22, podemos comprobar que nos encontramos ante dos situaciones complementarias, de modo que combinándolas, podremos obtener todas las componentes del campo electromagnético. Por otro lado, las componentes del campo tangenciales a la superficie de separación entre los dos medios son ahora la componente según el eje Y, para el campo eléctrico, y la componente según el eje X, para el campo magnético. Aplicando las condiciones de contorno correspondientes, (4.99) y (4.107), obtenemos las dos relaciones siguientes

$$E_{0i||} \cos \theta_i e^{-jk_1 \sin \theta_i y} + E_{0r||} \cos \theta_r e^{-jk_1 \sin \theta_r y} = E_{0t||} \cos \theta_t e^{-jk_2 \sin \theta_t y}$$

$$-\frac{E_{0i||}}{\eta_1} e^{-jk_1 \sin \theta_i y} + \frac{E_{0r||}}{\eta_1} e^{-jk_1 \sin \theta_r y} = -\frac{E_{0t||}}{\eta_2} e^{-jk_2 \sin \theta_t y}$$

en las que la segunda y la tercera leyes de Snell, una vez más, nos permiten eliminar los términos exponenciales, resultando el siguiente sistema de ecuaciones

$$(E_{0i||} + E_{0r||}) \cos \theta_i = E_{0t||} \cos \theta_t \quad (4.112)$$

$$\frac{E_{0i||} - E_{0r||}}{\eta_1} = \frac{E_{0t||}}{\eta_2} \quad (4.113)$$

cuyas soluciones generales son

$$E_{0r\parallel} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} E_{0i\parallel} \quad (4.114)$$

$$E_{0t\parallel} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} E_{0i\parallel} \quad (4.115)$$

(c) Onda incidente con una polarización cualquiera

Las relaciones (4.110), (4.111), (4.114) y (4.115), expresan matemáticamente las denominadas *leyes de Fresnel de la reflexión y la refracción*, las cuales nos permiten determinar la distribución de campo que resulta de la incidencia de una onda plana sobre un medio dieléctrico con un ángulo cualquiera. Sin embargo, resulta más práctico expresarlas de la forma siguiente

$$E_{0r\perp} = \rho_{\perp} E_{0i\perp} \quad (4.116a) \quad E_{0r\parallel} = \rho_{\parallel} E_{0i\parallel} \quad (4.117a)$$

$$E_{0t\perp} = \tau_{\perp} E_{0i\perp} \quad (4.116b) \quad E_{0t\parallel} = \tau_{\parallel} E_{0i\parallel} \quad (4.117b)$$

donde  $\rho_{\perp}$  y  $\rho_{\parallel}$  son, respectivamente, los coeficientes de reflexión para ondas planas con polarización lineal perpendicular al plano de incidencia y para ondas con polarización paralela. Al igual que en el caso de incidencia normal, se han definido como la relación de amplitudes entre la onda reflejada y la onda incidente.  $\tau_{\perp}$  y  $\tau_{\parallel}$  representan, a su vez, los coeficientes de transmisión para ondas con polarización perpendicular y con polarización paralela al plano de incidencia y se definen como la relación de amplitudes entre las ondas transmitida e incidente. Las *fórmulas de Fresnel* para los coeficientes de reflexión y transmisión son las siguientes

$$\rho_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \quad (4.118a) \quad \rho_{\parallel} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} \quad (4.119a)$$

$$\tau_{\perp} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \quad (4.118b) \quad \tau_{\parallel} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} \quad (4.119b)$$

donde los ángulos de incidencia y de reflexión,  $\theta_i$  y  $\theta_r$ , están relacionados entre sí por la tercera ley de Snell (4.102).

En el caso más general, en el que la onda incidente esté polarizada elípticamente, basta con efectuar la descomposición (4.104) para el campo eléctrico asociado, es decir

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{i\parallel} + \vec{E}_{i\perp} = (E_{0i\parallel} \hat{e}_{i\parallel} + E_{0i\perp} \hat{e}_{i\perp}) e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \quad (4.120)$$

donde  $\hat{e}_{i\parallel}$  y  $\hat{e}_{i\perp}$  se han definido como dos vectores unitarios, dirigidos, respectivamente, según las direcciones paralela y perpendicular al plano de incidencia (Fig. 4.23). Semejantemente, podemos descomponer las ondas reflejada y transmitida de la forma

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{r\parallel} + \vec{E}_{r\perp} = (\rho_{\parallel} E_{0i\parallel} \hat{e}_{r\parallel} + \rho_{\perp} E_{0i\perp} \hat{e}_{r\perp}) e^{-j\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \quad (4.121)$$

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{t\parallel} + \vec{E}_{t\perp} = (\tau_{\parallel} E_{0i\parallel} \hat{e}_{t\parallel} + \tau_{\perp} E_{0i\perp} \hat{e}_{t\perp}) e^{-j\vec{k}_t \cdot \vec{r}} \quad (4.122)$$

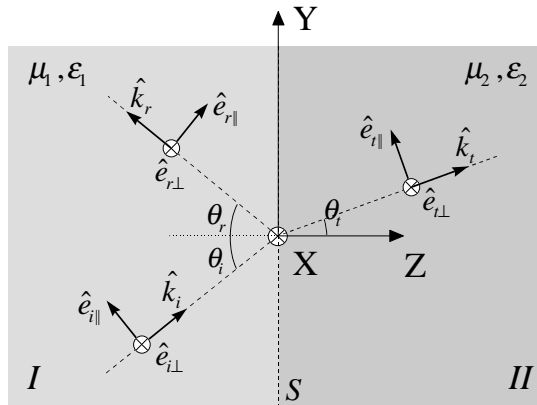


Fig. 4.23 Descomposición de los campos asociados a las ondas incidente, reflejada y transmitida para el caso general en el que la onda incidente esté polarizada elípticamente

Por consiguiente, la resolución de un problema de incidencia sobre medios dieléctricos, en el caso más general, se limita al cálculo, mediante las leyes de Fresnel, de los valores de los coeficientes de reflexión y transmisión de la superficie de separación, según el ángulo de incidencia que corresponda. Una vez conocidos estos valores, las relaciones (4.121) y (4.122) nos permiten calcular el campo eléctrico que resulta de la incidencia de una onda plana, independientemente de cuál sea su estado de polarización. Para el cálculo del campo magnético, basta con hacer uso de la relación  $\vec{H} = \eta^{-1} \hat{k} \times \vec{E}$  para cada onda.

Cabe señalar, además, que el cálculo de los coeficientes  $\rho$  y  $\tau$  se puede simplificar si se emplean las siguientes relaciones adicionales:

$$1 + \rho_{\perp} = \tau_{\perp} \quad (4.123)$$

$$1 - \rho_{\parallel} = \frac{\eta_1}{\eta_2} \tau_{\parallel} \quad (4.124)$$

obtenidas sustituyendo (4.116) en (4.106) y (4.117) en (4.113). Podemos combinar estas relaciones con las fórmulas (4.118) y (4.119) para calcular los coeficientes de transmisión, una vez conocidos los coeficientes de reflexión, y viceversa.

Finalmente, podemos comprobar que el caso de incidencia normal no es más que un caso especial de incidencia, en el que se cumple  $\theta_i = \theta_t = 0$ . En este caso, las expresiones de los coeficientes que resultan para ambas situaciones de incidencia, esto es, con polarización paralela y con polarización perpendicular al plano de incidencia, coinciden entre sí y con las obtenidas en la sección 4.3.1<sup>23</sup>.

#### *Ecuaciones de Fresnel para medios no magnéticos*

Como ya vimos en el caso de incidencia normal, en los dieléctricos no magnéticos los coeficientes de reflexión y de transmisión se suelen expresar en función de los índices de refracción. Mediante la sustitución  $\eta_{1,2} \rightarrow \frac{\eta_0}{n_{1,2}}$ , las leyes de Fresnel (4.118) y (4.119) toman la siguiente forma particular para medios no magnéticos

$$\rho_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad (4.125a) \quad \rho_{\parallel} = \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} \quad (4.126a)$$

$$\tau_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad (4.125b) \quad \tau_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} \quad (4.126b)$$

#### *Reflectividad y transmitividad en la superficie de un medio dieléctrico*

En la sección 4.3.2 habíamos definido la reflectividad  $R$  y la transmitividad  $T$  en la superficie de un medio dieléctrico como las fracciones de potencia reflejada y transmitida por la superficie al incidir una onda plana. La fracción de potencia reflejada correspondía, en el caso de incidencia normal, a la relación entre los vectores de Poynting asociados a las ondas reflejada e incidente (ecuación (4.51)), los cuales expresaban los flujos de potencia por unidad de superficie respectivos, en la dirección normal a la superficie. En el caso de incidencia oblicua, el flujo de potencia en la dirección normal (la del eje  $Z$ , según hemos fijado los ejes de coordenadas) viene dado por la componente en esta dirección del vector de Poynting, con lo que tenemos

<sup>23</sup> La coincidencia que se establece entre las expresiones (4.118) y (4.119) en el caso de incidencia normal se debe a la situación de elevada simetría que se produce, bajo la cual los comportamientos de las ondas polarizadas en una dirección u otra son indistinguibles.

$$R \equiv \frac{|P_{rz}|}{|P_{iz}|} = \frac{\frac{|E_{0r}|^2}{2\eta_1} \cos \theta_i}{\frac{|E_{0i}|^2}{2\eta_1} \cos \theta_i} = |\rho|^2 \quad (4.127)$$

para la fracción de potencia reflejada. Similarmente, en el caso de incidencia oblicua, la transmitividad o fracción de potencia transmitida viene dada por

$$T \equiv \frac{|P_{tz}|}{|P_{iz}|} = \frac{\frac{|E_{0t}|^2}{2\eta_2} \cos \theta_t}{\frac{|E_{0i}|^2}{2\eta_1} \cos \theta_i} = |\tau|^2 \frac{\eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i} \quad (4.128)$$

Se puede comprobar fácilmente, sustituyendo las fórmulas de Fresnel (4.118) y (4.119), que para ambas polarizaciones se cumplen las condiciones

$$0 \leq R, T \leq 1 \quad (4.129)$$

y

$$R + T = 1 \quad (4.130)$$

o, lo que es lo mismo

$$|\rho|^2 + |\tau|^2 \frac{\eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i} = 1 \quad (4.131)$$

necesarias para asegurar la conservación de la potencia en la superficie de separación. Según estas condiciones, las dos situaciones extremas son aquellas en las que se cumple  $R=1$ ,  $T=0$ , por un lado y  $R=0$ ,  $T=1$ , por el otro. Estas situaciones particulares, de especial interés por sus aplicaciones prácticas, en las que se consigue que la potencia incidente sea reflejada en su totalidad, o bien que se transmita íntegramente a través de la superficie, serán abordadas en las secciones siguientes.

### 4.5.3 Ángulo de Brewster

El primer caso particular de los dos que acabamos de reseñar es aquel en el que no se produce reflexión alguna en la superficie de separación entre los dos medios. Al abordar el problema general de la incidencia de ondas planas sobre medios dieléctricos hemos aceptado, como hipótesis de partida, la formación de una onda reflejada y de una onda transmitida, cuyos campos asociados se superponían a los de la onda incidente y cuya existencia venía impuesta por las condiciones de contorno del campo en la superficie.

Digamos que éste era el número mínimo de ondas necesario para satisfacer dichas condiciones para un ángulo de incidencia  $\theta_i$  genérico. Sin embargo, si hubiéramos considerado únicamente dos ondas, la incidente y la transmitida, habríamos visto que para un cierto ángulo  $\theta_{iB}$ , conocido como *ángulo de Brewster*, todavía es posible satisfacer dichas condiciones.

Nuestro propósito inmediato consiste en obtener expresiones genéricas para el ángulo de reflexión nula o ángulo de Brewster. Para ello podríamos aplicar el procedimiento, ya mencionado, de imponer que no existe la onda reflejada (*i.e.*,  $E_{0r} = 0$ ) al aplicar las condiciones de contorno en la superficie de separación. Sin embargo, una vez obtenidas las fórmulas de Fresnel para los coeficientes de reflexión y de transmisión, resulta más sencillo analizar para qué valores de  $\theta_i$  se verifica la condición  $\rho = 0$ , necesaria para que no exista la onda reflejada. Esto es lo que vamos a hacer a continuación para los dos casos estudiados, de polarización perpendicular y de polarización paralela al plano de incidencia. Para simplificar el cálculo, vamos a considerar que los dieléctricos son no magnéticos ( $\mu \cong \mu_0$ ), por lo que nuestras expresiones de partida serán la (4.125a) y la (4.126a).

(a) *Onda incidente con polarización lineal paralela al plano de incidencia*

En este caso, según la expresión (4.126a), la condición de reflexión nula es

$$n_1 \cos \theta_t = n_2 \cos \theta_i \quad (4.132)$$

de donde se obtiene, elevando al cuadrado los dos términos de la igualdad y reemplazando los senos por cosenos

$$1 - \sin^2 \theta_t = \frac{n_2^2}{n_1^2} (1 - \sin^2 \theta_i)$$

Esta relación entre  $\theta_i$  y  $\theta_t$  se debe verificar al mismo tiempo que la tercera ley de Snell,  $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$ , de la que se obtiene

$$\sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i \quad (4.133)$$

Luego, sustituyendo  $\sin \theta_t$  en la anterior expresión, resulta

$$1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_i = \frac{n_2^2}{n_1^2} (1 - \sin^2 \theta_i) \quad (4.134)$$

Finalmente, despejando  $\sin \theta_i$ , se obtiene la siguiente expresión

$$\sin \theta_{iB} = \frac{1}{\sqrt{1 + (n_1/n_2)^2}} \quad (4.135)$$

para el ángulo de Brewster  $\theta_{iB}$ , aunque es más frecuente utilizar la expresión equivalente

$$\theta_{iB} = \arctg \frac{n_2}{n_1} \quad (4.136)$$

Por otro lado, al ser el denominador mayor que la unidad en (4.135), se cumple que  $\sin \theta_{iB} < 1$ , cualesquiera que sean los valores de  $n_1$  y  $n_2$ . Por consiguiente, dados dos medios dieléctricos, existe *siempre* un ángulo de incidencia  $\theta_{iB}$ , cuyo valor viene dado por (4.136), para el cual las ondas polarizadas linealmente con el vector  $\vec{E}$  paralelo al plano de incidencia no se reflejan en la superficie de separación o, lo que es lo mismo, para el que toda la potencia de la onda incidente se transmite íntegramente al segundo medio.

(b) *Onda incidente con polarización lineal perpendicular al plano de incidencia*

En este caso, el coeficiente de reflexión para medios no magnéticos viene dado por la expresión (4.125a), por lo que la condición de reflexión nula es ahora

$$n_1 \cos \theta_i = n_2 \cos \theta_t \quad (4.137)$$

Operando del mismo modo que en el caso anterior, en lugar de (4.134) resulta ahora la expresión

$$1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_i = \frac{n_1^2}{n_2^2} (1 - \sin^2 \theta_i)$$

en la que los términos con  $\sin \theta_i$  desaparecen. Luego, por fuerza debe ser  $n_1/n_2 = 1$  para que no haya reflexión en la superficie. Es decir, los dos dieléctricos deben ser idénticos en cuanto a su comportamiento electromagnético, lo cual es una perogrullada, ya que resulta evidente que en este caso la onda incidente no percibe ningún cambio al pasar de un medio al otro, por lo que continuará propagándose en la misma dirección y con la misma potencia, tal como haría si no hubiera cambio de medio alguno.

Dicho de otro modo: una onda plana con el campo eléctrico polarizado linealmente en la dirección perpendicular al plano de incidencia siempre sufrirá una reflexión no nula al pasar de un medio no magnético a otro de índice de refracción distinto<sup>24</sup>.

(c) *Onda incidente con una polarización cualquiera*

En consecuencia, en el caso general, cuando una onda plana incida sobre la superficie de separación entre dos dieléctricos no magnéticos con un ángulo igual al ángulo de Brewster, sea cual sea su estado de polarización, la onda reflejada será, como máximo, una onda polarizada linealmente. Si la onda incidente presenta únicamente la componente del campo eléctrico paralela al plano de incidencia, no habrá onda reflejada alguna. En este último caso, la potencia que incide sobre la superficie se transmitirá en su totalidad al segundo medio.

**Ejemplo 4.4:** *Ventanas de Brewster*

Una aplicación práctica de estas propiedades la encontramos en las *ventanas de Brewster*. Tal como muestra la figura 4.24, una ventana de Brewster es, básicamente, una lámina de material dieléctrico (de vidrio, generalmente) sobre la que incide una onda plana, polarizada elípticamente, con un ángulo en relación a la normal igual al ángulo de Brewster para la primera superficie. Como acabamos de reseñar, bajo esta situación, en la primera superficie se refleja únicamente la componente de la onda incidente perpendicular al plano de incidencia, mientras que la componente paralela se transmite íntegramente al interior de la lámina. Por otro lado, se puede comprobar fácilmente que en la segunda superficie se reproduce exactamente la misma situación (la demostración se propone como ejercicio al final del capítulo), al ser el ángulo de incidencia de nuevo igual al ángulo de Brewster. Como consecuencia, una ventana de Brewster refleja en ambas superficies únicamente la componente del campo perpendicular al plano de incidencia, siendo totalmente transparente para la componente paralela<sup>25</sup>.

La aplicación principal de las ventanas de Brewster la encontramos en los láseres de gas, en las que se emplean para obtener emisiones de luz linealmente polarizadas. Su funcionamiento es como sigue: si las superficies que encierran el

<sup>24</sup> Cabe señalar que en el caso de medios magnéticos sí que existe también un ángulo de Brewster para ondas con polarización perpendicular al plano de incidencia. Sin embargo, este fenómeno no presenta ninguna aplicación práctica conocida, por lo que soslayaremos su análisis.

<sup>25</sup> Suponiendo, como hemos hecho hasta ahora, que se trata de un dieléctrico ideal, sin pérdidas.



medio activo, en el que se produce la emisión estimulada, son dos ventanas de Brewster (Fig. 4.11), la onda con polarización perpendicular sufrirá ocho transiciones o cambios de medio en cada ciclo completo dentro de la cavidad resonante, con las consiguientes pérdidas por reflexión, mientras que una onda con polarización paralela no sufrirá disminución de potencia, por la acción de las ventanas de Brewster<sup>26</sup>. De este modo, tras múltiples reflexiones en las paredes de la cavidad resonante, se consiguen fácilmente relaciones de 1 a 100 entre las componentes perpendicular y paralela en el haz de salida.

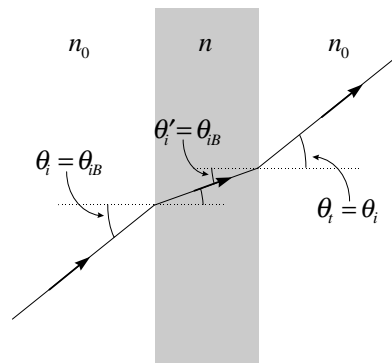


Fig. 4.24 Ventana polarizadora. Cuando es  $\theta_i = \theta_{iB}$  ambas superficies reflejan únicamente la componente del campo paralela al plano de incidencia. Si el dieléctrico no tiene pérdidas, la ventana es transparente para la componente paralela

#### 4.5.4 Ángulo crítico. Reflexión total en un dieléctrico

La segunda situación extrema, más interesante aún que la anterior por sus aplicaciones prácticas, es aquella en la que no se transmite potencia a través de la superficie de separación (*i.e.*,  $T=0$ ,  $R=1$ ). Como hemos visto, siempre aparece un campo electromagnético en el medio situado detrás de la superficie, ya que si no se cumplirían las condiciones de contorno, pero, como veremos a continuación, existen ciertas situaciones en las que este campo ya no transmite potencia hacia el segundo medio y no corresponde, en general, a una onda plana uniforme.

<sup>26</sup> De hecho, la situación es aquí ligeramente distinta a la contemplada en la figura 4.24, ya que ahora los medios situados en las dos caras de la ventana son distintos. Sin embargo, si el medio activo es un gas enrarecido (He-Ne, por ejemplo), su índice de refracción será similar al del aire, por lo que podremos aplicar, en buena aproximación, el análisis anterior.

Para ello, consideremos que el medio del que procede la onda incidente (región I, en la figura 4.25a), presenta un índice de refracción mayor que el del medio sobre el que incide la onda (región II). En este caso, como consecuencia de la tercera ley de Snell, se cumple

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{n_1}{n_2} > 1$$

Es decir, si  $n_1 > n_2$ , el ángulo de transmisión siempre será mayor que el ángulo de incidencia. Podemos imaginar, por lo tanto, una situación en la que  $\theta_i$  sea lo suficientemente grande como para que se obtenga  $\theta_t > \pi/2$  (Fig. 4.25b). Esta situación plantea una incongruencia, ya que, por definición, la onda transmitida debe propagarse por detrás de la superficie de separación entre los dos dieléctricos y no por delante, como ocurre con la onda reflejada. De no ser así, tendríamos dos ondas reflejadas y ninguna onda transmitida, lo cual es absurdo.

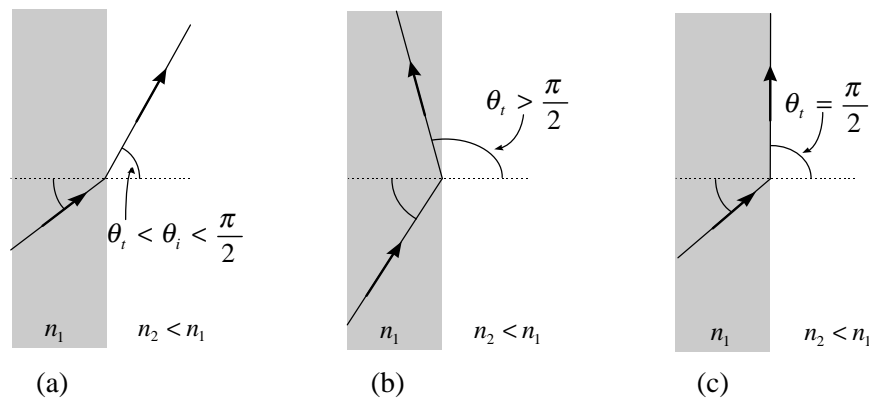


Fig. 4.25 (a) Incidencia de una onda plana sobre un medio dieléctrico de índice de refracción menor que el del medio de procedencia. En este caso la dirección de propagación de la onda transmitida tiende a alejarse de la normal, en relación a la de la onda incidente. (b) Situación absurda en la que, para ángulos de incidencia relativamente grandes, la onda transmitida saldría con un ángulo  $\theta_t > \frac{\pi}{2}$ . (c) Caso límite, en el que la dirección de propagación de la onda transmitida es tangente a la superficie de separación

¿Qué ocurre en realidad? Para verlo, supondremos que tanto las leyes de Snell como las ecuaciones de Fresnel siguen siendo válidas en este caso, ya que han sido deducidas con carácter general para cualquier valor del ángulo de incidencia comprendido entre 0 y  $\pi/2$ .

Lo que ocurre entonces es que, simplemente, algunas magnitudes pasan a ser complejas<sup>27</sup>. Consideremos, en primer lugar, el caso límite, en el que se obtiene un valor  $\theta_t = \frac{\pi}{2}$  para el ángulo de transmisión. En este caso, la onda transmitida se propagará paralelamente a la superficie de separación (Fig. 4.25c). Según la tercera ley de Snell, esta situación se produce cuando se cumple

$$\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

El valor  $\theta_{ic}$  del ángulo de incidencia para el que se produce esta situación recibe el nombre de *ángulo crítico de la superficie* y viene dado por

$$\theta_{ic} = \arcsen \frac{n_2}{n_1} \quad (4.138)$$

Luego, para valores de  $\theta_i \in [0, \theta_{ic})$ , tenemos que  $\theta_t \in [0, \pi/2)$ , con lo que la onda transmitida se propaga hacia el interior del medio de índice  $n_2$ . Digamos que ésta sería la situación normal, planteada como hipótesis de partida, al principio de la sección 4.5, para un caso genérico de incidencia oblicua sobre dieléctricos. La situación anómala se produciría para valores de  $\theta_i \in (\theta_{ic}, \pi/2)$ . En este caso, según la tercera ley Snell, tenemos

$$\sin \theta_t > 1$$

con lo que el ángulo  $\theta_t$  deja de tener significado físico inmediato. Sin embargo, debemos suponer que las expresiones (4.133) para la tercera ley de Snell y

$$\vec{E}_t(\vec{r}) = \vec{E}_{0t} e^{-jk_2(\sin \theta_t y + \cos \theta_t z)} \quad (4.139)$$

para el campo eléctrico (fasorial) en la región II siguen siendo válidas. Bajo esta suposición, podemos expresar el término  $\cos \theta_t$  en (4.139) de la forma

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \left(n_1/n_2\right)^2 \sin^2 \theta_i}$$

<sup>27</sup> Sin ir más lejos, el propio ángulo de transmisión deviene complejo. Podemos comprobar, a modo de ejercicio, que si  $\theta_t = \pi/2 - jb$ , entonces sí sucede realmente que  $\sin \theta_t > 1$ . Aunque ello puede parecer un artificio matemático, no es ésta la primera vez que trabajamos con magnitudes complejas: por ejemplo, para definir las magnitudes fasoriales en régimen senoidal permanente ya habíamos utilizado este mismo recurso, de gran utilidad por otra parte.

en la que el término de la raíz es negativo. Luego, para valores de  $\theta_i > \theta_{ic}$ , el término  $\cos\theta_t$  toma valores imaginarios, por lo que es más conveniente ponerlo de manifiesto, expresándolo de la forma  $\cos\theta_t = \pm j\gamma$ . De las dos soluciones posibles para la raíz, tomaremos únicamente la negativa, es decir

$$\cos\theta_t = -j\gamma \quad (4.140)$$

con  $\gamma \equiv \sqrt{(n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_i - 1}$ . Sustituyendo (4.133) y (4.140) en (4.139) nos queda

$$\vec{E}_t(\vec{r}) = \vec{E}_{0t} e^{-k_2 \gamma z} e^{-jk_1 \sin\theta_i y} = \vec{E}_t(z) e^{-j\beta y} \quad (4.141)$$

con  $\beta \equiv k_1 \sin\theta_i$  y  $\vec{E}_t(z) \equiv \vec{E}_{0t} e^{-k_2 \gamma z}$ .

Para incidencias supercríticas tenemos, pues, en la región II, una onda cuya amplitud se atenúa progresivamente, a medida que nos alejamos del lugar en el que fue generada (el plano  $z=0$ , en este caso). Si, por el contrario, hubiéramos considerado la solución positiva de la raíz en (4.140), obtendríamos una onda cuya amplitud crecería exponencialmente hasta el infinito, al adentrarse en el interior del segundo medio, lo cual es del todo imposible que se produzca en la realidad.

Por otro lado, el término exponencial  $e^{-j\beta y}$  de la expresión (4.141) nos indica que el campo instantáneo asociado a la onda transmitida presentará una fase instantánea, que se propagará en la dirección del eje  $Y$  con una velocidad

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{k_1 \sin\theta_i} \quad (4.142)$$

Más adelante veremos que esta propiedad se cumple también para el campo en la región I, al igual que ocurría en el caso de incidencia oblicua sobre conductores perfectos.

De hecho, esta no es la única similitud que se produce entre ambos casos. Si expresamos las fórmulas de Fresnel (4.125a) y (4.126a) para los coeficientes de reflexión en dieléctricos no magnéticos de la forma

$$\rho_{\perp} = \frac{n_1 \cos\theta_i - j\eta_2}{n_1 \cos\theta_i + j\eta_2} \equiv \frac{A}{A^*} \quad (4.143)$$

$$\rho_{\parallel} = -\frac{n_2 \cos\theta_i + j\eta_1}{n_2 \cos\theta_i - j\eta_1} \equiv -\frac{B}{B^*} \quad (4.144)$$

resulta evidente que se cumple  $|\rho_{\perp, \parallel}| = 1$ . Luego, para valores de  $\theta_i > \theta_{ic}$ , podemos definir

$$\rho_{\perp} \equiv e^{j\varphi_{\perp}} \quad (4.145)$$

$$\rho_{\parallel} \equiv e^{j\varphi_{\parallel}} \quad (4.146)$$

En este caso, la onda reflejada y la onda incidente presentan la misma amplitud, diferenciándose únicamente en unos términos de fase, introducidos por (4.145) y (4.146). Obviaremos, por lo farragoso, el cálculo de expresiones genéricas para estos términos de fase, ya que resulta más fácil trabajar directamente con valores numéricos, una vez conocidos  $\theta_i$  y los índices de refracción para cada caso concreto. Debemos concluir, pues, que, como ocurría en el caso de incidencia oblicua sobre conductores perfectos, toda la potencia que incide sobre la superficie de separación entre los dos dieléctricos, transportada por la onda incidente, es reflejada hacia el medio de la región I, sin que se transmita potencia alguna a la región II<sup>28</sup>. Este fenómeno recibe el nombre de *reflexión total en dieléctricos*.

Desde este punto de vista, el caso de incidencia oblicua sobre conductores perfectos no sería más que un caso particular de reflexión total, en el que se cumpliría  $\varphi_{\perp} = \varphi_{\parallel} = \pi$ .

En este último caso, se formaba en la región I una onda estacionaria mixta, con el vector  $\vec{E}$  perpendicular o paralelo al plano de incidencia. Podemos comprobar que este fenómeno ocurre también ahora, sin importar cuáles sean los valores de los términos de fase  $\varphi_{\perp}$  y  $\varphi_{\parallel}$ .

Para ello determinemos el campo total en la región I para ambas polarizaciones, superponiendo las ondas incidente y reflejada

$$\begin{aligned} \vec{E}_{1\perp}(\vec{r}) &= E_{0i\perp} \hat{x} \left( e^{-jk_1(\sin\theta_i y + \cos\theta_i z)} + \rho_{\perp} e^{-jk_1(\sin\theta_i y - \cos\theta_i z)} \right) \\ \vec{E}_{1\parallel}(\vec{r}) &= E_{0i\parallel} \left( (\cos\theta_i \hat{y} - \sin\theta_i \hat{z}) e^{-jk_1(\sin\theta_i y + \cos\theta_i z)} + \rho_{\parallel} (\cos\theta_i \hat{y} + \sin\theta_i \hat{z}) e^{-jk_1(\sin\theta_i y - \cos\theta_i z)} \right) \end{aligned}$$

Expresando los coeficientes de reflexión en la forma dada por (4.145) y (4.146), obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{E}_{1\perp}(\vec{r}) &= E_{0i\perp} \hat{x} e^{j\frac{\varphi_{\perp}}{2}} e^{-j\beta y} \left( e^{-j\frac{\varphi_{\perp}}{2}} e^{-jk_{iz}z} + e^{j\frac{\varphi_{\perp}}{2}} e^{jk_{iz}z} \right) \\ &= 2E_{0i\perp} e^{j\frac{\varphi_{\perp}}{2}} \hat{x} \cos\left(\frac{\varphi_{\perp}}{2} + k_{iz}z\right) e^{-j\beta y} \end{aligned} \quad (4.147)$$

<sup>28</sup> Esta afirmación es cierta sólo si nos encontramos en régimen permanente. Lógicamente, mientras dura el régimen transitorio, es indispensable una cierta transmisión de potencia para que aparezca el campo dado por (4.141) en la región II.

$$\vec{E}_{\parallel}(\vec{r}) = 2E_{0i} e^{j\frac{\varphi_{\perp}}{2}} e^{-j\beta y} \cdot \left[ \hat{y} \cos \theta_i \cos \left( \frac{\varphi_{\perp}}{2} + k_{iz} z \right) + \hat{z} j \sin \theta_i \sin \left( \frac{\varphi_{\perp}}{2} + k_{iz} z \right) \right] \quad (4.148)$$

donde  $k_{iz} \equiv k_1 \cos \theta_i$  y  $\beta \equiv k_1 \sin \theta_i$  representan, respectivamente, las componentes normal y transversal del vector de propagación de la onda incidente.

Es inmediato comprobar, calculando los campos instantáneos, que en ambos casos se forman ondas estacionarias mixtas, de tipo TE en el caso de polarización perpendicular, y de tipo TM en el caso de polarización paralela, que se propagan paralelamente a la superficie de separación, con una velocidad de fase  $v = \frac{\omega}{k_1 \sin \theta_i}$ . Podemos comprobar, también,

calculando las expresiones de los vectores de Poynting correspondientes, que en ambos casos la potencia fluye en la dirección del eje  $Y$ , es decir, paralelamente a la superficie de separación entre los dos dieléctricos.

De hecho, los valores que toman los términos de fase,  $\varphi_{\perp}$  y  $\varphi_{\parallel}$ , afectan únicamente al punto en que aparece el primer nodo de la onda, lo que se puede comprobar representando gráficamente las funciones  $\vec{E}_{\perp}(\vec{r}, t)$  y  $\vec{E}_{\parallel}(\vec{r}, t)$  para valores de  $\varphi_{\perp}$  y  $\varphi_{\parallel}$  distintos. En los casos particulares  $\varphi_{\perp} = \pi$  y  $\varphi_{\parallel} = \pi$ , recuperamos las expresiones (4.78) y (4.80), obtenidas para el caso de incidencia sobre conductores perfectos.

#### **Ejemplo 4.5:** *Propagación ionosférica*

La reflexión que se produce en las capas altas de la ionosfera para las ondas de radiofrecuencia es un fenómeno de sobras conocido, ya que posibilita la comunicación a distancias mucho mayores que las que permitiría un enlace directo. En esencia se debe a la variación que sufre el índice de refracción de la ionosfera con la altura. Al tratarse de un gas ionizado o *plasma*, el índice de refracción de la ionosfera es, en buena aproximación, una función de la forma

$$n = \sqrt{1 - 80.5 \frac{N_e}{f^2}}$$

donde  $N_e$  representa el número de electrones libres por metro cúbico y  $f$  es la frecuencia de la onda que la atraviesa<sup>29</sup>. Para una frecuencia dada, el índice de refracción disminuye con la altura en las capas bajas de la ionosfera, debido al aumento que se produce en la cantidad de electrones libres.

Para entender el comportamiento de un medio de estas características, en lo que a la propagación de ondas planas se refiere, podemos representarlo de forma esquemática como la sucesión de un conjunto de capas superpuestas, lo suficientemente delgadas para poder considerar que en cada una de ellas el índice de refracción es constante. La trayectoria descrita por una onda plana en un medio de estas características aparece representada en la figura 4.26 está determinada por la ley de Snell, la cual debe cumplirse en las superficies de separación entre capas contiguas. Considerando  $n_0 \cong 1$  en el borde inferior de la ionosfera, resulta

$$\sin \theta_0 = n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 = \dots$$

y así, sucesivamente. Es decir, la cantidad  $n_i \sin \theta_i$  permanece constante a lo largo de la trayectoria y su valor viene determinado por  $\sin \theta_0$ . Teniendo en cuenta que el índice de refracción es cada vez menor a medida que la onda se adentra en la ionosfera, el ángulo de incidencia aumenta progresivamente al pasar de una capa a la siguiente. El resultado es el que aparece en la figura 4.26a. Si en alguna de ellas se cumple la condición

$$n_i < \sin \theta_0$$

se produce la reflexión total de la onda, al ser  $\sin \theta_i > 1$  (Fig. 4.26b).

Llamemos  $n_{\min}$  al valor mínimo que toma el índice de refracción en la ionosfera. Este valor se alcanza donde la concentración de electrones libres es máxima (capa de Heaviside), de acuerdo con la relación

$$n_{\min.} = \sqrt{1 - 80.5 \frac{(N_e)_{\max.}}{f^2}}$$

<sup>29</sup> Obsérvese que, para valores de  $f < \sqrt{80.5 N_e}$ , el índice de refracción es una magnitud compleja. En este caso, el medio se comporta como un conductor (ver sección 3.4). Para valores de  $f > \sqrt{80.5 N_e}$ ,  $n$  es una función real. En este caso, la ionosfera se comporta como un dieléctrico, con la salvedad que es  $n < 1$ . Es éste uno de los pocos casos en que nos encontraremos con índices de refracción menores que la unidad.

Por lo tanto, una onda electromagnética que penetre en la ionosfera con un ángulo  $\theta_0$  en relación a la vertical del suelo sufrirá reflexión total si se cumple la condición

$$\text{sen } \theta_0 > \sqrt{1 - 80.5 \frac{(N_e)_{\text{max.}}}{f^2}}$$

o, lo que es lo mismo

$$f < \frac{\sqrt{80.5(N_e)_{\text{max.}}}}{\cos \theta_0}$$

Según este resultado y teniendo en cuenta que se cumple  $0 \leq \cos \theta_0 \leq 1$ , una onda cuya frecuencia sea  $f < \sqrt{80.5(N_e)_{\text{max.}}}$  será devuelta a tierra por la ionosfera, independientemente del ángulo con el que llegue. Por el contrario, si es  $f > \sqrt{80.5(N_e)_{\text{max.}}}/\cos \theta_0$ , la onda se transmitirá al espacio exterior. En este último caso, la ionosfera posibilita la comunicación espacial (teniendo en cuenta que el número de electrones libres varía entre  $10^{10}$  y  $10^{12}$  por  $\text{m}^3$ , la frecuencia empleada debe ser mayor de 9MHz); en el primero, facilita la radiocomunicación terrestre a larga distancia (lo cual agradecieron enormemente los pioneros de la radio, que rabajaban con transmisores de unos pocos kHz).

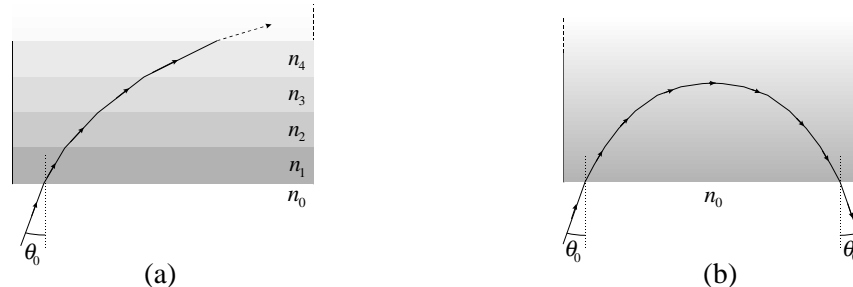


Fig. 4.26 (a) Deflexión sufrida por una onda plana al cruzar una sucesión de capas homogéneas de índice de refracción decreciente. (b) Cuando en alguno de las capas se alcanza el valor del ángulo crítico se produce la reflexión total de la onda y ésta es devuelta a tierra con el mismo ángulo con el que entra. Este sencillo modelo nos permite entender la propagación ionosférica.



**Ejemplo 4.6:** *Guías de onda dieléctricas*

Al igual que ocurría con la reflexión en conductores, el fenómeno de la reflexión total en dieléctricos puede aprovecharse también para la propagación de ondas electromagnéticas. Las guías de onda dieléctricas (las fibras ópticas en particular) constituyen, con mucho, su principal aplicación, al haberse erigido en una pieza (de considerable importancia) dentro de la ingeniería contemporánea.

El principio de funcionamiento de una guía de onda dieléctrica como la que muestra la figura 4.27 es muy similar al de las guías de paredes conductoras: para que se genere una onda estacionaria mixta en el interior de la guía, y que sea estable en régimen permanente, debe producirse reflexión total en ambas paredes. Según hemos visto anteriormente, ello sólo puede ocurrir si el índice de refracción del medio interno es superior al del medio externo. Por otro lado, las sucesivas reflexiones de la onda incidente producidas deben dar lugar a interferencias constructivas. En una guía de paredes conductoras, ello ocurría cuando se cumplía la condición  $k_{iz}d = m\pi$ . En este caso, la onda incidente, tras haber sido reflejada una vez en cada pared y haber efectuado un recorrido completo de ida y vuelta, regresaba al punto de partida con una diferencia de fase acumulada  $e^{-j2k_{iz}d} = e^{-2jm\pi} = 1$  con respecto a la onda inicial, con lo que se añadía en fase a la primera, y así, sucesivamente.

En el caso de una guía dieléctrica, al desfase  $e^{-j2k_{iz}d}$  acumulado durante el trayecto de ida y vuelta hay que añadirle un término de fase del tipo  $e^{-j\varphi_{\perp,\parallel}}$  (según se trate de incidencia perpendicular o paralela) para cada reflexión producida. El desfase total acumulado es, pues,  $e^{-j2k_{iz}d - 2j\varphi_{\perp,\parallel}}$  y la condición para que se produzcan interferencias constructivas deviene

$$\varphi_{\perp,\parallel} + k_{iz}d = m\pi$$

de donde resulta

$$\operatorname{tg}(\varphi_{\perp,\parallel} + k_{iz}d) = 0$$

o, lo que es lo mismo

$$\operatorname{tg}(k_{iz}d) = -\operatorname{tg}(\varphi_{\perp,\parallel})$$

Por consiguiente, en el interior de la guía se generarán únicamente aquellas ondas estacionarias o modos propios que cumplan esta última condición, conocida como ecuación de valores propios de la guía.

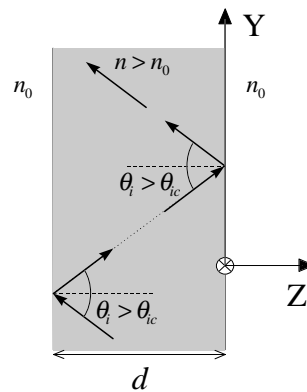


Fig. 4.27 Guía de ondas simétrica, formada por una lámina dieléctrica, recubierta en ambos lados por un dieléctrico de menor índice de refracción

#### Ejemplo 4.7: Propagación de ondas en una fibra óptica

Al igual que donde  $N_e$  representa el número de electrones libres por metro cúbico y  $f$  es la frecuencia que ocurre con las guías de onda dieléctricas, el fenómeno de la reflexión total permite la propagación de ondas guiadas en una fibra óptica. En ambos casos, el principio es el mismo: un material dieléctrico de índice de refracción determinado ( $n_c$ , en la figura 4.28) se encuentra rodeado por otro de índice de refracción inferior, de valor  $n_b$ , de forma que un rayo que incide sobre la superficie de separación entre ambos, con un ángulo respecto a la normal mayor que el ángulo crítico, sufre reflexión total, lo que da lugar a la formación de modos guiados en el interior de la fibra. Debido a la geometría que presenta, las expresiones matemáticas que se obtienen para el campo electromagnético asociado a los modos guiados en una fibra óptica son mucho más complejas que las obtenidas en el ejemplo anterior. Sin embargo, el concepto de ángulo crítico nos permite realizar una estimación sencilla de cómo debemos introducir la luz en la fibra para conseguir el guiado de la misma en su interior.

Si llamamos  $\theta_a$  al ángulo con respecto al eje de la fibra con el que la luz incide en la sección de entrada, tal como muestra la figura 4.28, el cono de aceptación de la fibra está determinado por el rango de valores de  $\theta_a$  para los cuales el rayo incidente da lugar a la formación de ondas guiadas. El valor máximo permitido para  $\sin\theta_a$  recibe el nombre de *apertura numérica* (N.A., del inglés *numerical aperture*). Para hallar una expresión de la apertura numérica de la fibra,

debemos relacionar los ángulos  $\theta_a$  y  $\theta_c$  de la figura. La relación en cuestión nos la proporciona la ley de Snell. En la sección de entrada se verifica

$$1 \cdot \sin \theta_a = n_c \sin \bar{\theta}_c = n_c \sqrt{1 - \cos^2 \bar{\theta}_c}$$

donde  $\bar{\theta}_c$  es el ángulo complementario de  $\theta_c$ . El valor máximo de  $\theta_a$  que permite la reflexión total en el interior de la fibra corresponde a un valor de  $\theta_c$  igual al del ángulo crítico de la superficie de separación entre el medio interno y la cubierta de la fibra. En este caso, se cumple

$$\begin{aligned} \sin \theta_c &= \frac{n_b}{n_c} = \cos \bar{\theta}_c \\ \sin \theta_a &= n_c \sqrt{1 - \frac{n_b^2}{n_c^2}} = \sqrt{n_c^2 - n_b^2} \end{aligned}$$

En las fibras ópticas la diferencia de índices  $n_c - n_b$  suele ser pequeña. En tal caso, podemos realizar la aproximación

$$\sin \theta_a \cong n_b \sqrt{2\Delta}$$

donde  $\Delta \equiv \frac{n_c - n_b}{n_b}$  es el incremento de índice relativo (normalmente  $\ll 1$ ). En una fibra típica de silicio, por ejemplo, se tiene un incremento relativo  $\Delta = 0.01$ , con un índice  $n_b = 1.46$  en la cubierta. El valor que se obtiene, en este caso, para la apertura numérica, es  $N.A. = 0.206$ , lo cual corresponde a un cono de aceptación con  $\theta_a = 11.9^\circ$ , que vendría a ser un valor típico.

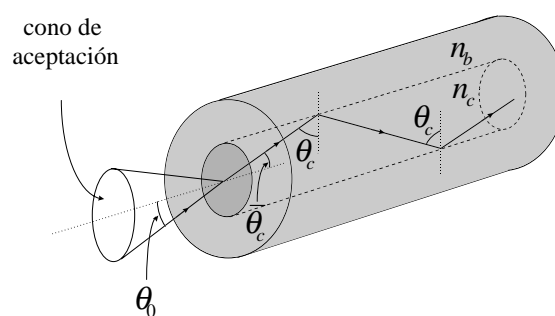


Fig. 4.28 Apertura numérica de una fibra óptica

## 4.6 Incidencia sobre un buen conductor

En el capítulo 3 habíamos introducido el concepto de permitividad compleja para representar el comportamiento electromagnético en régimen senoidal permanente de un medio con una conductividad  $\sigma$  finita. El uso de permitividades complejas nos permite extender el análisis matemático empleado para el estudio de la incidencia de ondas planas sobre medios dieléctricos ideales al caso de medios con pérdidas, como es, por ejemplo, un conductor real. Por su interés práctico, en la presente sección consideraremos medios que sean buenos conductores, centrándonos especialmente en los aspectos novedosos que presenta su comportamiento en relación al de un conductor perfecto, en lo que a la incidencia de ondas planas se refiere.

En la sección 3.4.3 habíamos definido un buen conductor como un medio en el que la corriente de conducción era mucho mayor que la corriente de desplazamiento o, lo que es lo mismo, en el que se cumplía la condición

$$\sigma \gg \omega \epsilon_0$$

En este caso, podíamos aproximar la permitividad compleja en régimen senoidal permanente por

$$\epsilon \cong -j \frac{\sigma}{\omega} \quad (4.149)$$

¿Cuáles son los aspectos novedosos a los que nos referíamos? Para empezar, la asunción de que el campo es nulo en el interior, tras la incidencia en la superficie de una onda plana procedente de un dieléctrico ideal sin pérdidas, sólo es cierta en un conductor perfecto. En un medio de conductividad finita debemos asumir, como si de un dieléctrico se tratara, la formación de una onda transmitida, además de la onda reflejada. Sin embargo, y a diferencia de un dieléctrico ideal, el carácter complejo de la permitividad produce una atenuación en la amplitud de la onda transmitida, a medida que ésta se adentra en el conductor. En la sección 3.4.3 habíamos introducido el concepto de profundidad de penetración en un buen conductor, como un indicativo de la atenuación sufrida por una onda plana que se propagase a través de un medio estas características. El estudio de la incidencia de ondas planas sobre buenos conductores nos permitirá abundar en este concepto.

Con este fin, procedamos a la obtención de una expresión genérica para la onda transmitida. La constante de propagación de las ondas planas en un medio cuya permitividad venía dada por (4.149) era, a su vez, una magnitud compleja de la forma

$$k \equiv \beta - j\alpha \cong \frac{1-j}{\delta_p}$$

donde el término  $\delta_p \equiv \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$  recibía el nombre de profundidad de penetración en el conductor. Por consiguiente, el campo eléctrico asociado a la onda transmitida, en el caso de incidencia normal, puede representarse mediante la siguiente expresión fasorial:

$$\vec{E}_t(z) = \vec{E}_{0t} e^{-j(\beta - j\alpha)z} = \vec{E}_{0t} e^{-z/\delta_p} e^{-jz/\delta_p} \quad (4.150)$$

donde hemos fijado, como de costumbre, los ejes de coordenadas de manera que el eje Z coincida con la dirección normal a la superficie. Tenemos, pues, que la amplitud de la onda transmitida se atenúa en un factor  $e^{-z/\delta_p}$ , como consecuencia del carácter complejo de la constante de propagación. A una profundidad  $z \approx 4.6\delta_p$ , por ejemplo, la amplitud es sólo un 1% de la inicial. El término  $\delta_p$  es, pues, un indicativo de la profundidad a la que penetran en el conductor los efectos electromagnéticos producidos por la incidencia de una onda plana sobre la superficie y de ahí su nombre.

¿Qué ocurre entonces si la onda incide oblicuamente sobre el conductor? Como hemos dicho al principio, podemos extender las leyes que rigen el comportamiento de los medios dieléctricos, en lo que a la incidencia de ondas planas se refiere, al caso de buenos conductores, con la salvedad de que ahora aparecen magnitudes complejas. Así, por ejemplo, tanto las leyes de Snell como las ecuaciones de Fresnel siguen siendo válidas. Bajo este supuesto y fijando los ejes de coordenadas de forma que el plano YZ corresponda al plano de incidencia (Fig. 4.20), el vector de propagación de la onda transmitida será de la forma  $\vec{k}_t = k_2(\sin\theta_t y + \cos\theta_t z)$ . Podríamos esperar entonces que la penetración de la onda transmitida fuera menor que si la incidencia es normal, ya que la componente normal se ve reducida un factor  $\cos\theta_t$ . Sin embargo, en un buen conductor, esta reducción es despreciable. Para ponerlo de manifiesto, basta con expresar el término  $\cos\theta_t$  de la forma

$$\cos\theta_t = (1 - \sin^2\theta_t)^{1/2} = \left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2} \sin^2\theta_i\right)^{1/2} \quad (4.151)$$

donde hemos aplicado la tercera ley de Snell. Si aplicamos ahora la aproximación (4.149), podemos expresar el segundo término de la raíz de la forma

$$\frac{k_1^2}{k_2^2} = \frac{\omega^2 \mu_1 \epsilon_1}{\omega^2 \mu_2 \epsilon_2} \equiv j \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\omega \epsilon_1}{\sigma}$$

Como hemos dicho, en un buen conductor es, por definición,  $\sigma \gg \omega\epsilon_0$ . Luego, si la permitividad y la permeabilidad del dieléctrico de la región I no difieren mucho de las del vacío, podemos considerar que se cumple la condición

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\omega \epsilon_1}{\sigma} \ll 1 \quad (4.152)$$

y despreciar, sin más, el término  $(k_1/k_2)^2 \sin^2 \theta_i$  en (4.151), con lo que nos queda, simplemente

$$\cos \theta_t \approx 1 \quad (4.153)$$

independientemente del valor que tome el ángulo de incidencia  $\theta_i$ . Teniendo en cuenta este resultado, junto con la tercera ley de Snell, la expresión genérica de la onda transmitida queda de la forma

$$\vec{E}_t(\vec{r}) = \vec{E}_{0t} e^{-j\vec{k}_t \cdot \vec{r}} \equiv \vec{E}_t(z) e^{-jk_1 \sin \theta_i y} \quad (4.154)$$

donde el término  $\vec{E}_t(z)$  corresponde a la expresión (4.150), obtenida para incidencia normal.

Es decir, con independencia de cómo llegue a la superficie la onda incidente, en el caso de incidencia oblicua la onda transmitida penetra en el conductor con un ángulo  $\theta_t \approx 0$ , esto es, según la dirección normal, y se atenúa del mismo modo en que lo hace en el caso de incidencia normal. El concepto de profundidad de penetración *es válido entonces para cualquier ángulo de incidencia*<sup>30</sup>. Por otro lado, la presencia del término  $e^{-jk_1 \sin \theta_i y}$  en (4.154) indica que existe una propagación de la fase de la onda en la dirección  $\hat{y}$ , esto es, paralelamente a la superficie del conductor. De hecho, sólo la propagación en  $\hat{y}$  será relevante, puesto que la fuerte disminución de amplitud en la dirección  $\hat{z}$  impide una propagación efectiva en esa dirección, a pesar del término  $e^{-jz/\delta_p}$ . Podemos considerar, pues, que la onda transmitida se propaga en el interior del conductor concentrada en una región próxima a la superficie y paralelamente a ella. Este fenómeno recibe el nombre de *efecto pelicular* o *efecto skin*.

Por otro lado, la atenuación de la amplitud de la onda transmitida en un factor  $e^{-z/\delta_p}$  conlleva una disminución en el flujo de potencia a medida que ésta penetra en el conductor. Teniendo en cuenta que el término de fase  $e^{-jk_1 \sin \theta_i y}$  no afecta al flujo de potencia asociado a la onda transmitida, su densidad media viene dada por<sup>31</sup>

<sup>30</sup> Siempre, claro está, que se cumpla la condición de buen conductor  $\sigma \gg \omega \epsilon_0$ . A frecuencias ópticas, por ejemplo, podría no ser cierto, ya que un buen conductor puede dejar de serlo si  $\omega$  es muy elevada.

<sup>31</sup> Esta expresión se obtiene a partir de la expresión genérica para el valor medio del vector de Poynting en régimen senoidal permanente,  $\vec{P}_m = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*]$ , con  $\vec{H} = \frac{1}{\eta} \hat{k} \times \vec{E}$ , y teniendo en

$$|\vec{P}_t(z)| = \frac{|E_t(z)|^2}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\eta_2^*} \right) = \frac{\sigma \delta_p}{4} |\vec{E}_{0t}|^2 e^{-2z/\delta_p}$$

donde hemos utilizado la aproximación

$$\eta_2 \cong \frac{1+j}{\sigma \delta_p} = \sqrt{2} \frac{1}{\sigma \delta_p} e^{j\pi/4} \quad (4.155)$$

Luego, la densidad media de potencia que penetra en el conductor a través de su superficie viene dada por

$$|\vec{P}_t(z=0)| \cos \theta_t \cong \frac{\sigma \delta_p}{4} |\vec{E}_{0t}|^2 \quad (4.156)$$

al ser, como hemos visto,  $\theta_t \approx 0$ . Este flujo disminuye en un factor  $e^{-2z/\delta_p}$  a medida que la onda transmitida se adentra en el conductor, tendiendo a cero en el límite  $z \rightarrow \infty$ .

¿Qué ocurre entonces con la potencia perdida por la onda? Un sencillo cálculo nos permite comprobar que ha sido absorbida por el conductor, en forma de pérdidas óhmicas. Para ello, basta obtener la potencia media disipada por unidad de volumen por una corriente de tipo óhmico ( $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ ). En régimen senoidal permanente, esta potencia viene dada por

$$U_d \langle \vec{J} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\vec{J} \cdot \vec{E}^*] = \frac{\sigma}{2} |\vec{E}|^2$$

Integrando esta expresión en todo el volumen ocupado por el conductor, obtenemos la potencia total disipada por la onda transmitida

$$W_d = \int_V \frac{\sigma}{2} |\vec{E}_t(\vec{r})|^2 dV = \int_V \frac{\sigma}{2} |\vec{E}_{0t}|^2 e^{-2z/\delta_p} dV$$

Considerando  $dV = dS dz$ , donde  $dS$  corresponde a un elemento de la superficie del conductor, resulta

$$W_d = \frac{\sigma}{2} |\vec{E}_{0t}|^2 \int_0^\infty e^{-2z/\delta_p} dz \int_S dS = \frac{\sigma \delta_p}{4} |\vec{E}_{0t}|^2 S \quad (4.157)$$

---

cuenta que la impedancia intrínseca en un buen conductor es una magnitud compleja. Dicho carácter se traduce, por otro lado, en un desfase entre los campos eléctrico y magnético de la onda transmitida, de valor  $\pi/4$ , según la expresión (4.155).

donde  $S$  representa la superficie total del conductor<sup>32</sup>. Comparando las expresiones (4.156) y (4.157), vemos que la potencia disipada en el conductor se corresponde exactamente con la potencia que penetra a través de su superficie, tal como esperábamos.

Una vez que hemos analizado lo que ocurre en el interior del conductor cuando incide una onda plana sobre su superficie, veamos qué sucede en el dieléctrico. Para ello podemos calcular los campos eléctrico y magnético asociados a la onda reflejada, aplicando las ecuaciones de Fresnel obtenidas para incidencia sobre dieléctricos, pero teniendo en cuenta que, según la expresión (4.155), la impedancia  $\eta_2$  del segundo medio es ahora una magnitud compleja. Para una onda incidente con el vector  $\vec{E}$  polarizado perpendicularmente al plano de incidencia se cumple, si aplicamos la aproximación (4.153)

$$\rho_{\perp} \cong \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1} = \frac{\frac{\eta_2}{\eta_1} \cos \theta_i - 1}{\frac{\eta_2}{\eta_1} \cos \theta_i + 1} \quad (4.158)$$

Por otro lado, según (4.155), se verifica

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} \cong \sqrt{2} \frac{1}{\sigma \delta_p \eta_1} e^{j\pi/4} = \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\omega \epsilon_1}{\sigma} \right)^{1/2} e^{j\pi/4} \quad (4.159)$$

Teniendo en cuenta, de nuevo, la condición (4.152), podemos despreciar, en una aproximación de primer orden, los términos con  $\eta_2/\eta_1$  en (4.158)<sup>33</sup>, con lo que resulta  $\rho_{\perp} \cong -1$ . Del mismo modo, para una onda incidente con el vector  $\vec{E}$  polarizado paralelamente al plano de incidencia, obtenemos,  $\rho_{\parallel} \cong -1$ . Es decir, podemos considerar, en una primera aproximación, que un buen conductor se comporta, en lo que a la reflexión se

<sup>32</sup> La potencia disipada en el conductor puede expresarse también de la forma  $\frac{W_d}{S} = \frac{1}{2} R_S |I|^2$

donde  $W_d/S$  es la potencia disipada por unidad de superficie del conductor,  $R_S \equiv \frac{1}{\sigma \delta_p}$  es la

resistencia superficial del conductor, definida en la sección 3.4.3 e  $I$  representa la intensidad de corriente que atraviesa una sección del conductor de longitud infinita en profundidad y anchura unidad, perpendicular a la superficie y a la dirección del campo eléctrico (ver sección 3.4.3.).

<sup>33</sup> Utilizando los valores del ejemplo 3.4 para el cobre, tenemos, para una incidencia desde el vacío con una frecuencia situada en el rango de las microondas (por ejemplo, 10 GHz),  $\left| \frac{\eta_2}{\eta_1} \right| \approx 10^{-4} !!$



refiere, como un conductor perfecto. Luego, en ambos casos se forman en el dieléctrico ondas estacionarias mixtas, cuya fase se propagará paralelamente a la superficie del conductor con una velocidad  $v = \omega/k \sin \theta_i$  y cuyos campos vendrán dados por (4.78) y (4.79), en el caso de polarización perpendicular, y por (4.80) y (4.81), en el caso de polarización paralela al plano de incidencia.

La aproximación de primer orden para la onda reflejada, sin embargo, no tiene en cuenta aspectos tales como la disipación de potencia en el conductor, producida por las corrientes de tipo óhmico que induce la onda transmitida. Las expresiones

$$\rho_{\perp} = -1 + 2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \cos \theta_i \quad (4.160a) \quad \rho_{\parallel} = -1 + 2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \frac{1}{\cos \theta_i} \quad (4.160b)$$

$$\tau_{\perp} = 2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \cos \theta_i \quad (4.161a) \quad \tau_{\parallel} = 2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \quad (4.161b)$$

obtenidas considerando los términos de orden inmediatamente superior en el desarrollo en serie de potencias de  $\eta_2/\eta_1$  de las ecuaciones de Fresnel sí son compatibles con el principio de conservación de la energía.

Una vez obtenidas las expresiones (4.161a) y (4.161b) para el coeficiente de transmisión en un buen conductor, podemos determinar qué fracción de la potencia que incide sobre la superficie, aportada por la onda incidente, se disipa en su interior por efecto Joule. La fracción de potencia que se disipa viene dada directamente por la transmitividad de la superficie, ya que, según hemos visto anteriormente, la potencia total disipada coincide con la potencia que penetra a través de su superficie. La transmitividad se obtiene fácilmente de la forma

$$T = \frac{|\vec{P}_t(z=0)| \cos \theta_t}{|\vec{P}_i(z=0)| \cos \theta_i} \cong \frac{\frac{\sigma \delta_p}{4} |\tau|^2 |E_{0i}|^2}{\frac{1}{2\eta_1} |E_{0i}|^2 \cos \theta_i} = \frac{\sigma \delta_p \eta_1}{2 \cos \theta_i} |\tau|^2$$

donde hemos utilizado la relación (4.156). Según este resultado y las expresiones (4.159) y (4.161), para ambas polarizaciones la transmitividad es una función de la forma

$$T \sim \left( \frac{\omega \epsilon_1}{\sigma} \right)^{1/2}$$

y tiende a cero, lógicamente, para conductores perfectos.

En el caso de un buen conductor, aunque el término  $(\omega\epsilon_1/\sigma)^{1/2}$  toma valores realmente pequeños ( $\approx 10^{-4}$  en el cobre para frecuencias del orden de 10GHz), la potencia total disipada puede ser apreciable si la superficie del conductor es lo suficientemente grande y la onda incidente lo suficientemente intensa.

#### **Ejemplo 4.8:** *Comunicación submarina*

El carácter conductor del agua salada dificulta enormemente la comunicación submarina. Si la señal se emite desde una estación terrestre, por ejemplo, la intensidad de la onda que llega a un receptor sumergido depende fundamentalmente de dos parámetros: la transmitividad en la superficie del mar y la profundidad de penetración, los cuales, como hemos visto, dependen de la frecuencia empleada. Por un lado, la transmitividad aumenta con la raíz de la frecuencia; por el otro, la profundidad de penetración disminuye con dicha raíz. De ambos efectos, predomina éste último, ya que la profundidad de penetración afecta exponencialmente la atenuación que sufre la onda en el agua. Así, por ejemplo, a una frecuencia  $f = 1$  MHz, la profundidad de penetración es  $\delta_p = 0.22 \text{ m}^{-1}$ , lo cual quiere decir que a una profundidad de 1 m sólo llega un 1% de la potencia transmitida en la superficie. A una frecuencia  $f = 10$  kHz, la profundidad de penetración toma un valor  $\delta_p = 2.25 \text{ m}^{-1}$ , con lo que se obtiene la misma situación a una profundidad de 10 m por debajo de la superficie. Para mantener una comunicación eficiente con un barco submarino sería necesario emplear frecuencias demasiado bajas o potencias demasiado elevadas, lo que la imposibilita en la práctica, excepto cuando éste se encuentra en la superficie.

### **4.7 Incidencia normal en multicapas**

Existe un elevado número de dispositivos prácticos que utilizan las propiedades de la incidencia de ondas planas sobre medios dieléctricos. En algunas de estas aplicaciones, como los recubrimientos antirreflectantes, los filtros interferenciales o los DFB (*distributed feedback lasers*), intervienen estructuras denominadas *multicapas dieléctricas*.

Una capa múltiple o multicapa dieléctrica es, en esencia, un conjunto de láminas dieléctricas paralelas, dispuestas sucesivamente. Hasta ahora nos hemos limitado al análisis de los fenómenos producidos como consecuencia de la incidencia de una onda plana sobre la superficie de separación entre dos medios distintos. Cuando uno de ellos era un conductor perfecto, aparecía una onda reflejada hacia el primer medio, como consecuencia de la interacción entre el campo de la onda incidente y las cargas presentes en el conductor. Cuando ambos medios eran dieléctricos aparecía, además, una onda transmitida hacia el segundo medio. La cuestión es ¿qué ocurre ahora al añadir más discontinuidades en el recorrido de las ondas?

Lógicamente, debemos esperar que se generen ondas reflejadas y ondas transmitidas en cada una de las distintas discontinuidades que encuentre a su paso la onda incidente. Para ilustrar el fenómeno, tomemos la situación más sencilla de reflexión múltiple, con tres medios diferentes y dos superficies de separación. En el ejemplo de la figura 4.29a, estas superficies aparecen situadas en  $z = -d$  y en  $z = 0$ . Tal como hemos visto en la sección 4.3.1, tras la incidencia de una onda plana en la primera de ellas, aparecerán una onda reflejada hacia el medio que forma la región I y una onda transmitida hacia la región II, representadas en la figura por sus vectores de propagación correspondientes,  $\vec{k}_{r1}$  y  $\vec{k}_{t2}$ . Al incidir ésta última sobre la superficie situada en  $z = 0$ , se generarán una onda transmitida hacia la región III y una segunda onda reflejada, representadas por los vectores de propagación  $\vec{k}_{t3}$  y  $\vec{k}_{r2}$ , respectivamente. Esta segunda onda reflejada, a su vez, incidirá en la superficie  $z = -d$ , dando lugar a la aparición de las ondas  $\vec{k}_{t1}$  y  $\vec{k}'_{r2}$  y así, sucesivamente.

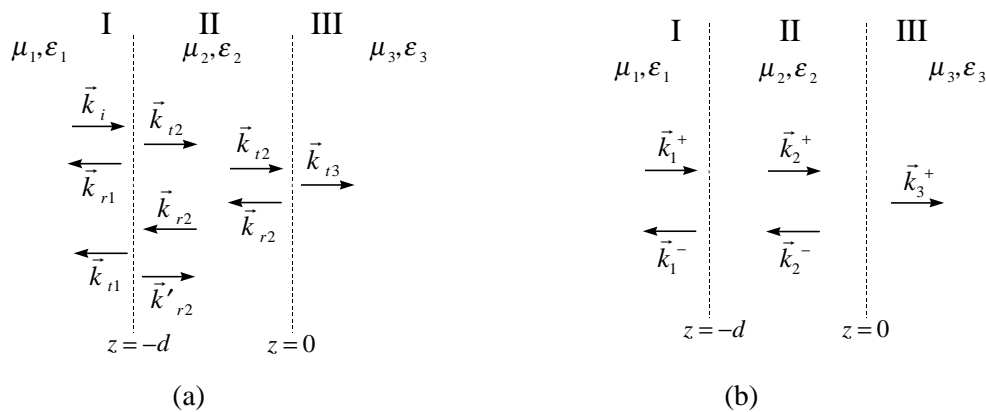


Fig. 4.29 (a) Incidencia en multicapas dieléctricas. En los medios intermedios aparecen múltiples ondas reflejadas. (b) Situación final (estacionaria) tras las múltiples reflexiones y transmisiones

Por consiguiente, este proceso de reflexiones múltiples se repite *ad infinitum*. No obstante, dentro de cada región podemos aplicar el principio de superposición a todas las ondas que viajan en la misma dirección, con lo que se obtiene la situación final de la figura 4.29b, en la que tenemos una onda progresiva y una onda regresiva en cada una de ellas, excepto en la última<sup>34</sup>. Como siempre, las condiciones de contorno que deben cumplir las

<sup>34</sup> Si añadiéramos una discontinuidad en el otro extremo de la región III aparecería una onda regresiva también en esta región.

componentes tangenciales del campo total en las superficies situadas en  $z = -d$  y  $z = 0$  nos permiten relacionar las distintas amplitudes entre sí.

#### 4.7.1 Impedancia de onda generalizada

La obtención de estas relaciones no es excesivamente complicada, en este caso concreto (al final del capítulo aparece propuesta como ejercicio)<sup>35</sup>. Ahora bien, la complejidad aumenta ostensiblemente si tomamos un número de capas mayor. Por fortuna, existe una forma mucho más simple y elegante de resolver problemas como el planteado en la figura 4.29. El procedimiento en cuestión se basa en la extensión del concepto de impedancia intrínseca de un medio material, definido en el capítulo 3 a partir de la relación entre el campo eléctrico y el campo magnético de una onda plana uniforme, a una situación genérica en la que existe en el medio una onda o suma de ondas planas cualesquiera. Desde este punto de vista, la reflexión de parte de la potencia al variar las características del medio (por ejemplo, en la superficie de separación entre dos dieléctricos distintos) se relaciona con un cambio de impedancia de la onda. Veámoslo.

En el caso más general, podemos definir la *impedancia de onda* como sigue:

$$Z_{ij} \equiv \frac{E_i}{H_j} \quad (4.162)$$

Formalmente,  $Z$  sería una matriz cuyos elementos  $Z_{ij}$  relacionan la componente  $i$ -ésima del campo eléctrico con la componente  $j$ -ésima del campo magnético de la onda. En las ondas de tipo TEM (transversal electromagnético) los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  tienen ambos una única componente, perpendicular a la dirección de propagación (de ahí el nombre de ondas TEM). En este caso, la impedancia de onda se reduce a un escalar, definido por

$$Z = (\pm) \frac{E_t}{H_t} \quad (4.163)$$

<sup>35</sup> Por ejemplo, las expresiones que relacionan entre sí las amplitudes de las ondas  $\vec{k}_2^+$ ,  $\vec{k}_2^-$  y  $\vec{k}_3^+$  son, justamente, (4.43) y (4.44), ya que la situación que se produce en la superficie situada en  $z = -d$  idéntica a la planteada en la sección 4.3.1 (Fig. 4.12). Dichas expresiones, sin embargo, no son válidas en la superficie situada en  $z = -d$ , donde nos enfrentamos a una *situación distinta, en la que inciden a la vez dos ondas planas desde direcciones opuestas* (identificadas por los vectores  $\vec{k}_1^+$  y  $\vec{k}_2^-$  en la figura 4.29b). En este caso habrá que resolver el problema desde el principio, es decir, partiendo de las condiciones de contorno (4.29) y (4.30) para las componentes tangenciales del campo.

donde el subíndice  $t$  se refiere a las componentes transversales del campo. El signo de la expresión debe escogerse arbitrariamente de forma que, para el caso de una onda plana uniforme, coincida con la impedancia intrínseca del medio, con signo positivo.

**Ejemplo 4.9:** Algunos ejemplos de cálculo de impedancia de onda

Veamos a continuación qué expresiones se obtienen para los distintos tipos de ondas vistos en este capítulo

(a) *Onda plana uniforme*

En el caso de una onda plana que se propaga en la dirección  $\hat{z}$ , con el campo eléctrico polarizado linealmente en la dirección  $\hat{y}$ , las expresiones fasoriales del campo son de la forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0 e^{-jkz} \hat{y} \quad \vec{H}(\vec{r}) = -\frac{E_0}{\eta} e^{-jkz} \hat{x}$$

donde  $k$  representa la constante de propagación y  $\eta$  la impedancia intrínseca del medio en el que se propaga la onda. Sustituyendo estas expresiones en (4.163), obtenemos

$$Z = -\frac{E_y}{H_x} = -\frac{E_0 e^{-jkz}}{-\frac{E_0}{\eta} e^{-jkz}} = \eta \quad (4.164)$$

Es decir, la impedancia de una onda plana uniforme es justamente la impedancia intrínseca del medio en el que se propaga, tal como hemos impuesto al principio.

(b) *Onda plana estacionaria*

En la sección 4.2.1 habíamos obtenido las siguientes expresiones para el campo total que resulta de la incidencia normal de una onda plana como la del caso (a) sobre la superficie de un conductor perfecto

$$\vec{E}(z) = -2j\hat{y} E_0 \sin kz \quad \vec{H}(z) = -2\frac{E_0}{\eta} \hat{x} \cos kz$$

Luego, la impedancia de una onda estacionaria resulta ser

$$Z = -\frac{E_y}{H_x} = -j\eta \operatorname{tg} kz \quad (4.165)$$

(c) *Onda parcialmente estacionaria*

Cuando la onda plana uniforme del caso (a) incidía normalmente sobre la superficie de separación entre dos dieléctricos se formaba en el primer medio una onda parcialmente estacionaria, cuyas componentes transversales del campo eran de la forma

$$E_y(z) = E_0(2j\rho \operatorname{sen} k_1 z + \tau e^{-jk_1 z}) \quad H_x(z) = \frac{E_0}{\eta_1}(2\rho \cos k_1 z - \tau e^{-jk_1 z})$$

donde los coeficientes  $\rho$  y  $\tau$  vienen dados por (4.43) y (4.44). En este caso y tras algunas simplificaciones, se obtiene la siguiente expresión para la impedancia de onda en el medio I:

$$Z = -\frac{E_y}{H_x} = \eta_1 \frac{\eta_2 - j\eta_1 \operatorname{tg} k_1 z}{\eta_1 - j\eta_2 \operatorname{tg} k_1 z} \quad (4.166)$$

#### 4.7.2 Coeficiente de reflexión generalizado

El concepto de impedancia de onda es de gran utilidad en el estudio de situaciones en las que aparecen reflexiones múltiples, siempre que la incidencia sea normal y las ondas sean de tipo TEM<sup>36</sup>. Como hemos dicho anteriormente, podemos entender el fenómeno de la reflexión en relación con las variaciones de la impedancia de onda a lo largo de la dirección de propagación. Para ponerlo de manifiesto, consideremos un medio cualquiera, de impedancia intrínseca  $\eta$ . Supongamos que a través de este medio viajan dos ondas planas uniformes, según las direcciones  $\hat{k} = \hat{z}$  y  $\hat{k} = -\hat{z}$ . Llamemos onda progresiva a la primera de estas ondas y onda regresiva a la segunda. Asumiendo que la onda regresiva aparece en el medio como consecuencia de la reflexión, ya sea total o parcial, de la onda progresiva en algún punto del eje de propagación, podemos definir el *coeficiente de reflexión generalizado* como sigue:

<sup>36</sup> En realidad, con ello entramos en la teoría general de las *líneas de transmisión*, aunque su estudio detallado escapa al propósito de este libro.

$$\Gamma(z) \equiv \frac{E^-(z)}{E^+(z)} \quad (4.167)$$

donde  $E^+(z)$  es el campo eléctrico asociado a la onda progresiva y  $E^-(z)$  es el campo eléctrico asociado a la onda regresiva. Al ser ambas, ondas planas uniformes, podemos expresar  $\Gamma(z)$  de la forma

$$\Gamma(z) = \frac{E_0^- e^{jkz}}{E_0^+ e^{-jkz}} = \frac{E_0^-}{E_0^+} e^{2jkz} \quad (4.168)$$

La expresión (4.168) es aplicable a cualquier punto del eje de propagación. Expresa que el coeficiente de reflexión generalizado, mientras permanezcamos en un mismo medio, es una función continua de  $z$  que sólo variará en fase. Para que se produzcan variaciones en el módulo debe haber necesariamente un cambio de medio. Para cada medio distinto, debemos recalcular  $\Gamma(z)$  en función de las ondas presentes en él.

En la práctica, resulta conveniente referir el coeficiente de reflexión a un punto concreto (por ejemplo, la superficie de separación entre dos medios). Llamemos  $z_0$  a este punto. Según (4.168), el valor  $\Gamma_0$  que toma el coeficiente de reflexión en  $z_0$ , es

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma(z_0) = \frac{E_0^-}{E_0^+} e^{2jkz_0}$$

lo que nos permite reescribir dicha expresión de la forma<sup>37</sup>

$$\Gamma(z) = \Gamma(z_0) e^{2jk(z-z_0)} \quad (4.169)$$

Esta última expresión nos permite “trasladar” el valor  $\Gamma_0$ , obtenido para el coeficiente de reflexión en una superficie situada en el plano  $z = z_0$ , a cualquier punto del espacio donde nos interese hallar la relación entre los campos eléctricos de las ondas progresiva y regresiva.

---

<sup>37</sup> Una expresión de este tipo debe ser necesariamente cierta mientras no se produzcan variaciones en el medio. Nos dice que el valor del coeficiente de reflexión generalizado no puede cambiar en amplitud, sino solamente en su fase, dentro de un mismo medio. Las variaciones en amplitud se deben a cambios de medio.

### Relación entre impedancia de onda y coeficiente de reflexión

Una vez definido el coeficiente de reflexión generalizado, sólo nos queda determinar la relación existente entre éste y la impedancia de onda generalizada. Aplicando la definición (4.163) para la impedancia de onda al caso considerado en el que tenemos una componente progresiva y una componente regresiva obtenemos la expresión

$$Z(z) = \frac{E^+(z) + E^-(z)}{H^+(z) + H^-(z)} \quad (4.170)$$

en la que la relación entre los campos  $E^+(z)$  y  $E^-(z)$  se obtiene directamente a partir del coeficiente de reflexión generalizado. La relación entre los campos magnéticos,  $H^+(z)$  y  $H^-(z)$ , asociados, respectivamente, a las ondas progresiva y regresiva se obtiene como sigue

$$H^- = \frac{1}{\eta}(-\hat{z}) \times E^- = -\frac{1}{\eta} \hat{z} \times (\Gamma E^+) = -\Gamma H^+$$

Por consiguiente, podemos expresar (4.171) de la forma

$$\begin{aligned} Z(z) &= \frac{E^+(z) + \Gamma(z)E^+(z)}{H^+(z) - \Gamma(z)H^+(z)} = \frac{E^+(z)}{H^+(z)} \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} \\ &= \eta \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} \end{aligned} \quad (4.171)$$

ya que  $E^+(z)$  y  $H^+(z)$  corresponden a una onda plana uniforme que viaja en la dirección positiva del eje  $Z$ .

Esta última expresión, junto con (4.169), nos permite conocer la impedancia de onda en todos los puntos de un medio cualquiera si conocemos el valor del coeficiente de reflexión en un punto concreto del medio en cuestión.

La relación inversa correspondiente, obtenida despejando  $\Gamma(z)$  en (4.171), es

$$\Gamma(z) = \frac{Z(z) - \eta}{Z(z) + \eta} \quad (4.172)$$

Aunque en apariencia las expresiones (4.171) y (4.172) representan las dos caras de la misma moneda, existe una diferencia fundamental entre ambas. Por un lado, como hemos dicho anteriormente,  $\Gamma(z)$  es una función continua dentro de un mismo medio. En el paso de un medio a otro, en cambio, presenta discontinuidades en la superficies de separación. La



impedancia de onda generalizada  $Z(z)$ , por el contrario, *es una función continua siempre*. Para ponerlo de manifiesto, volvamos a la definición (4.163) para ondas planas. La razón de esta continuidad hay que buscarla en la continuidad de las componentes tangenciales del campo. Si recordamos las diversas situaciones estudiadas hasta ahora, podemos comprobar que en todos los casos el punto de partida eran las condiciones de contorno para las componentes tangenciales, que debían ser continuas en la transición entre dos medios dieléctricos<sup>38</sup> (obviamente, debían serlo también dentro de un mismo medio). Desde este punto de vista, el papel que desempeña la impedancia de onda generalizada consiste en condensar las condiciones de contorno en una única expresión, de aplicación general. En este sentido, podemos decir que la presente sección constituye un compendio o culminación de todo lo visto en las secciones de la 4.1 a la 4.3.

Una vez obtenidas las expresiones (4.171) y (4.172), veamos a continuación cómo podemos aplicarlas a la resolución de una situación concreta. Para empezar, digamos que la clave reside en lo que acabamos de comentar en el párrafo precedente: dentro de un mismo medio, la continuidad de la función  $\Gamma(z)$  nos permite calcular en todo momento la relación entre las ondas progresiva y regresiva en el medio en cuestión; en las superficies de separación entre dos medios distintos, la continuidad de la función  $Z(z)$  nos permite superar las discontinuidades que aparecen en  $\Gamma(z)$ . De este modo, somos capaces de “saltar” sucesivamente de un medio al siguiente.

Para ilustrar el procedimiento, volvamos al ejemplo planteado al principio de esta sección. Según la figura 4.29b, en la región III tenemos una onda plana uniforme. En esta región, pues, la impedancia de onda coincide con la impedancia intrínseca del medio, según hemos visto en el ejemplo 4.9a. Tenemos, por lo tanto

$$Z(z) = \eta_3 \quad z > 0$$

Según (4.172) el coeficiente de reflexión en la superficie del medio, situada en  $z = 0$ , es

$$\Gamma_{II}(0) = \frac{Z(0) - \eta_2}{Z(0) + \eta_2} = \frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 + \eta_2} \equiv \rho_{23}$$

donde lo hemos denominado de este modo debido a la coincidencia que presenta con la expresión (4.43), obtenida en la sección 4.3.1. Esta coincidencia no es casual en modo alguno, ya que la situación en la superficie  $z = 0$  es idéntica a la planteada en la figura 4.12. Empleando, a continuación, las expresiones (4.169) y (4.171), obtenemos, en la región  $-d < z < 0$

---

<sup>38</sup> Por otro lado, la introducción de la impedancia intrínseca compleja nos permite extender esta continuidad al caso en que un medio (o ambos a la vez) sea un conductor.

$$Z(z) = \eta_2 \frac{1 + \Gamma_{II}(z)}{1 - \Gamma_{II}(z)} = \frac{1 + \rho_{23} e^{2jk_2 z}}{1 - \rho_{23} e^{2jk_2 z}}$$

Multiplicando numerador y denominador por  $e^{-jk_2 z}$  y descomponiendo los términos exponenciales en senos y cosenos, resulta la expresión

$$Z(z) = \eta_2 \frac{\eta_3 \cos k_2 z - j\eta_2 \sin k_2 z}{\eta_2 \cos k_2 z - j\eta_3 \sin k_2 z} = \eta_2 \frac{\eta_3 - j\eta_2 \operatorname{tg} k_2 z}{\eta_2 - j\eta_3 \operatorname{tg} k_2 z} \quad -d < z < 0$$

para la impedancia de onda en la región II. En este caso, la coincidencia se produce con la expresión (4.166), obtenida para la onda estacionaria mixta del ejemplo 4.9c. Este resultado no debe sorprendernos, ya que la expresión utilizada para el coeficiente de reflexión es la misma en ambos casos.

Pasemos ahora a la segunda superficie, situada en  $z = -d$ . El valor que toma la impedancia de onda en esta superficie, según la expresión anterior es

$$Z(-d) = \eta_2 \frac{\eta_3 + j\eta_2 \operatorname{tg} k_2 d}{\eta_2 + j\eta_3 \operatorname{tg} k_2 d}$$

El coeficiente de reflexión correspondiente se obtiene utilizando de nuevo la expresión (4.172)

$$\Gamma_I(-d) = \frac{Z(-d) - \eta_1}{Z(-d) + \eta_1} = \frac{\eta_2(\eta_3 + j\eta_2 \operatorname{tg} k_2 d) - \eta_1(\eta_2 + j\eta_3 \operatorname{tg} k_2 d)}{\eta_2(\eta_3 + j\eta_2 \operatorname{tg} k_2 d) + \eta_1(\eta_2 + j\eta_3 \operatorname{tg} k_2 d)} \quad (4.173)$$

Conviene expresar, mediante el subíndice correspondiente (I, II o III) la región a la que referimos el coeficiente de reflexión, ya que, como hemos dicho anteriormente, la función  $\Gamma(z)$  es discontinua en los puntos en los que se produce un cambio de medio.

Finalmente, utilizando otra vez las expresiones (4.169) y (4.171), obtendríamos la expresión para la impedancia de onda en la región I. En los sistemas en los que aparecen más de tres capas, debe repetirse este proceso de forma iterativa en las diversas capas, empezando siempre por la última. Si ésta es un conductor perfecto, deberemos tomar  $Z_{\text{cond}}(z) = 0$  como valor de partida.

#### **Ejemplo 4.10:** Recubrimientos antirreflectantes

Una aplicación típica de los sistemas de multicapas dieléctricas se encuentra en la fabricación de recubrimientos antirreflectantes para superficies ópticas. Una capa antirreflectante presenta un coeficiente de reflexión nulo para la incidencia de

ondas planas a una cierta frecuencia. El caso más sencillo es un sistema de tres capas como el que acabamos de analizar, en el que la capa intermedia (la capa II) se introduce a modo de recubrimiento para evitar la reflexión que se produciría si las capas I y II estuviesen en contacto directo. En este caso, *existen dos situaciones distintas para las que se cumple la condición de reflexión nula*,  $\Gamma_1(-d) = 0$ , las cuales se obtienen a partir de la expresión (4.173) (es preferible, sin embargo, multiplicar previamente numerador y denominador por  $\cos k_2 d$ ). En la primera, la condición de reflexión nula se obtiene cuando se verifica

$$\eta_3 = \eta_1, \quad d = m \frac{\lambda_2}{2}$$

con  $m$  entero (la obtención de este resultado aparece propuesta como ejercicio al final del capítulo). Sin embargo, un sistema de estas características no es viable como recubrimiento antirreflectante. En un sistema típico,  $\eta_3$  representa el medio sobre el que se aplica el recubrimiento, mientras que  $\eta_1$  será, mayormente, el aire o un gas, o bien una solución líquida, por lo que tendrán valores distintos. Por fortuna, en la segunda situación de reflexión nula, se verifica, simultáneamente

$$\eta_2 = \sqrt{\eta_1 \eta_3}, \quad d = (2m + 1) \frac{\lambda_2}{4}$$

(donde  $m$  puede ser un número entero cualquiera), lo que permite que pueda ser aplicada como recubrimiento antirreflectante.

Del resultado anterior se deduce que un recubrimiento es totalmente antirreflectante únicamente para una determinada longitud de onda. En general, el coeficiente de reflexión generalizado es una función que depende de la longitud de onda empleada (ver, por ejemplo, la expresión (4.173), aplicable a un recubrimiento de una capa). Si se trabaja con ondas no monocromáticas, es necesario emplear recubrimientos de más de una capa. Un procedimiento empleado habitualmente, aunque su justificación exigiría un análisis detallado, consiste en añadir al conjunto capas de grosor  $\lambda/2$  para la longitud de onda óptima. Cada una de estas capas aumenta el orden de la función  $\Gamma(\lambda)$  y hace que el nulo sea más pronunciado en la longitud de onda de interés. De este modo se consigue una respuesta  $\Gamma(\lambda)$  tanto más plana cuanto mayor es el número de capas introducidas. En la figura 4.30 aparece la función correspondiente a sistema típico de cuatro capas.

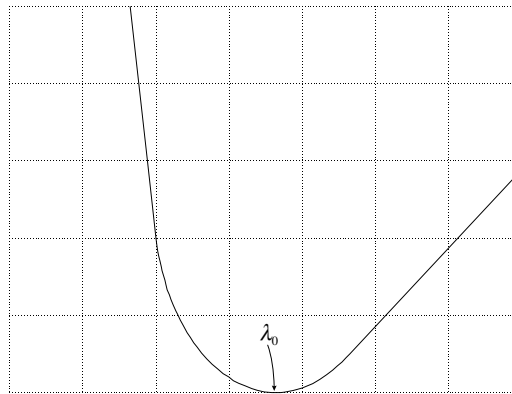


Fig. 4.30 Respuesta  $\Gamma(\lambda)$  para un recubrimiento típico de dos capas

#### PROBLEMAS - CAPÍTULO 4

1. Una onda plana que se propaga en el vacío tiene su campo eléctrico asociado en la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0 (\hat{x} + j\hat{y}) e^{-jk_0 z}$$

- Escriba la dirección de propagación, el tipo de polarización y su sentido de giro.
- Si la amplitud es  $E_0 = 1$  V/m calcule la potencia media transportada por la onda.

La onda incide sobre un plano conductor perfecto, situado en los puntos  $x=z$  (Fig. 1).

- Calcule el fasor del campo reflejado.  
¿Qué tipo de polarización tiene?
- Escriba la expresión del campo total existente en todo el espacio.
- Calcule el vector medio de Poynting y justifique ese resultado.
- En un plano paralelo a la superficie del conductor y a una distancia de 1 m la componente  $y$  del campo total se cancela. Sabiendo que esa es la distancia mínima a la que esto ocurre, ¿cuál es la frecuencia de la onda?

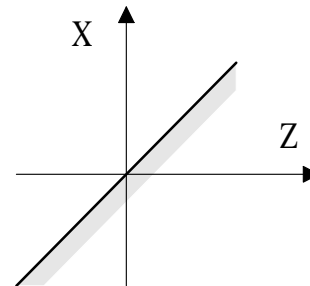


Fig. 1

2. Calcule los coeficientes de reflexión, en los casos de polarización paralela y perpendicular al plano de incidencia, para una onda plana uniforme que incide desde el aire en agua ( $\epsilon_r=81$ ) y en parafina ( $\epsilon_r=2$ ). Dibuje en una gráfica los resultados obtenidos.

3. Demuestre que cuando una onda plana con polarización paralela incide con el ángulo de Brewster sobre una lámina plano-paralela de cierto grosor no se produce reflexión en ninguna de las dos superficies.

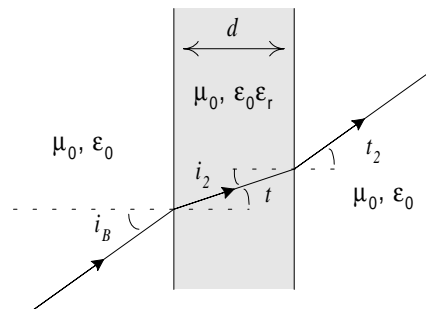


Fig. 2

4. Una onda plana uniforme de frecuencia  $f = 150$  MHz cuyo fasor campo eléctrico se escribe en la forma:

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = E_{0i} \left[ 2(2\hat{x} - \hat{z}) + j\frac{5\sqrt{5}}{2}\hat{y} \right] \exp(-j\vec{k}_i \cdot \vec{r})$$

incide oblicuamente desde un medio dieléctrico perfecto no magnético con índice de refracción  $n_1 = 2$  sobre el espacio vacío ( $n_2 = 1$ ), tal como se muestra en la figura 3.

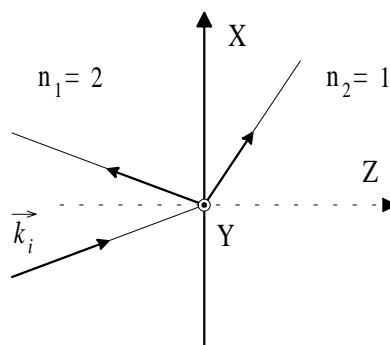


Fig. 3

- Obtenga el valor de los ángulos de incidencia y de refracción.
- Escriba las expresiones de los vectores de onda de las tres ondas: incidente, reflejada y transmitida.
- Identifique el tipo de polarización de la onda incidente.
- Calcule el ángulo de Brewster para una onda plana que incide desde el dieléctrico sobre el vacío.
- Calcule los coeficientes de reflexión y de transmisión para esta situación.

- f) Obtenga el fasor campo eléctrico de la onda transmitida.
- g) Identifique el tipo de polarización de las ondas reflejada y transmitida.
- h) Calcule el valor del ángulo crítico para este problema.

5. Se ha medido el coeficiente de reflexión para una onda plana con polarización lineal que incide desde un medio dieléctrico en la superficie de separación con el aire, para diferentes ángulos de incidencia. Los resultados obtenidos se representan en las figura 4.

A la vista de la forma de esas gráficas conteste a las siguientes cuestiones:

- a) ¿Cuál es la orientación del campo eléctrico incidente?
- b) Explique la forma de las gráficas en los tres intervalos de ángulos que se pueden distinguir:  $[0^\circ - 35,26^\circ]$ ,  $[35,26^\circ - 45^\circ]$  y  $[45^\circ - 90^\circ]$ .
- c) ¿Cuál es el índice de refracción del dieléctrico?
- d) Calcule el valor del ángulo de incidencia para el que el coeficiente de reflexión tiene una fase de  $-\pi/2$  rad.

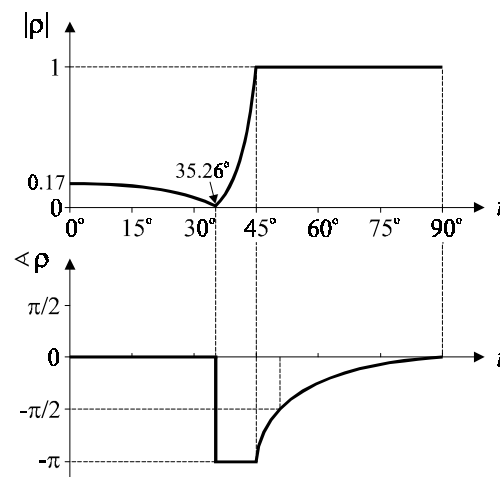


Fig. 4

6. Una onda electromagnética, con polarización lineal y perpendicular al plano de incidencia, de frecuencia  $f = 300$  MHz, viaja por un medio dieléctrico cuyo índice de refracción es  $n = 1,45$ , e incide sobre la superficie de separación con el aire. Al medir el campo eléctrico en el aire, en puntos cercanos a la superficie de separación, se comprueba que su amplitud se atenúa en la forma  $\exp(-6,3z)$ .

- a) ¿Con qué ángulo respecto a la normal a la superficie dieléctrico-aire está incidiendo la onda?
- b) Si la amplitud de la onda incidente fuese de 10 mV/m, ¿cuál sería la densidad de potencia reflejada hacia el dieléctrico?, ¿y la transmitida hacia el aire?
- c) Escriba la expresión del campo eléctrico total en el dieléctrico en función del coeficiente de reflexión (no es necesario que calcule éste explícitamente).

- d) ¿Se forman ondas estacionarias en el dieléctrico? ¿A qué distancia mínima podemos encontrar dos puntos en el dieléctrico en los que el fasor de campo eléctrico es nulo?, ¿en qué dirección debe medirse esa distancia mínima?

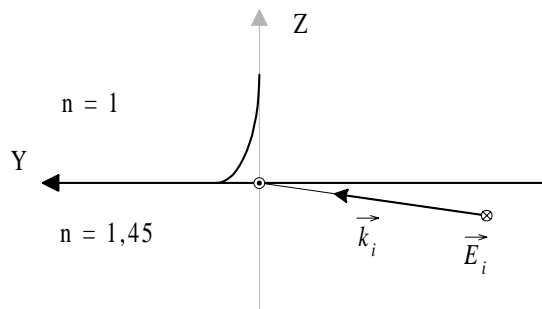


Fig. 5

7. Una onda plana uniforme polarizada elípticamente incide desde el aire sobre un medio dieléctrico de índice de refracción  $n$  (Fig.6). El fasor campo eléctrico de la onda incidente puede escribirse en la forma:

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = C(\hat{e}_{\perp i} + p e^{j\Delta\varphi} \hat{e}_{\parallel i}) e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}}$$

y se comprueba que la onda reflejada tiene polarización lineal, y la onda transmitida polarización circular y sentido de giro a derechas (viendo alejarse la onda). Con esa información conteste a las siguientes cuestiones:

- Obtenga las expresiones de  $p$  y de  $\Delta\varphi$  en función de  $n$ .
- Calcule la orientación de los ejes de la elipse de polarización de la onda incidente respecto a los ejes en los que se expresa la onda ( $\perp$  y  $\parallel$ ).
- Sabiendo que la relación axial de la elipse de polarización de la onda incidente es  $R=2$ , calcule el valor del índice de refracción del dieléctrico.

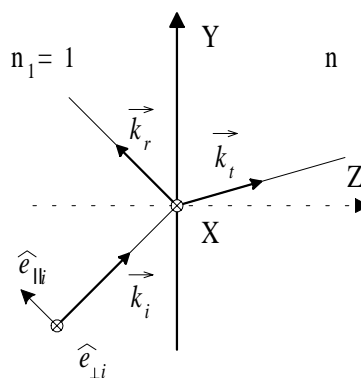


Fig. 6

8. Una onda plana uniforme incide con cierto ángulo sobre un diedro de paredes conductoras, tal como se muestra en la figura 7.

- Escriba la expresión del vector de onda incidente.
- Escriba la expresión del campo eléctrico de la onda incidente.
- ¿Qué otras ondas son necesarias para describir formalmente la situación? Escriba sus vectores de onda y los fasores de sus campos eléctricos, en función de la amplitud de la onda incidente.
- Obtenga las direcciones en que aparecen ondas estacionarias.
- ¿Cómo cambiará la dirección de la radiación emergente del diedro si recubrimos la pared interna del diedro situada en  $y=0$  con una lámina dieléctrica de grosor  $d$  e índice de refracción  $n$ ?

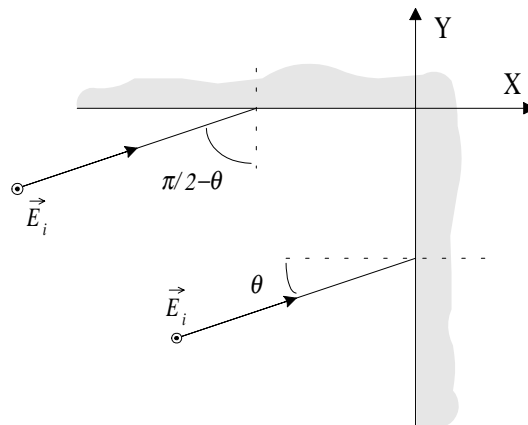


Fig. 7

9. Una onda plana incide normalmente sobre una lámina dieléctrica de índice de refracción  $n$  en la forma en que se muestra en la figura 8.

- Calcule el mínimo grosor  $d$  (distinto de cero) para el que no se produce reflexión hacia el aire.
- Si la relación de onda estacionaria en el dieléctrico toma el valor 2 ¿cuál es el índice de refracción de la lámina?

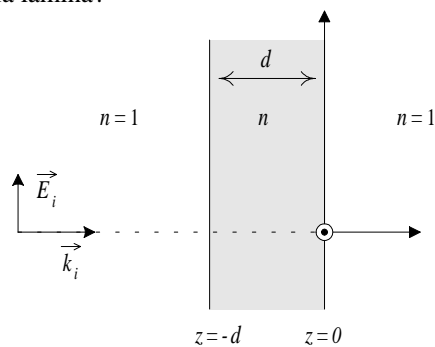


Fig. 8



## 5 Guías de onda

Parece evidente que, en cualquier situación realista en la que se quieran estudiar los campos dependientes del tiempo, deben existir límites o paredes en la región bajo análisis. En estos casos las soluciones para los campos en el medio no podrán ser, en general, ondas planas uniformes de extensión infinita, ya que, además de satisfacer las ecuaciones de Maxwell, deben cumplir las condiciones de frontera en los límites de la región que se considera. En este capítulo, avanzando un paso más en el grado de confinamiento de los campos respecto a las situaciones que se vieron en el capítulo anterior (con la presencia de medios semiinfinitos), se van a estudiar las *guías de onda*. Una guía de onda puede ser definida como una estructura destinada a la propagación dirigida y acotada de radiación electromagnética. El medio dieléctrico en el que esta propagación se produce está limitado, ya sea por un material conductor (para microondas y radiofrecuencia), ya sea por otro dieléctrico (para frecuencias ópticas). Desde el punto de vista geométrico las formas más comunes, aunque no únicas, de guías de onda tienen secciones rectangulares o cilíndricas.

### 5.1 Guías de onda y líneas de transmisión

Existen en la práctica numerosos tipos de estructuras que, con toda propiedad, pueden ser catalogadas como guías de onda. Tal y como se ha mencionado, se emplean para transmitir ondas electromagnéticas punto a punto de una forma eficiente. Por lo general se trata de señales de información de elevada frecuencia y que no podrían ser transmitidas por otros métodos, debido a que la transmisión no sería eficiente, como es el caso de las señales ópticas (que se transmiten preferentemente por fibra a grandes distancias, y no a través de la atmósfera), o bien porque producirían interferencias en otros equipos, como las microondas, entre 0,3 y 10 GHz. En este capítulo trataremos de los tipos más sencillos de guías de onda, como son las guías de paredes conductoras de sección rectangular o circular, el cable coaxial y las fibras ópticas. No se trata tampoco de un estudio completo, aunque sí suficientemente amplio como introducción a este tema. Existen otras estructuras, como las guías y fibras de sección elíptica, y las líneas *micro-strip*, así como las guías dieléctricas tipo canal, que tienen gran importancia tecnológica, algunas de las cuales se ven con detalle en cursos posteriores.

Las guías de onda deben ser tratadas a partir de los modos de vibración y propagación electromagnéticos que son capaces de soportar y, en general, no es posible establecer de forma inmediata un modelo circuital equivalente. En este aspecto se suelen distinguir de otras estructuras guantes, como sería, por ejemplo, un par bifilar, donde sí existe un modelo sencillo de análisis mediante tensiones y corrientes. A este segundo tipo de guías se las denomina *líneas de transmisión*. En este capítulo nos centraremos, sin embargo, casi exclusivamente, en el primero de los tipos mencionados.

## 5.2 Guías conductoras de sección rectangular

Vamos a considerar el caso de una guía de onda limitada en sus dos dimensiones transversales por un material conductor (que aproximaremos como perfecto) y en cuyo interior existe un medio dieléctrico lineal, homogéneo e isótropo (Fig. 5.1). La expresión de las ecuaciones de Maxwell en notación fasorial, excluyendo las fuentes (que son las que rigen para la propagación guiada), es:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{E} &= 0 & \nabla \times \vec{E} &= -j\omega\mu\vec{H} \\ \nabla \times \vec{H} &= j\omega\epsilon\vec{E} & \nabla \cdot \vec{H} &= 0\end{aligned}\quad (5.1) - (5.4)$$

Si el dieléctrico interior es no magnético, lo que, por otra parte, es una situación habitual, puede sustituirse en todas las expresiones  $\mu$  por  $\mu_0$ .

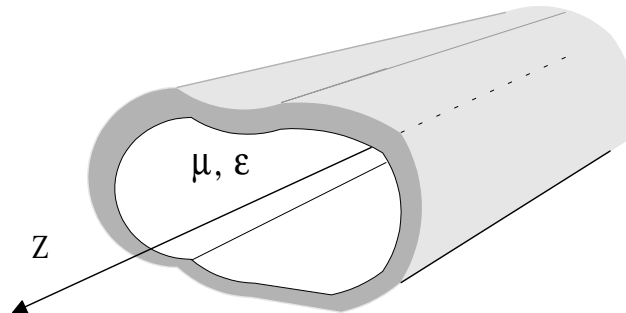


Fig. 5.1 Guía de paredes conductoras

De las anteriores se obtiene inmediatamente, como ya sabemos, la ecuación de onda, para uno u otro campo:

$$\nabla^2 \vec{E} = -\omega^2 \mu \epsilon \vec{E} \quad \nabla^2 \vec{H} = -\omega^2 \mu \epsilon \vec{H} \quad (5.5) - (5.6)$$

Tomaremos el eje Z como dirección de propagación de las ondas en el interior de la guía, y las direcciones X e Y serán siempre las direcciones transversales a la propagación. El tipo de soluciones que buscamos para las ecuaciones de arriba se escribe, en forma fasorial:

$$\vec{E}(x, y, z) = \vec{E}(x, y) e^{-j\beta z} \quad \vec{H}(x, y, z) = \vec{H}(x, y) e^{-j\beta z} \quad (5.7) - (5.8)$$

donde  $\beta$  es la llamada constante de propagación. A una solución del tipo (5.7)-(5.8) se le denomina *modo de propagación de la guía*, y se caracteriza porque su fase depende linealmente de z, la coordenada en la dirección de propagación, pero su amplitud es independiente de ella. Este tipo de soluciones no son, por sí mismas, completamente generales, pero constituyen *un conjunto completo*, esto es: cualquier posible onda que pueda propagarse en la guía puede escribirse mediante la adecuada combinación lineal de esas funciones.

Sustituyendo estas soluciones en las respectivas ecuaciones de onda resulta:

$$\nabla_t^2 \vec{E} + (\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2) \vec{E} = 0 \quad \nabla_t^2 \vec{H} + (\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2) \vec{H} = 0 \quad (5.9) - (5.10)$$

donde el símbolo  $\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  es la laplaciana transversal.

Mediante cierta manipulación matemática, y haciendo uso de las ecuaciones de Maxwell (5.1)-(5.4), pueden obtenerse relaciones muy útiles entre las componentes transversales y longitudinales de los campos:

$$(\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2) E_x = -j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} - j\beta \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (5.11)$$

$$(\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2) E_y = +j\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} - j\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} \quad (5.12)$$

$$(\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2) H_x = +j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - j\beta \frac{\partial H_z}{\partial x} \quad (5.13)$$

$$(\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2) H_y = -j\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} - j\beta \frac{\partial H_z}{\partial y} \quad (5.14)$$

por lo que es claro que, en cualquier tipo de guía, el conocimiento de las componentes longitudinales (las componentes en la dirección de propagación) nos permitirá hallar todas las demás. No es difícil de ver (compruébese) que sustituyendo esas cuatro relaciones en la ecuación de onda obtenemos, precisamente, dos ecuaciones desacopladas para las componentes longitudinales

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \omega^2 \mu \epsilon - \beta^2 \right) E_z = 0 \quad (5.15)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \omega^2 \mu \epsilon - \beta^2 \right) H_z = 0 \quad (5.16)$$

Sobre la superficie conductora, por aplicación de las condiciones de contorno, se cumplirá en todos los casos  $E_z = 0$  (demostrarlo) y, para el campo magnético,  $(\hat{n} \cdot \nabla) H_z = 0$  (demostrarlo).

A la hora de resolver (5.15) y (5.16) se comprueba que existen *dos tipos independientes de modos* que pueden satisfacerlas, junto a las condiciones de contorno:

En el primer caso se puede imponer  $E_z(x, y) = 0$ , en todos los puntos del interior de la guía, y tomar para  $H_z(x, y)$  una función que cumpla la condición de contorno arriba indicada. Las soluciones obtenidas se denominan ondas de tipo *transversal eléctrico* (TE), puesto que el campo eléctrico de la onda sólo tiene componentes transversales a la dirección de propagación,  $E_x$  y  $E_y$ .

En el segundo caso, tomamos  $H_z(x, y) = 0$  en todos los puntos, y  $E_z(x, y)$  debe ser tal que satisfaga la condición de contorno correspondiente. Las ondas resultantes son ahora del tipo *transversal magnético* o TM.

Finalmente, se tendrían ondas de tipo *transversal eléctrico y magnético* (TEM) si eligiésemos simultáneamente  $E_z = 0$  y  $H_z = 0$ . Esta última opción es posible en problemas similares; sin embargo, en guías huecas de paredes conductoras no resulta una solución adecuada. Para verlo se puede razonar del siguiente modo: si ambas componentes longitudinales fueran nulas, por las leyes de Gauss y de Faraday, resultaría que el campo eléctrico tendría divergencia y rotacional nulos (compruébese), es decir, se podría expresar el campo en función de un potencial escalar que cumpliría la ecuación de Laplace. Entonces, ya que  $\vec{E} = -\nabla \phi$ , y que la condiciones de contorno del campo sobre la superficie la fuerzan a ser equipotencial, resultaría que  $\phi = \text{constante}$  en todos los puntos sería una solución posible (y única), y el campo se anularía forzosamente (no habría onda). Sería diferente si en el interior de la guía hubiese otro conductor, aislado del conductor externo, porque entonces los potenciales en ambos podrían ser distintos, y sí serían posibles soluciones no triviales en ese contexto.

Lo dicho hasta aquí es válido para cualquier geometría de guía hueca de paredes conductoras. En lo que resta de este apartado nos centraremos en el estudio de la propagación en guías de sección rectangular, como la que se muestra en la figura 5.2, de

dimensiones  $a$  y  $b$ , según, respectivamente, los ejes  $X$  e  $Y$ , y con la suposición de que la guía se extiende infinitamente según la dirección de propagación  $Z$ .

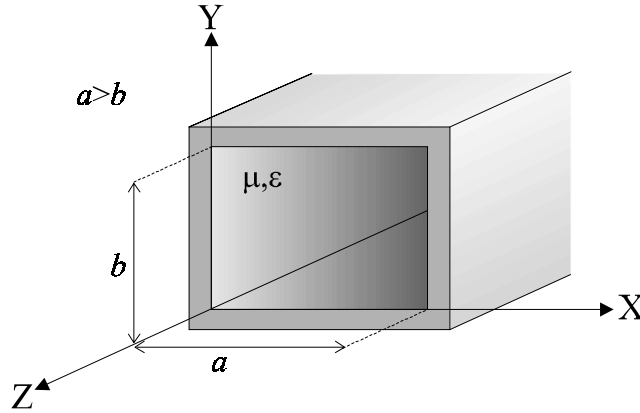


Fig. 5.2 Guía de onda conductora de sección rectangular

### 5.2.1 Modos de tipo transversal eléctrico (TE)

De acuerdo con la orientación de la guía (Fig. 5.2) podemos expresar la componente longitudinal de la onda (la del campo eléctrico es nula) en la forma:

$$H_z(x, y) = X(x)Y(y) \quad (5.17)$$

y, sustituyendo en la ecuación (5.16), resulta:

$$Y \frac{d^2 X}{dx^2} + X \frac{d^2 Y}{dy^2} + (\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2) XY = 0 \quad (5.18)$$

Dividiendo por  $XY$  se tiene:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = -k_x^2 \quad \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} = -k_y^2 \quad (5.19) - (5.20)$$

donde se debe cumplir, en todos los casos, la igualdad:

$$-k_x^2 - k_y^2 + \omega^2 \mu \epsilon - \beta^2 = 0 \quad (5.21)$$

Las soluciones generales de las anteriores ecuaciones son:

$$\begin{aligned} X(x) &= A \operatorname{sen} k_x x + B \cos k_x x \\ Y(y) &= C \operatorname{sen} k_y y + D \cos k_y y \end{aligned} \quad (5.22)$$

El siguiente paso consiste en aplicar las condiciones de contorno. Lo inmediato sería cancelar las componentes de campo eléctrico tangenciales a cada una de las paredes de la guía en los puntos inmediatamente próximos a cada conductor, sin embargo no disponemos todavía de la forma de ninguna de las dos componentes de campo eléctrico (salvo la longitudinal, pero ésta ya es nula en todo el interior de la guía). A la vista de las ecuaciones (5.13) y (5.14) surge otra posible estrategia: las componentes de campo magnético  $H_x$  y  $H_y$  son normales a las paredes conductoras (en cuyo grosor interior el campo magnético es nulo) y, por tanto, deben cancelarse en los puntos de la superficie. Se obtiene entonces:

$$\begin{aligned} H_x \Big|_{x=0, x=a} &= 0 \quad \rightarrow \quad A = 0, \quad k_x = \frac{m\pi}{a} \\ H_y \Big|_{y=0, y=b} &= 0 \quad \rightarrow \quad C = 0, \quad k_y = \frac{n\pi}{b} \end{aligned}$$

donde, a priori, son posibles cualesquiera valores enteros  $m, n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Finalmente tenemos la expresión de la componente longitudinal:

$$H_z(x, y) = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \quad (5.23)$$

donde hemos definido la amplitud  $H_0 = B \cdot D$ .

Esta solución corresponde a un modo genérico  $\text{TE}_{mn}$ , donde los subíndices se relacionan con el ritmo de variación transversal de los campos, en  $x$  e  $y$ , respectivamente.

La igualdad (5.21) puede expresarse ahora más explícitamente:

$$\beta_{m,n} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \quad (5.24)$$

donde se ha escrito  $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$ . Esta fórmula, que relaciona la constante de propagación de cada modo con la frecuencia, recibe el nombre de *relación de dispersión* en la guía. Volveremos sobre ella más adelante.

Si, a continuación, sustituimos (5.23) en (5.11) y (5.12), obtendremos, para los modos TE:

$$E_x(x, y) = -j\omega\mu \frac{\frac{n\pi}{b}}{(\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2} H_0 \cos(\frac{m\pi}{a}x) \sin(\frac{n\pi}{b}y) = \frac{\omega\mu}{\beta} H_y \quad (5.25)$$

$$E_y(x, y) = j\omega\mu \frac{\frac{m\pi}{a}}{(\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2} H_0 \sin(\frac{m\pi}{a}x) \cos(\frac{n\pi}{b}y) = -\frac{\omega\mu}{\beta} H_x \quad (5.26)$$

y lo mismo podría hacerse con (5.13) y (5.14) para el cálculo de las componentes transversales del campo magnético.

La conclusión importante de todo el desarrollo anterior, y a falta de una posterior profundización, es la siguiente: existen soluciones en forma de modos de propagación, cuya amplitud permanece constante y con una variación lineal en la fase a lo largo de la guía. Esos modos forman un conjunto discreto de soluciones, y se obtienen individualmente dando valores enteros a  $m$  y a  $n$ . La constante de propagación es diferente, en principio, para cada uno de esos modos.

### 5.2.2 Modos de tipo transversal magnético (TM)

La obtención de los modos TM sigue los mismos pasos que en la sección anterior. Ahora la separación de variables la utilizamos en la forma:

$$E_z(x, y) = X(x)Y(y) \quad (5.27)$$

y, sustituyendo en la ecuación de onda, llegaremos de nuevo al tipo de solución mostrado en (5.21) y (5.22).

Las condiciones de contorno se aplican inmediatamente, puesto que  $E_z$  es una componente de campo eléctrico tangencial a las cuatro paredes de la guía, y debe cancelarse junto a todas ellas. Su expresión final, como puede comprobarse fácilmente, es:

$$E_z(x, y) = E_0 \sin(k_x x) \sin(k_y y) \quad (5.28)$$

y donde, de nuevo, se satisfacen las relaciones siguientes:

$$k_x = \frac{m\pi}{a}, \quad k_y = \frac{n\pi}{b} \quad \text{y} \quad \beta_{m,n} = \sqrt{k^2 - k_x^2 - k_y^2}$$

Si sustituimos la expresión (5.28) en (5.13) y (5.14) obtendremos las demás componentes:

$$H_x(x, y) = -j\omega\epsilon \frac{\frac{n\pi}{b}}{(\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2} E_0 \sin(\frac{m\pi}{a} x) \cos(\frac{n\pi}{b} y) = -\frac{\omega\epsilon}{\beta} E_y \quad (5.29)$$

$$H_y(x, y) = j\omega\epsilon \frac{\frac{m\pi}{a}}{(\frac{m\pi}{a})^2 + (\frac{n\pi}{b})^2} E_0 \cos(\frac{m\pi}{a} x) \sin(\frac{n\pi}{b} y) = \frac{\omega\epsilon}{\beta} E_x \quad (5.30)$$

y de (5.11) y (5.12) pueden obtenerse las componentes transversales de campo eléctrico.

**Ejemplo 5.1:** Compruebe cualitativamente que la aparición de dos familias de modos, TE y TM, en guías de paredes planas tiene sentido físico. Para ello imagine que una onda plana con polarización lineal incide oblicuamente, desde el exterior, sobre una de las superficies interiores de la guía. Deduzca qué componentes de campo existirán en el modo así formado en función de la orientación de los campos incidentes.

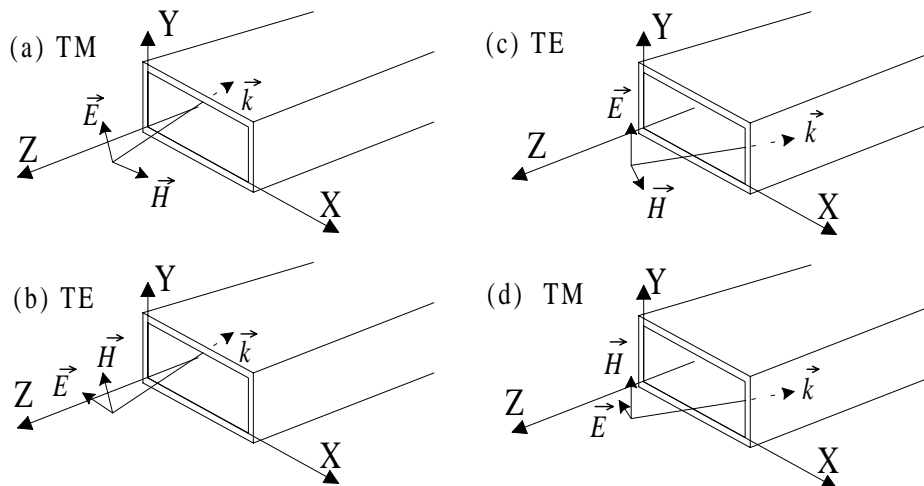


Fig. 5.3 Origen de las dos familias de modos en guías rectangulares

Aunque este ejercicio no reviste el carácter de una demostración, sí resulta suficientemente clarificador. En la figura 5.3 se muestran cuatro posibilidades de incidencia de una onda plana uniforme sobre las paredes interiores de la guía, con polarización paralela y perpendicular al plano de incidencia en cada caso. Un modo cualquiera TE puede excitarse incidiendo simultáneamente con dos ondas, en la



forma que se muestra en las figuras (b) y (c), y un modo TM con las ondas (a) y (d). En general cualquier otro tipo de incidencia podría reducirse a una combinación adecuada de las anteriores, luego cualquier onda que pueda excitarse en el interior de la guía responde a alguna combinación de los modos de la guía.

### 5.2.3 Modos guiados y modos en corte. Curvas de dispersión

Hemos visto que la constante de propagación de un modo  $TE_{mn}$  o  $TM_{mn}$  se puede escribir como:

$$\beta_{m,n} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} \quad (5.31)$$

De esta expresión se comprueba que la constante de propagación se mantendrá real siempre que:

$$\omega^2 \mu \epsilon \geq \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (5.32)$$

y, por lo tanto, sólo para un conjunto finito de valores de  $m$  y de  $n$ . Este hecho es de una importancia fundamental en la teoría de guías de onda. Si el par de valores escogidos para los enteros  $m$  y  $n$  son tales que la condición (5.32) no se satisface, tendremos un caso en el que la constante de propagación pasa a ser un valor imaginario puro, en la forma:

$$\beta_{mn} = \pm j\alpha_{mn}$$

y el término de propagación del modo,  $e^{-j\beta z}$ , se convierte en un término de atenuación,  $e^{-\alpha z}$  (no tomamos otro signo por razones físicas). Como consecuencia, no tendremos una onda capaz de propagarse en la guía, sino una onda amortiguada en la dirección  $Z$  que tenderá rápidamente a extinguirse. Inversamente, para un modo cualquiera (es decir, fijados los valores de  $m$  y  $n$ ) debe existir una frecuencia mínima,  $f_{Cmn}$ , por debajo de la cual la constante de propagación pasa a ser imaginaria, y el modo no podrá propagarse. A esa frecuencia se la denomina *frecuencia de corte* del modo. Asimismo, a un modo en esas condiciones se le denomina *modo en corte*. Los modos usuales, con  $\beta$  real, que son capaces de transmitir información a lo largo de la guía, se conocen como *modos guiados*.

En la figura 5.4 se ha representado lo que podría ser el tipo de variación en las direcciones transversales de una componente de campo eléctrico de un modo TE, para un modo guiado (a) y para un modo en corte (b). La diferencia está en que el modo en corte tiene siempre un ritmo de variación más alto, en, al menos, una de las direcciones transversales. Obsérvese que, en cualquier caso, la representación gráfica completa de un modo sería mucho más prolija que su descripción matemática (con todas sus componentes de campo eléctrico y magnético).

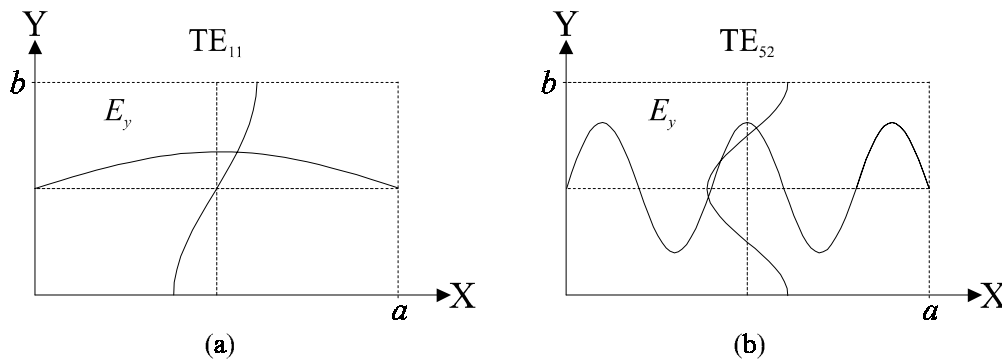


Fig. 5.4 Variación transversal de una componente de campo  
(a) de un modo guiado y (b) de un modo en corte

Estamos interesados en conocer las características de esos modos guiados, que son los que tienen un interés básico, aunque los modos en corte, como soluciones posibles del problema electromagnético, son importantes cuando se tratan problemas de excitación frontal de guías, o de transiciones entre guías de onda. Por el momento, para nuestros propósitos de conocer el comportamiento de las ondas en la guía, el parámetro que tiene mayor importancia es el de frecuencia de corte, que nos indicará cuándo pueden aparecer nuevos modos guiados si vamos aumentando la frecuencia de excitación. La frecuencia de corte de un modo puede escribirse como:

$$f_{Cmn} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \left[ \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.33)$$

y es la frecuencia mínima a la que tal modo puede propagarse.

La constante de propagación puede expresarse en función de la frecuencia de corte:

$$\beta_{mn} = 2\pi f \sqrt{\mu\epsilon} \left[ 1 - \left( \frac{f_{Cmn}}{f} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.34)$$

Otro parámetro de interés es el de *longitud de onda en la guía*, que se define como la distancia entre dos planos de fase consecutivos. Para comprender que tal definición tiene sentido debe observarse que un modo no es sino una onda plana (los frentes de onda son planos perpendiculares a Z, la dirección de propagación) aunque no uniforme. Todas las componentes no nulas de campo eléctrico o magnético repiten su fase cada distancia recorrida igual a:

$$\lambda_{mn} = \frac{2\pi}{\beta_{mn}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{c_{mn}}}{f}\right)^2}} \quad (5.35)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda correspondiente a la frecuencia  $f$  en el medio que constituye el interior de la guía de onda (por tanto, la que correspondería a una onda plana uniforme propagándose en ese medio, supuesto ilimitado).

Suelen expresarse las características fundamentales de la guía gráficamente, mediante las llamadas *curvas de dispersión* (Ec. (5.31)). Estas curvas muestran la relación entre la pulsación angular  $\omega$  y la constante de propagación  $\beta$ , para los diferentes modos posibles. Se han representado para un caso particular en la figura 5.5.

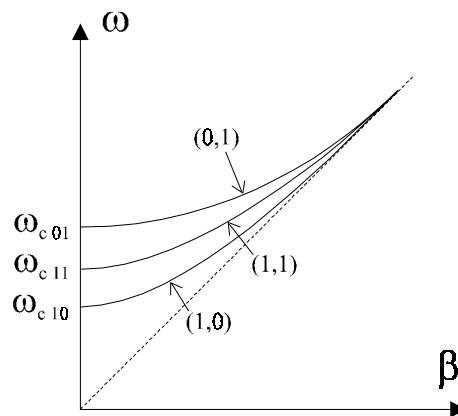


Fig. 5.5 Curvas de dispersión de una guía de onda

El diagrama de dispersión ( $\omega$ - $\beta$ ) comienza, para cada modo, en la frecuencia de corte  $\omega_c$ . Para una frecuencia fijada, la velocidad de fase de un modo viene dada por:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta_{mn}} \quad (5.36)$$

que coincide con la pendiente de la línea que une el origen con el punto del diagrama de radiación correspondiente al modo y a la frecuencia.

$$\lambda_{mn} = \frac{2\pi}{\beta_{mn}} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{f_{c_{mn}}}{f}\right)^2}} \quad (5.35)$$

donde  $\lambda$  es la longitud de onda correspondiente a la frecuencia  $f$  en el medio que constituye el interior de la guía de onda (por tanto, la que correspondería a una onda plana uniforme propagándose en ese medio, supuesto ilimitado).

Suelen expresarse las características fundamentales de la guía gráficamente, mediante las llamadas *curvas de dispersión* (Ec. (5.31)). Estas curvas muestran la relación entre la pulsación angular  $\omega$  y la constante de propagación  $\beta$ , para los diferentes modos posibles. Se han representado para un caso particular en la figura 5.5.

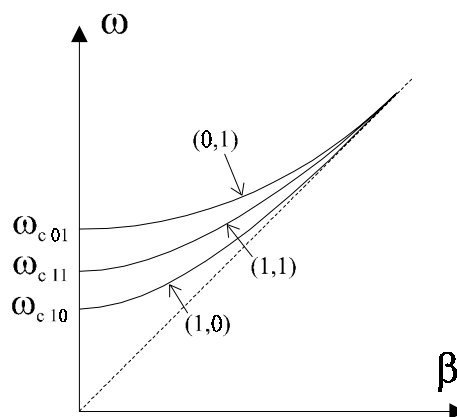


Fig. 5.5 Curvas de dispersión de una guía de onda

El diagrama de dispersión ( $\omega$ - $\beta$ ) comienza, para cada modo, en la frecuencia de corte  $\omega_c$ . Para una frecuencia fijada, la velocidad de fase de un modo viene dada por:

$$v_f = \frac{\omega}{\beta_{mn}} \quad (5.36)$$

que coincide con la pendiente de la línea que une el origen con el punto del diagrama de dispersión correspondiente al modo y a la frecuencia.

### 5.2.4 Modo dominante TE<sub>10</sub>

Se denomina modo dominante, o modo fundamental, de la guía de onda a aquel cuya frecuencia de corte es menor. Si partimos de una frecuencia elevada y con numerosos modos excitados en la guía, y vamos disminuyendo paulatinamente la frecuencia, sería el último modo en desaparecer (en entrar en corte).

A partir de la ecuación (5.33), y si asumimos que las dimensiones transversales de la guía cumplen la relación  $a > b$  (Fig. 5.2), podemos ver que el modo de menor frecuencia de corte es el de orden 10 (uno-cero). Se comprueba, además, que los modos TM comienzan en el modo TM<sub>11</sub> (en general no son posibles los modos TM<sub>m0</sub> ni los TM<sub>0n</sub>), por lo que el modo fundamental es el modo TE<sub>10</sub>.

El siguiente modo será el de orden 01, 20 o, incluso, 30, en función de cuál sea la relación concreta entre las dimensiones  $a$  y  $b$  de la guía.

Las frecuencia de corte de los posibles primeros modos son:

$$\begin{aligned} (f_c)_{10} &= \frac{1}{2a\sqrt{\mu\epsilon}}, & (f_c)_{01} &= \frac{1}{2b\sqrt{\mu\epsilon}}, & (f_c)_{20} &= \frac{1}{a\sqrt{\mu\epsilon}}, \\ (f_c)_{11} &= \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} \end{aligned} \quad (5.37)$$

En el caso particular en que  $a = b$  ocurre que los modos TE<sub>10</sub> y TE<sub>01</sub> tienen la misma frecuencia de corte y, de hecho, la misma constante de propagación ( $\beta_{10} = \beta_{01}$ ). Cuando esto sucede se dice que son *modos degenerados*.

La expresión particular del modo dominante TE<sub>10</sub> (si  $a > b$ ) es:

$$\begin{aligned} E_x &= 0 & H_x &= -j\beta_{10}H_0 \frac{a}{\pi} \sin \frac{\pi}{a}x e^{-j\beta_{10}z} \\ E_y &= j\omega\mu H_0 \frac{a}{\pi} \sin \frac{\pi}{a}x e^{-j\beta_{10}z} & H_y &= 0 \\ E_z &= 0 & H_z &= H_0 \cos \frac{\pi}{a}x e^{-j\beta_{10}z} \end{aligned} \quad (5.38)$$

**Ejemplo 5.2:** Sea una guía rectangular, de dimensiones  $a=2,0$  cm y  $b=1,3$  cm, cuyo interior es aire. Calcule la frecuencia de corte de los tres primeros modos guiados.

Podemos hacer una tabla con los primeros valores de  $m$  y  $n$  para los posibles modos.

$f_c$ (GHz)	$n=0$	$n=1$	$n=2$
$m=0$	-	11,538	23,077
$m=1$	7,500	13,762	...
$m=2$	15,000	...	...

No es necesario calcular más valores. El modo fundamental es el  $TE_{10}$ , cuya frecuencia de corte es 7,5 GHz. Los dos siguientes son el  $TE_{01}$  y el  $TE_{11}$  (o el  $TM_{11}$ ).

### 5.2.5 Potencia transmitida

A partir de la expresión de la densidad media de potencia podrá calcularse la potencia que transporta un modo a lo largo de la guía (eje  $Z$ ). Es claro que en las direcciones transversales la situación es estacionaria y no puede haber ningún flujo neto de potencia.

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E}_x \vec{H}^*] \rightarrow \vec{P}_m = \frac{1}{2} \text{Re}[E_x H_y^* - H_x^* E_y] \hat{z} \quad (5.39)$$

Si recordamos que para modos TE y TM se cumplen las relaciones (vease Ecs. (5.25) y (5.26) para un caso, y (5.29) y (5.30) para el otro):

$$\frac{E_x}{H_y} = Z_{mn} \quad \frac{E_y}{H_x} = -Z_{mn}$$

(donde  $Z_{mn} = Z_{TEmn}$  o  $Z_{mn} = Z_{TMmn}$  son las impedancias de onda respectivas), podemos escribir la densidad de potencia como:

$$\vec{P}_{mn} = \frac{1}{2} \frac{|E_x|^2 + |E_y|^2}{Z_{mn}} \hat{z} \quad (W/m^2) \quad (5.40)$$

La potencia media transportada se obtiene, finalmente, como la integral del flujo del vector de Poynting a través de una sección cualquiera de la guía:

$$W_{mn} = \int_{y=0}^{y=b} \int_{x=0}^{x=a} \vec{P}_{mn} \cdot \hat{z} dx dy \quad (W) \quad (5.41)$$

### 5.2.6 Atenuación

En la práctica, la propagación guiada de la energía electromagnética presenta pérdidas, que se ponen de manifiesto en una disminución de la potencia transmitida. Las pérdidas en una guía de paredes conductoras se deben a dos causas: al hecho de que el dieléctrico interior no es perfecto, (lo cual debe caracterizarse más cuidadosamente con una permitividad compleja), y a que el conductor tiene una conductividad finita.

Vimos (sección 3.4) que la permitividad de un dieléctrico real debe escribirse en la forma  $\epsilon^* = \epsilon' - j\epsilon'' = \epsilon - j\frac{\sigma}{\omega}$ , donde  $\epsilon$  es la permitividad del material sin pérdidas y  $\sigma$  su conductividad efectiva. Por otro lado, se define la impedancia superficial de un conductor no perfecto como:

$$Z_s = R_s + jX_s = \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\sigma}}(1 + j) \quad (5.42)$$

La definición de esta impedancia está relacionada con el hecho de que *en un conductor no perfecto la componente tangencial de campo eléctrico no es estrictamente nula en su superficie* (aunque es tan pequeña que para el resto de cuestiones seguiremos considerándola despreciable) y, como consecuencia, la densidad de corriente que se induce en la pared del conductor tampoco es estrictamente superficial, sino que logra penetrar en alguna medida en el interior del conductor. Esa corriente (y el propio campo eléctrico) es la responsable de las pérdidas, que dan pie a la expresión (5.42).

Veamos por separado ambos efectos en la propagación de un modo en la guía.

#### *Pérdidas dieléctricas*

Para un modo  $TE_{mn}$  o  $TM_{mn}$  la constante de propagación será ahora:

$$\beta_{mn} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon \left(1 - j \frac{\sigma}{\omega \epsilon}\right) - \pi^2 \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right]} \quad (5.43)$$

o bien, después de algunas manipulaciones:

$$\beta_{mn} = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \pi^2 \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right]} \left\{ 1 - j \sigma \omega \mu \left[ \omega^2 \mu \epsilon - \pi^2 \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right] \right]^{-1} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (5.44)$$

Podemos hacer ahora la suposición de que:

$$\frac{\sigma\omega\mu}{\omega^2\mu\epsilon - \pi^2\left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right]} \ll 1 \quad (5.45)$$

que se cumple para buenos dieléctricos y, mediante un desarrollo en serie de Taylor de la segunda raíz cuadrada de (5.44), llegaremos a:

$$\beta_{mn} = \sqrt{\omega^2\mu\epsilon - \pi^2\left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right]} - j\frac{\sigma\omega\mu}{2}\left[\omega^2\mu\epsilon - \pi^2\left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right]\right]^{-\frac{1}{2}} \quad (5.46)$$

Entonces el término imaginario de  $\beta$  provoca la aparición de un término de atenuación en la dirección  $z$ , del tipo  $\exp(-j\alpha_{mn}z)$ . Si recordamos la fórmula (5.34) para la frecuencia de corte del modo, podemos simplificar la expresión de  $\alpha_{mn}$ :

$$\alpha_{mn} = \frac{\sigma}{2} \frac{\sqrt{\mu/\epsilon}}{\sqrt{1 - \frac{f_{Cmn}^2}{f^2}}} = \frac{1}{2} \frac{\sigma\eta}{\sqrt{1 - \frac{f_{Cmn}^2}{f^2}}} \quad (5.47)$$

que se ha escrito en función de  $\eta$ , la impedancia intrínseca del medio (sin pérdidas).  $\alpha_{mn}$  recibe el nombre de constante de atenuación del medio para pérdidas dieléctricas.

#### *Pérdidas óhmicas o de conducción*

Para calcular la potencia  $W_C$  absorbida y disipada en forma de calor por cada una de las cuatro superficies  $S_i$  de la guía puede utilizarse una expresión análoga a la de pérdidas óhmicas debida a una resistencia  $R$  utilizada en teoría de circuitos:

$$W_C = \frac{1}{2} RI^2$$

donde  $R = R_s = \sqrt{\omega\mu/2\sigma}$  según la expresión (5.42). Si denominamos  $\vec{J}_s$  a la densidad de corriente superficial se tiene:



$$W_C = \frac{R_s}{2} \iint_{S_i} \vec{J}_{S_i} \cdot \vec{J}_{S_i}^* dS_i \quad (5.48)$$

con  $\vec{J}_{S_i} = \hat{n} \times \vec{H}|_{S_i}$ . La suma de todas las pérdidas producidas sobre las cuatro superficies puede ser relacionada posteriormente con un coeficiente de atenuación  $\alpha_c$ , para conseguir una expresión más cómoda de manejar. Para ello procederemos de la siguiente manera: si  $W_0$  corresponde a la potencia transportada por un modo en un punto cualquiera de la guía, que tomamos como  $z=0$  por sencillez, entonces, la potencia  $W(z)$  en un punto  $z$  se relaciona con la anterior mediante la expresión habitual:

$$W(z) = W_0 \exp(-2\alpha_c z) \quad (5.49)$$

donde el '2' de la exponencial obedece a que se trata de la atenuación de la potencia, que es cuadrática respecto a los campos.

La potencia disipada por el conductor durante una distancia de propagación  $z=l$  puede aproximarse en general en la forma:

$$W_C|_{z=l} = W_C|_{z=0} + l \left. \frac{dW_C}{dz} \right|_{z=0} = 0 - l \left. \frac{dW(z)}{dz} \right|_{z=0} = l 2\alpha_c W_0$$

y de allí:

$$\alpha_c = \frac{|W_C|_{z=l}}{2W_0 l} \quad (5.50)$$

expresión en la que  $W_C$  puede calcularse a partir de (5.48) y  $W_0$  mediante (5.41).

### 5.3 Guías conductoras de sección circular

Para estudiar la propagación de una onda electromagnética en guías de sección circular (Fig. 5.6) debe expresarse la ecuación de onda en coordenadas cilíndricas (vease apéndice B)

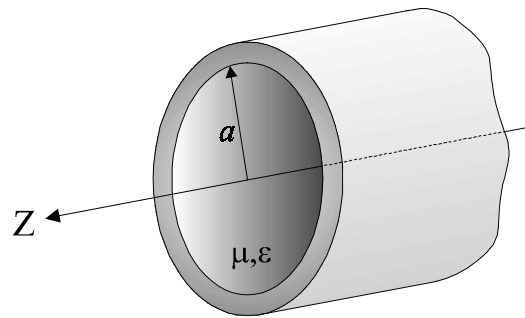


Fig. 5.6 Geometría de la guía circular

### 5.3.1 Modos TM

Si se aplica la ecuación de onda a la componente longitudinal ( $E_z$ ) del campo eléctrico tenemos:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} = -(\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2) E_z \quad (5.51)$$

con:

$$E_z = E_z(\rho, \varphi) e^{-j\beta z} = R(\rho) \Phi(\varphi) e^{-j\beta z} \quad (5.52)$$

por la simetría de la guía, y sustituyendo resulta:

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left( \alpha^2 - \frac{n^2}{\rho^2} \right) R = 0 \quad (5.53)$$

y

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + n^2 \Phi = 0 \quad (5.54)$$

donde  $\alpha = (\omega^2 \mu \epsilon - \beta^2)^{\frac{1}{2}}$ . Puede verse enseguida que las soluciones de la ecuación (5.54) son del tipo  $\cos(n \varphi)$  y  $\sin(n \varphi)$ , por lo que  $n$  debe ser entero para que se dé una periodicidad de periodo  $2\pi$ , que es necesario para tener soluciones físicamente consistentes. Respecto a la ecuación (5.53), si hacemos la sustitución  $x = \alpha \rho$ , obtenemos la ecuación diferencial de Bessel:

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) R = 0 \quad (5.55)$$

cuyas soluciones son las llamadas funciones de Bessel de orden  $n$ .

Se habla en general de soluciones de ‘primera especie’ y de ‘segunda especie’ para esa ecuación. Las primeras convergen para cualquier valor finito de  $x$ , y su expresión es:

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(p+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p} \quad (5.56)$$

Se pueden aproximar para valores pequeños de  $x$ , en la forma:  $J_n \approx (x/2)^n$ .

El segundo tipo de funciones se conoce también como funciones de Neumann, y divergen para pequeños valores del argumento, por lo que no resultan aceptables como soluciones para el campo interior de una guía de onda (vease apéndice C).

La condición de contorno sobre las paredes conductoras de la guía para la componente  $E_z$  imponen su cancelación en esos puntos, es decir, debe cumplirse que:

$$R(x) = 0 \quad \text{en} \quad x = \alpha a$$

donde  $a$  es el radio interno del conductor cilíndrico.

La frecuencia de la onda y la constante de propagación del modo se relacionan según la expresión:

$$\omega^2 \mu \epsilon = \beta^2 + \frac{x^2}{a^2} \quad (5.57)$$

que es la *relación de dispersión* para guías de sección cilíndrica.

Puede verse que, para cada valor  $n$ , existirán unos valores de  $x$  (los que hacen  $R(x) = 0$ , condición de contorno sobre la superficie) que, a su vez, harán posibles ciertos valores de la constante de propagación para una frecuencia fijada según (5.57). Para ilustrar esto con más claridad escribamos explícitamente los primeros ceros de las funciones de Bessel en la siguiente tabla:

	1 <sup>er</sup> cero ( $m = 1$ )	2 <sup>o</sup> cero ( $m = 2$ )	3 <sup>er</sup> cero ( $m = 3$ )
$J_0$ ( $n = 0$ )	$x = 2,405$	$x = 5,520$	$x = 8,654$
$J_1$ ( $n = 1$ )	$x = 0$	$x = 3,832$	$x = 7,016$
$J_2$ ( $n = 2$ )	$x = 0$	$x = 5,136$	$x = 8,417$

Tabla 5.1: *Primeros ceros de algunas de las funciones de Bessel de primera especie*

Por tanto, fijados un valor de  $n$  y la frecuencia de la onda, podemos encontrar varios valores de  $x$  que satisfacen la condición de contorno para la componente tangencial de campo eléctrico en el conductor. Sustituyendo esos valores de  $x$  en la ecuación (5.57) encontraremos la constante de propagación  $\beta_{nm}$  del modo correspondiente. Los subíndices del modo  $TM_{nm}$  indican entonces, respectivamente, el orden de la función de Bessel, y el ordinal del cero elegido de esa función.

El modo con menor variación transversal (y por tanto con  $\beta$  mayor) es el que corresponde al primer cero de la función  $J_0(x)$ , es decir, el  $TM_{01}$ .

### 5.3.2 Modos TE

El procedimiento para obtener la expresión de los modos es similar al realizado en el caso anterior, pero ahora la ecuación de onda se aplica a  $H_z$ , que es la componente tangencial no nula:

$$H_z = H_z(\rho, \varphi) e^{-j\beta z} = R(\rho)\Phi(\varphi) e^{-j\beta z} \quad (5.58)$$

Formalmente la ecuación de onda y las soluciones que se obtienen son idénticas al caso anterior. La diferencia está en la condición de contorno que debe imponerse en  $x = \alpha a$ , que ahora es (compruébelo):

$$\frac{dR}{dn} = 0 \quad (5.59)$$

En la tabla siguiente se muestran los primeros ceros de la derivada primera de algunas de las funciones de Bessel:

	1 <sup>er</sup> cero ( $m = 1$ )	2 <sup>o</sup> cero ( $m = 2$ )	3 <sup>er</sup> cero ( $m = 3$ )
$J'_0$ ( $n = 0$ )	$x = 0$	$x = 3,832$	$x = 7,016$
$J'_1$ ( $n = 1$ )	$x = 1,841$	$x = 5,331$	$x = 8,536$
$J'_2$ ( $n = 2$ )	$x = 3,054$	$x = 6,706$	$x = 9,970$

Tabla 5.2 *Primeros ceros de las derivadas primeras de las funciones de Bessel*

Con esos valores se obtienen los modos  $TE_{nm}$ . De nuevo  $n$  indica el orden de la función de Bessel que describe la variación radial del modo (de  $H_z$  en este caso), y  $m$  es el cero tomado, que conlleva un escalado u otro de esa variación. Obsérvese que  $n$  se relaciona además directamente con la frecuencia de la variación azimutal del campo, de acuerdo con la función  $\Phi$ . El primer modo TE es el  $TE_{11}$ , que además es el modo dominante, puesto que su frecuencia de corte es menor que la del  $TM_{01}$ .

### 5.3.3 El cable coaxial. Modos TEM

En una onda TEM, como se dijo anteriormente, las dos componentes longitudinales de los campos son nulas. Si imponemos esa condición en las ecuaciones de Maxwell para una región libre de fuentes se obtienen las relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} &= 0 & \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} &= 0 & \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (5.60)$$

y combinando las ecuaciones (5.1)-(5.4) con (5.9)-(5.10) para modos de propagación genéricos, tenemos:

$$\begin{aligned} H_y &= \frac{\beta}{\omega\mu} E_x = \frac{\omega\epsilon}{\beta} E_x \\ H_x &= -\frac{\beta}{\omega\mu} E_y = -\frac{\omega\epsilon}{\beta} E_y \end{aligned} \quad (5.61)$$

donde es claro que se cumple ahora  $\beta^2 = \omega^2 \mu\epsilon$ . Entonces, si hay alguna estructura de guía de onda que sea capaz de soportar ondas TEM, éstas se van a propagar con la misma velocidad de fase que tendría una onda plana uniforme de la misma frecuencia en un medio ilimitado, con los mismos parámetros  $\mu, \epsilon$  que el del interior de la guía. Las expresiones (5.61) también permiten escribir:

$$\vec{H} = \frac{1}{\eta} \hat{z} \times \vec{E} \quad (5.62)$$

donde  $\eta$  es la impedancia intrínseca del medio. Así pues, los modos TEM tendrían las mismas características de las ondas planas uniformes no confinadas.

A partir de las dos ecuaciones para las componentes del campo eléctrico (Ecs. (5.60)) puede deducirse además que es posible definir un potencial eléctrico al modo de electrostática:

$$\vec{E} = -\nabla\phi \quad \text{donde} \quad \nabla^2\phi = 0 \quad (5.63)$$

en el plano transversal X-Y.

Una estructura física que permite la existencia de modos de este tipo es el cable coaxial, formado por un cilindro conductor delgado interno y una cubierta conductora externa, con algún tipo de dieléctrico entre ambos (Fig.5.7).

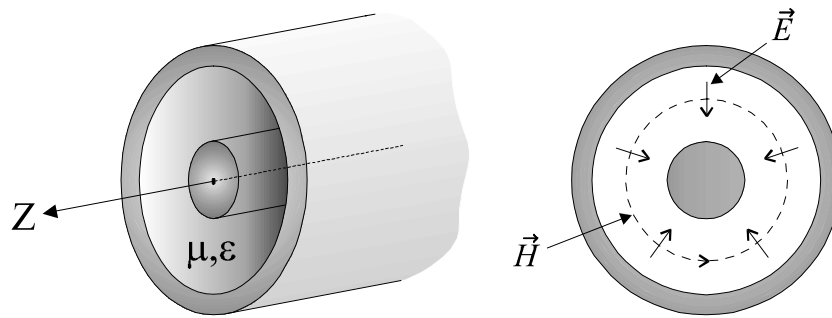


Fig. 5.7 El cable coaxial permite la propagación de ondas TEM

La ecuación de Laplace expresada en coordenadas polares en el plano X-Y, y para una función potencial con dependencia exclusivamente radial, es:

$$\nabla^2\phi(\rho) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right) = 0 \quad (5.64)$$

cuya solución es:  $\phi(\rho) = A + E_0 \ln \rho$ .

A partir de este resultado, e incluyendo ya el término de propagación, se obtiene la expresión para el campo eléctrico:

$$\vec{E}(\rho, z) = -\hat{\rho} \frac{E_0}{\rho} \exp(-jkz) \quad (5.65)$$

y, aplicando la relación (5.62):

$$\vec{H}(\rho, z) = -\hat{\phi} \frac{E_0}{\eta \rho} \exp(-jkz) \quad (5.66)$$

Por fin, la densidad de potencia transportada por la onda obedece de la misma forma a la expresión genérica para el vector de Poynting de una onda plana uniforme:

$$\vec{P} = \frac{1}{2\eta} |\vec{E}|^2 \hat{z} \quad (5.67)$$

## 5.4 Cavidades resonantes de paredes conductoras

Una cavidad resonante de este tipo consiste en un volumen dieléctrico (normalmente el aire) completamente rodeado de paredes conductoras. Evidentemente los campos que pueda haber en el interior de la cavidad no tienen el carácter de una onda viajera, con un término de propagación (exponencial compleja), en la forma en que acabamos de ver en el estudio de las guías de onda, puesto que ya no existe una dirección en la que puedan extenderse ilimitadamente. En esta nueva situación las paredes conductoras imponen condiciones adicionales. Se puede considerar que las ondas experimentan reflexiones continuas sobre las superficies del sistema y tienden a adoptar la forma de ondas estacionarias, en correspondencia con la geometría de la cavidad. El estudio de los modos de vibración propios y de sus frecuencias características se realiza mediante la superposición de los modos de propagación de las guías abiertas, que interfieren al viajar en sentidos opuestos.

Las estructuras aquí descritas se denominan cavidades resonantes o, también, resonadores de cavidad, y tienen interés como sintonizadores y medidores de frecuencia. Se utilizan en radiofrecuencia y a frecuencias ópticas (en este caso con paredes dieléctricas). Presentan gran variedad de formas y dimensiones, aunque los principios generales de funcionamiento son siempre los mismos.

Como ejemplo específico de cavidad resonante y, teniendo en cuenta la generalidad de los resultados, vamos a considerar un caso simple como es la cavidad en forma de paralelepípedo regular.

Sea, pues, el sistema representado en la figura 5.8, con seis paredes conductoras que encierran en su interior un volumen de cierto medio dieléctrico, de dimensiones  $a$ ,  $b$  y  $c$ , según las direcciones  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  respectivamente.

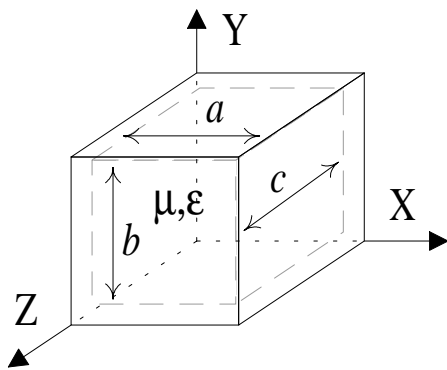


Fig. 5.8 Cavidad resonante rectangular

Los fasores de campo eléctrico y magnético deben satisfacer la ecuación de onda:

$$\nabla^2 \vec{E} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{E} = 0$$

$$\nabla^2 \vec{H} + \omega^2 \mu \epsilon \vec{H} = 0$$

por lo que, en coordenadas cartesianas, cada una de las componentes de ambos campos deben cumplir la ecuación escalar:

$$\nabla^2 f(\vec{r}) + \omega^2 \mu \epsilon f(\vec{r}) = 0 \quad (5.68)$$

Si, como en nuestro caso, el problema tiene simetría rectangular, podemos aplicar la técnica de separación de variables:

$$f(\vec{r}) = X(x)Y(y)Z(z) \quad (5.69)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación de arriba se obtiene inmediatamente la solución como:

$$f(\vec{r}) = (A \sen k_1 x + B \cos k_1 x) \cdot (C \sen k_2 x + D \cos k_2 x) \cdot (E \sen k_3 x + F \cos k_3 x) \quad (5.70)$$

con la condición adicional:

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \omega^2 \mu \epsilon = k^2 \quad (5.71)$$

y donde  $A, B, C, D, E$  y  $F$  son constantes.

#### 5.4.1 Modos TE

Tomamos la dirección  $Z$  como la de “propagación confinada”, por lo que las condiciones de contorno para modos tipo TE deben escribirse en la forma:



$$\begin{aligned}
E_x(0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b; z = 0) &= E_x(0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b; z = c) = 0 \\
E_y(0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b; z = 0) &= E_y(0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b; z = c) = 0 \\
E_z &= 0 \quad (\text{TE})
\end{aligned} \tag{5.72}$$

porque las demás condiciones ya fueron tenidas en cuenta al obtener esos modos.

Forzando la expresión general, dada en (5.70), a satisfacer esas condiciones obtendremos:

$$\begin{aligned}
E_x &= E_{0x} \cos k_1 x \sin k_2 y \sin k_3 z \\
E_y &= E_{0y} \sin k_1 x \cos k_2 y \sin k_3 z \\
E_z &= 0
\end{aligned} \tag{5.73}$$

donde las constantes que aparecen son:

$$k_1 = (k_x) = \frac{m\pi}{a}; \quad k_2 = (k_y) = \frac{n\pi}{b}; \quad k_3 = (k_z) = \frac{p\pi}{c} \tag{5.74}$$

y donde la relación entre las amplitudes viene dada por  $k_1 E_{0x} + k_2 E_{0y} = 0$  (comprobarlo).

El campo magnético se obtiene fácilmente a partir del campo eléctrico.

La expresión (5.71) se transforma ahora en:

$$\omega^2 \mu \epsilon = \pi^2 \left( \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 + \left( \frac{p}{c} \right)^2 \right) \tag{5.75}$$

en la que  $m, n = 0, 1, 2, \dots$  y  $p = 1, 2, 3, \dots$  (razónelo).

En una cavidad resonante no existe ecuación de dispersión en el mismo sentido que se vio en guías de onda. Ahora todas las constantes que rigen la variación espacial de los campos están delimitadas a ciertos valores posibles, debido a las condiciones de contorno. Por tanto, lo que determina la condición (5.75) es la propia frecuencia a la que la solución hallada tiene validez. Dicho de otra forma: cada modo de vibración de la cavidad tiene su propia frecuencia característica. Suele escribirse:

$$(f)_{mnp} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + \left( \frac{n}{b} \right)^2 + \left( \frac{p}{c} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{5.76}$$

Si las dimensiones de la guía son tales que se satisface  $c > a > b$ , entonces el modo con menor frecuencia de resonancia es el  $\text{TE}_{101}$ , en el que:

$$(f)_{101} = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \left[ \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.77)$$

### 5.4.2 Modos TM

El proceso es similar al seguido en el caso anterior. Ahora la componente  $E_z$  debe cancelarse en aquellas paredes a la que es tangente, esto es, para  $x = 0, x = a, y = 0, y = b$ . Puede comprobarse que el campo eléctrico toma la forma:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{0x} \cos k_1 x \sin k_2 y \sin k_3 z \\ E_y &= E_{0y} \sin k_1 x \cos k_2 y \sin k_3 z \\ E_z &= E_{0z} \sin k_1 x \sin k_2 y \cos k_3 z \end{aligned} \quad (5.78)$$

con la relación entre las amplitudes:  $k_1 E_{0x} + k_2 E_{0y} + k_3 E_{0z} = 0$ , y con los mismos valores de las constantes  $k_1, k_2$  y  $k_3$  obtenidas en el caso anterior (Ec. (5.74)).

A partir del campo eléctrico puede obtener el campo magnético, cuya componente en la dirección Z es nula.

Las frecuencias de resonancia siguen la misma expresión que para los modos  $TE_{mnp}$ , pero ahora con  $m, n = 1, 2, 3, \dots$  y  $p = 0, 1, 2, \dots$

### 5.4.3 Factor $Q$ de la cavidad y energía almacenada

Se acaba de ver que un parámetro fundamental de una cavidad es su frecuencia de resonancia (o las frecuencias, para los diferentes modos posibles). Existe otro parámetro de gran trascendencia para caracterizar la cavidad: es el llamado factor  $Q$  o de calidad. Su definición es la siguiente:

$$Q = \omega \frac{\text{energía almacenada}}{\text{energía disipada por segundo}} \quad (5.79)$$

La energía electromagnética total almacenada en el interior de la cavidad debe responder a la expresión general:

$$W_T = \frac{1}{2} \int_V \left( \epsilon |\vec{E}|^2 + \mu |\vec{H}|^2 \right) dv \quad (5.80)$$

y la pérdida total de energía por unidad de tiempo, atendiendo a los efectos óhmicos en el conductor, que son usualmente los más importantes:

$$P_T = \frac{1}{2} R_S \sum_{i=1}^6 \int_{S_i} \vec{J}_{S_i} \cdot \vec{J}_{S_i}^* dS_i \quad (5.81)$$

donde, como se explicó en la sección 5.2.3,  $\vec{J}_{S_i}$  es la corriente superficial inducida en cada una de las paredes internas del conductor.

El sentido del factor  $Q$  es sencillo de comprender: en el caso ideal la cavidad debería ser capaz de conservar indefinidamente la energía electromagnética presente en su interior. Dicha energía se mantendría estacionaria en valor, aun cuando los valores de campo instantáneo serían variables en el tiempo (RSP), dando lugar a un intercambio periódico de energía entre el campo eléctrico y el campo magnético. Por el hecho de tener buenos conductores pero no conductores perfectos, la energía, en la práctica, decaerá exponencialmente en el tiempo. La relación entre la energía total y la energía perdida por ciclo de oscilación (y por el factor  $2\pi$ ) da idea, entonces, de lo cerca que estamos de aquel caso ideal.

Las cavidades resonantes son, en radiofrecuencia, equivalentes a los circuitos  $LC$  de bajas frecuencias. En éstos las resistencias parásitas impiden las oscilaciones sostenidas, que se producen también a una frecuencia característica y mediante el intercambio de energía entre la bobina (en forma de campo magnético) y el condensador (energía en forma de campo eléctrico). El factor de calidad tiene el mismo sentido en ambos sistemas.

**Ejemplo 5.3:** Calcular la expresión del factor  $Q$  de una cavidad de lados  $a$ ,  $b$  y  $c$  para su modo fundamental  $TE_{101}$ .

El modo tiene las componentes:  $E_x = 0$ ;  $E_y = E_0 \sin k_1 x \sin k_3 z$ ;  $E_z = 0$ , donde  $k_1 = \frac{\pi}{a}$  y  $k_3 = \frac{\pi}{c}$  (vease Ecs. (5.73) y (5.74)) y el campo magnético puede obtenerse inmediatamente a partir de allí:

$$H_x = -j \frac{1}{\omega \mu} k_3 E_0 \sin k_1 x \cos k_3 z; \quad H_y = 0$$

$$H_z = j \frac{1}{\omega \mu} k_1 E_0 \cos k_1 x \sin k_3 z$$

La expresión de la energía se mostró en la ecuación (5.80). El resultado para este caso es:

$$W_T = \frac{1}{8} abc \varepsilon |E_0|^2$$

Las pérdidas en las paredes de la guía precisan del conocimiento de las corrientes, que se obtienen a partir del campo magnético. Después de calcularlas e integrarlas sobre las paredes se obtiene:

$$W_T = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\omega \mu} \right)^2 E_0^2 R_s \pi^2 \left( 2b \left( \frac{a}{c^2} + \frac{c}{a^2} \right) + ac \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right) \right)$$

Y el factor de calidad, sustituyendo el valor de la frecuencia por la propia de resonancia del modo (Ec. 5.77) y operando es:

$$Q = \frac{1}{2} \pi \frac{\eta}{R_s} abc \frac{\left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}}}{2b \left( \frac{c}{a^2} + \frac{a}{c^2} \right) + ac \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} \right)}$$

## 5.5 Guías de onda dieléctricas

Desde la década de los sesenta, con el desarrollo del láser, las fibras ópticas han tenido un papel de importancia creciente en el campo de las comunicaciones, ya que permiten la transmisión de información a larga distancia, con alta velocidad y a un coste muy competitivo.

El mismo fundamento físico (la reflexión total en las paredes internas de la fibra) permite desarrollar otro tipo de elementos capaces de confinar las ondas luminosas, como son las guías dieléctricas rectangulares o de tipo canal (*channel guides*), para la realización de dispositivos ópticos u optoelectrónicos integrados.

El análisis matemático general de la propagación en fibras y en guías ópticas es complicado, y queda fuera de la visión fundamental de los fenómenos electromagnéticos que nos hemos propuesto dar en esta obra. En la sección 5.6 se tratará muy brevemente de la propagación en fibras ópticas, mientras que en este apartado estudiaremos un modelo sencillo de guía dieléctrica: la guía dieléctrica plana.

### 5.5.1 Guías dieléctricas planas

Trataremos de la guía dieléctrica con un modelo simplificado, de dos dimensiones. Esto es necesario para tener soluciones analíticas que nos permitan comprender el fundamento y las características de la propagación en este tipo de estructuras. En numerosos casos se obtiene, de esta forma, una buena aproximación al dispositivo real.

Como ya se ha visto al estudiar las guías de paredes conductoras, el problema que debemos resolver se reduce a obtener soluciones de la ecuación de onda que satisfagan las condiciones de contorno del problema. Se verá que las guías planas son capaces de soportar los dos tipos de modos estudiados anteriormente: TE y TM.

La forma de una guía dieléctrica plana es la que se muestra en la figura 5.9. Sobre un sustrato de vidrio, o de algún material transparente, se deposita una fina capa de otro dieléctrico, con un grosor del orden de la longitud de onda de la radiación luminosa. A esta capa se la denomina capa guiante y será, principalmente, la encargada de confinar las ondas en su interior. Sobre la capa guiante habrá aire o, quizá, una segunda capa de recubrimiento dieléctrico.

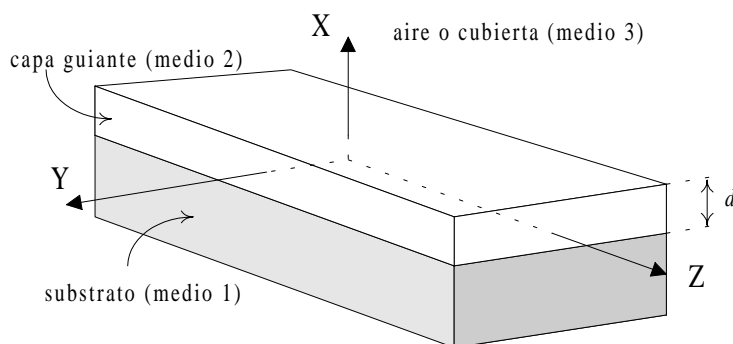


Fig. 5.9 Geometría de una guía de onda dieléctrica plana

Existen diversos métodos para fabricar guías dieléctricas. Puede crecerse la capa guiante sobre el sustrato, depositando sobre él, a alta temperatura, los microcristales del material cristalino elegido. Esto se hace en, por ejemplo, la técnica de *sputtering*, que es una de las más habituales. En otras ocasiones se procede a bombardear con iones el sustrato, provocando la aparición en la superficie, y hasta cierta profundidad, de una capa con propiedades diferentes a las del sustrato original (por ejemplo, con iones de titanio sobre niobato de litio,  $\text{LiNbO}_3$ , se crea una capa de  $\text{Ti:LiNbO}_3$ ). También se pueden producir guías difundiendo térmicamente átomos de metal en el interior del sustrato. Otro método es el de fotolitografía, utilizando máscaras y ataques químicos o fotoquímicos, de igual forma que en la fabricación de circuitos electrónicos integrados. Este procedimiento es habitual en guías fabricadas sobre semiconductores. En cualquier caso la capa guiante debe tener mayor índice de refracción que la cubierta o el sustrato, para que sea capaz de confinar la luz. La

diferencia entre el índice de refracción de la capa guiante y el del sustrato no es, sin embargo, muy elevada: aunque podría llegar a ser del 10% en su valor numérico en alguna ocasión, en otras no pasa del 1%, que es suficiente para que se produzca la reflexión total.

En nuestro análisis vamos a suponer que todos los dieléctricos implicados son lineales, homogéneos e isotrópicos, aunque hoy en día se fabrican frecuentemente guías inhomogéneas, en su perfil transversal, y también con dieléctricos cristalinos anisótropos, como el  $\text{LiNbO}_3$ , que tiene otras interesantes propiedades.

### 5.5.2 Modos TE y modos TM. Curvas de dispersión

Consideremos que la propagación se realiza en la dirección Z y que el grosor de la guía (en X) es muy pequeño en comparación con la otra dimensión transversal (Y), de modo que vamos a asumir que esta última no interviene en el problema, y que ni los campos ni la guía experimentan variación en esa dirección, sino que se extienden infinitamente. Ésta es la aproximación de guía plana (Fig. 5.10).

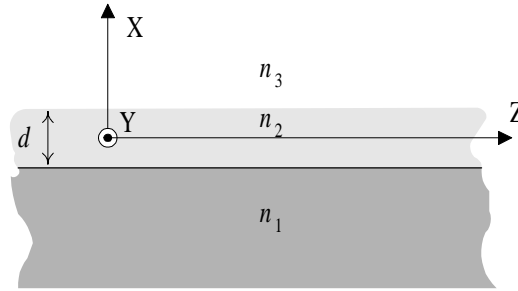


Fig. 5.10 Aproximación de guía dieléctrica plana: el problema se reduce al plano XZ

Se comprueba que, para modos TE, el campo eléctrico tiene una única componente, en la dirección Y. En la capa guiante (medio 2) toma la forma general (Fig. 5.10):

$$\vec{E}_2(x, z) = \hat{y} E_2(x) e^{-j\beta z} \quad \left| x \right| \leq \frac{d}{2} \quad (5.82)$$

donde  $E_2(x)$  es una función por determinar. Se ha supuesto que el origen de la coordenada  $x$  está situado en el centro de la capa guiante. En los medios exteriores el campo debe tener, sin embargo, forma evanescente:

$$\vec{E}_1(x, z) = \hat{y} E_{01} \exp(\alpha_1 x) e^{-j\beta z} \quad x < -\frac{d}{2} \quad (5.83a)$$

$$\vec{E}_3(x, z) = \hat{y}E_{03} \exp(-\alpha_3 x) e^{-j\beta z} \quad x > \frac{d}{2} \quad (5.83b)$$

Todos ellos han de satisfacer la ecuación de onda en su medio respectivo. Aplicándola en los tres casos se obtiene la forma particular del campo en la capa intermedia:

$$\vec{E}_2(x, z) = \hat{y}E_{02} \cos(k_{2x}x + \psi) e^{-j\beta z} \quad |x| \leq \frac{d}{2} \quad (5.84)$$

y las relaciones:

$$\begin{aligned} k_{2x} &= \sqrt{\omega^2 \mu_2 \epsilon_2 - \beta^2} = \sqrt{k_0^2 n_2^2 - \beta^2} \\ \alpha_1 &= \sqrt{\beta^2 - \omega^2 \mu_1 \epsilon_1} = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_1^2} \\ \alpha_3 &= \sqrt{\beta^2 - \omega^2 \mu_3 \epsilon_3} = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 n_3^2} \end{aligned} \quad (5.85)$$

donde  $n_1$ ,  $n_2$  y  $n_3$  son los índices de refracción del substrato, la capa guiante y la cubierta, respectivamente.  $k_0$  es el número de onda en el vacío. La obtención detallada de las ecuaciones (5.85) se propone como ejercicio.

En la ecuación (5.84) se ha optado por escribir la función coseno con un término de fase adicional, lo que da un grado de libertad necesario para aplicar las condiciones de contorno en las superficies de separación de los dieléctricos. Piénsese que si la guía es asimétrica (la cubierta y el substrato son medios diferentes) el campo en la capa guiante no puede responder a la forma simétrica de una función par o antisimétrica de una función impar. Otra posibilidad hubiera sido escribir la dependencia funcional en  $x$  como  $A \cos k_{2x}x + B \sin k_{2x}x$ .

En las expresiones anteriores hay constantes indeterminadas:  $\beta, \psi, E_{01}, E_{02}, E_{03}$ . De todas ellas sólo puede quedar una, que dará la amplitud del modo. Las demás deben particularizarse atendiendo a las condiciones de contorno en ambas superficies de separación: la igualdad de las componentes tangenciales de campo eléctrico y de campo magnético.

Por aplicación de la ley de Faraday obtendremos el campo magnético, que tendrá las componentes no nulas  $H_x$  y  $H_z$ . Su componente longitudinal es la que nos interesa ahora:

$$\begin{aligned} H_{1z}(x, z) &= \frac{j\alpha_1}{\omega\mu_1} E_{01} \exp(\alpha_1 x) e^{-j\beta z} \quad x < -\frac{d}{2} \\ H_{2z}(x, z) &= \frac{-jk_{2x}}{\omega\mu_2} E_{02} \sin(k_{2x}x + \psi) e^{-j\beta z} \quad |x| \leq \frac{d}{2} \\ H_{3z}(x, z) &= \frac{-j\alpha_3}{\omega\mu_3} E_{03} \exp(-\alpha_3 x) e^{-j\beta z} \quad x > \frac{d}{2} \end{aligned} \quad (5.86)$$

Y las condiciones de contorno nos llevan, en  $x = \frac{d}{2}$ , a:

$$\begin{aligned} (E_{2y} = E_{3y}) \Big|_{x=\frac{d}{2}} &\rightarrow E_{03} \exp(-\alpha_3 \frac{d}{2}) = E_{02} \cos(k_{2x} \frac{d}{2} + \psi) \\ (H_{2z} = H_{3z}) \Big|_{x=\frac{d}{2}} &\rightarrow E_{03} \exp(-\alpha_3 \frac{d}{2}) = \frac{\mu_3 k_{2x}}{\mu_2 \alpha_3} E_{02} \sin(k_{2x} \frac{d}{2} + \psi) \end{aligned}$$

y, en  $x = -\frac{d}{2}$ , a:

$$\begin{aligned} (E_{1y} = E_{2y}) \Big|_{x=-\frac{d}{2}} &\rightarrow E_{01} \exp(-\alpha_1 \frac{d}{2}) = E_{02} \cos(k_{2x} \frac{d}{2} - \psi) \\ (H_{1z} = H_{2z}) \Big|_{x=-\frac{d}{2}} &\rightarrow E_{01} \exp(-\alpha_1 \frac{d}{2}) = \frac{\mu_1 k_{2x}}{\mu_2 \alpha_1} E_{02} \sin(k_{2x} \frac{d}{2} - \psi) \end{aligned}$$

En cada uno de los dos pares de ecuaciones precedentes dividimos una entre otra para obtener:

$$\operatorname{tg}(k_{2x} \frac{d}{2} + \psi) = \frac{\mu_2 \alpha_3}{\mu_3 k_{2x}} \quad (5.87)$$

y

$$\operatorname{tg}(k_{2x} \frac{d}{2} - \psi) = \frac{\mu_2 \alpha_1}{\mu_1 k_{2x}} \quad (5.88)$$

que constituyen la condición de propagación guiada en la estructura.

Al contrario de lo que ocurre en guías de paredes conductoras, ahora no tenemos una ecuación resoluble analíticamente, sino que los valores adecuados para las constantes  $k_{2x}$ ,  $\alpha_1$  y  $\alpha_3$  (o  $\beta$ , con quien se relacionan directamente mediante las ecuaciones dadas en (5.85)) y para el desfase espacial  $\psi$  deben hallarse por métodos numéricos o gráficos. No obstante podemos poner (5.87) y (5.88) de una forma más compacta. Para ello utilizamos la igualdad:

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x \pm p\pi) \quad (p = 0, 1, 2, \dots)$$

y definimos los desfases:

$$\Phi_3^{TE} = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{\mu_2 \alpha_3}{\mu_3 k_{2x}}\right) \quad \Phi_1^{TE} = 2 \operatorname{arctg}\left(\frac{\mu_2 \alpha_1}{\mu_1 k_{2x}}\right) \quad (5.89)$$



Y ahora podemos escribir:

$$k_{2x} \frac{d}{2} + \psi = \frac{1}{2} \Phi_3^{TE} \pm p_1 \pi \quad \text{y} \quad k_{2x} \frac{d}{2} - \psi = \frac{1}{2} \Phi_1^{TE} \pm p_2 \pi \quad (5.90)$$

o, sumando las anteriores en una sola ecuación:

$$2k_{2x}d - \Phi_3^{TE} - \Phi_1^{TE} = 2m\pi \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5.91)$$

que es la *ecuación de dispersión de la guía dieléctrica plana para modos TE*, junto con las definiciones dadas en (5.89).

Como se ha explicado previamente las constantes que intervienen ( $k_{2x}$ ,  $\alpha_1$  y  $\alpha_3$ ) están relacionadas directamente con la constante de propagación  $\beta$  (Ecs. 5.85). Si las substituyésemos en (5.89) y (5.91) tendríamos una expresión para la constante de propagación, que tomaría diversos valores para los posibles modos guiados (diferentes valores de  $m$ ), en función del grosor de la guía, de la frecuencia de oscilación y de las constantes particulares de los dieléctricos.

**Ejemplo 5.4:** Representación de las curvas de dispersión para una guía dieléctrica plana.

En la figura 5.11 se muestran las curvas de dispersión, para modos TE, en una forma de representación habitual: el grosor de la guía,  $d$ , en abscisas, y la constante de propagación,  $\beta$ , dividida por  $k_0$ , en ordenadas. Aparecen tres curvas, que corresponden a los modos  $TE_0$ ,  $TE_1$  y  $TE_2$ . Las curvas se han obtenido para unos parámetros dados de los tres dieléctricos (cubierta, capa guiente y substrato) y para una determinada longitud de onda. Entonces se fija un grosor y se toman sucesivos valores enteros de  $m$ , buscando soluciones numéricamente a la ecuación (5.91).

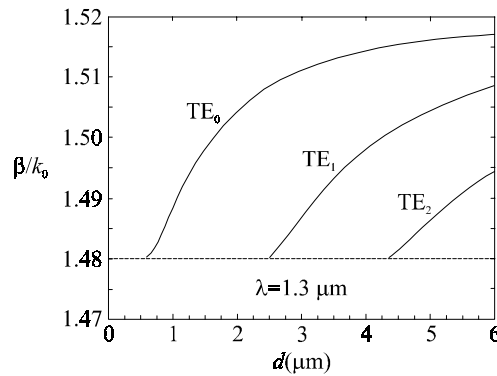


Fig. 5.11 Curvas de dispersión para una guía dieléctrica plana (modos TE)

En el caso particular de la figura los dieléctricos se han tomado con los índices de refracción siguientes: 1,48 para el sustrato; 1,52 para la capa guiante y 1,40 para la cubierta. La longitud de onda elegida ha sido de  $1,3 \mu\text{m}$ . La forma de interpretar las gráficas es como sigue: para grosores muy pequeños, hasta  $0,58 \mu\text{m}$ , no hay solución para ningún valor de  $m$ , luego no puede existir propagación a esa frecuencia ( $\lambda = 1,3 \mu\text{m} \rightarrow f = 230,77 \text{ THz}$ , con  $1 \text{ THz} = 10^{12} \text{ Hz}$ ). A partir de allí ( $d = 0,58 \mu\text{m}$ ) aparece el primer modo guiado,  $\text{TE}_0$ , que es el modo fundamental de la guía. Ésta se mantiene monomodo a la frecuencia elegida hasta el valor de  $d = 2,49 \mu\text{m}$ , en que aparece el modo siguiente,  $\text{TE}_1$  (es decir, existen soluciones para la ecuación (5.91) con  $m=0$  y  $m=1$ ). Por fin, cuando  $d$  llega a  $4,36 \mu\text{m}$  aparece una nueva solución, para  $m=2$ , el modo  $\text{TE}_2$ , e irían apareciendo nuevas soluciones si se siguiera aumentando el valor de  $d$ .

Si una guía particular con esos índices de refracción tuviera, por ejemplo, un grosor de  $3 \mu\text{m}$ , el número de modos TE que puede soportar, para  $\lambda=1,3 \mu\text{m}$ , es de dos. Para longitudes de onda menores (frecuencias mayores) el número de modos aumentaría, al igual que sucede en cualquier otro tipo de guía de ondas.

En la figura 5.12 se representan de nuevo las curvas de dispersión de la misma guía, esta vez para  $\lambda = 0,85 \mu\text{m}$  ( $f = 352,9 \text{ THz}$ ): el número de modos para un determinado grosor es, en cualquier caso, igual o mayor que antes. Una opción comúnmente elegida es representar las curvas con el parámetro adimensional  $d/\lambda$  en abscisas, lo que permite obtener curvas universales de la guía para cualquier frecuencia de excitación.

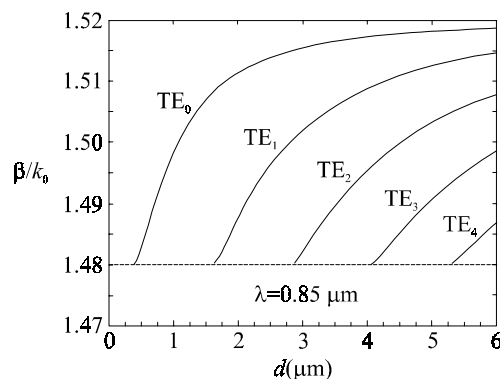


Fig. 5.12 *Curvas de dispersión, de la misma guía de la figura anterior, con  $\lambda = 0,85 \mu\text{m}$*

Para terminar con la deducción teórica podemos escribir la forma final del campo eléctrico, después de obtener las relaciones entre las amplitudes  $E_{01}$ ,  $E_{02}$  y  $E_{03}$  de la aplicación de las condiciones de contorno:

$$E_y(x, z) = \begin{cases} E_{02} \cos(k_{2x} \frac{d}{2} - \psi) \exp(\alpha_1(x + \frac{d}{2})) \exp(-j\beta z) & x < -\frac{d}{2} \\ E_{02} \cos(k_{2x} x + \psi) \exp(-j\beta z) & |x| \leq \frac{d}{2} \\ E_{02} \cos(k_{2x} \frac{d}{2} + \psi) \exp(-\alpha_3(x - \frac{d}{2})) \exp(-j\beta z) & x > \frac{d}{2} \end{cases} \quad (5.92)$$

donde  $\psi$  se obtiene de (5.90).

En la figura 5.13 se ha representado la dependencia transversal del campo eléctrico en la guía del ejemplo anterior, para los modos  $TE_0$  y  $TE_1$ .

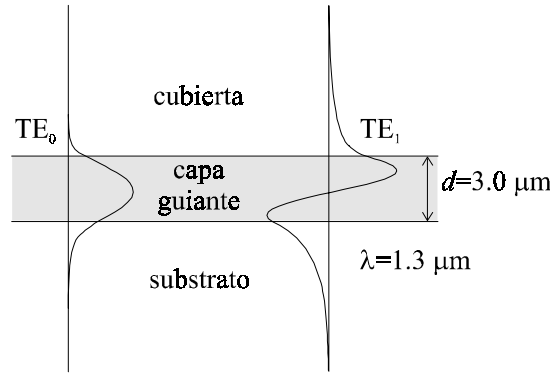


Fig. 5.13 Forma del campo eléctrico en los modos  $TE_0$  y  $TE_1$

### Modos TM

La otra familia de modos capaces de propagarse en la guía son los modos TM. Formalmente son similares a los anteriores, pero las componentes no nulas son ahora:  $E_x$ ,  $E_z$  y  $H_y$ . Partimos del campo magnético, que tendrá la forma:

$$\begin{aligned} \vec{H}_1(x, z) &= \hat{y} H_{01} \exp(\alpha_1 x) \exp(-j\beta z) & x < -\frac{d}{2} \\ \vec{H}_2(x, z) &= \hat{y} H_2(x) \exp(-j\beta z) & |x| \leq \frac{d}{2} \\ \vec{H}_3(x, z) &= \hat{y} H_{03} \exp(-\alpha_3 x) \exp(-j\beta z) & x > \frac{d}{2} \end{aligned} \quad (5.93)$$

Aplicando la ecuación de onda, se obtienen las mismas relaciones para las constantes  $k_{2x}$ ,  $\alpha_1$  y  $\alpha_3$  con  $\beta$  (Ecs.(5.85)), y además resulta:

$$\vec{H}_2(x, z) = \hat{y} H_{02} \cos(k_{2x}x + \psi') \exp(-j\beta z) \quad |x| \leq \frac{d}{2} \quad (5.94)$$

por ser, en general, la guía asimétrica, y no haber de considerar funciones pares o impares.

Prosiguiendo de la misma forma que en el caso anterior resulta finalmente la condición de propagación guiada:

$$2k_{2x}d - \Phi_3^{TM} - \Phi_1^{TM} = 2m\pi \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (5.95)$$

donde

$$\Phi_3^{TM} = 2 \arctg\left(\frac{\epsilon_2 \alpha_3}{\epsilon_3 k_{2x}}\right) \quad ; \quad \Phi_1^{TM} = 2 \arctg\left(\frac{\epsilon_2 \alpha_1}{\epsilon_1 k_{2x}}\right) \quad (5.96)$$

Finalmente las expresiones del campo magnético en las tres regiones son:

$$H_y(x, z) = \begin{cases} H_{02} \cos(k_{2x} \frac{d}{2} - \psi') \exp(\alpha_1(x + \frac{d}{2})) \exp(-j\beta z) & x < -\frac{d}{2} \\ H_{02} \cos(k_{2x}x + \psi') \exp(-j\beta z) & |x| \leq \frac{d}{2} \\ H_{02} \cos(k_{2x} \frac{d}{2} + \psi') \exp(-\alpha_3(x - \frac{d}{2})) \exp(-j\beta z) & x > \frac{d}{2} \end{cases} \quad (5.97)$$

Debe hacerse notar que, a diferencia de lo que ocurre en las guías huecas de paredes conductoras, las curvas de dispersión en guías dieléctricas no son las mismas para los modos TE y los modos TM. Por tanto, las constantes de propagación para dos modos del mismo orden (TE<sub>0</sub> y TM<sub>0</sub>, por ejemplo) no tienen los mismos valores (observe que, efectivamente, las expresiones (5.91) y (5.95) tendrán en general soluciones diferentes).

#### *Potencia propagada en una guía dieléctrica*

Para calcular la potencia media que transporta un modo guiado que se propaga en la dirección Z asumiremos que la dimensión de la guía en la dirección transversal Y tiene un valor  $b$ , con  $b \gg d$ . Se tiene entonces:

$$W_m = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} dy \int_{-\infty}^{+\infty} dx (\vec{E} \times \vec{H}^*) \cdot \hat{z} \right\} \quad (5.98)$$

donde  $\int_{-\infty}^{+\infty} dx = \int_{-\infty}^{-\frac{d}{2}} dx + \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} dx + \int_{+\frac{d}{2}}^{+\infty} dx.$

Para un modo TE, por ejemplo, resulta:

$$W_m = -\frac{b}{2} \operatorname{Re} \int_{-\infty}^{+\infty} E_y H_x^* dx \quad (5.99)$$

donde, por las ecuaciones de Maxwell:

$$H_x = -j \frac{1}{\omega \mu} \frac{\partial E_y}{\partial z} = \frac{\beta}{\omega \mu} E_y \quad (5.100)$$

La potencia media transportada por el modo es:

$$W_m = \frac{b\beta}{2\omega\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} |E_y|^2 dx \quad (5.101)$$

### 5.5.3 Modos guiados y modos radiados

Los modos que se han descrito en la sección precedente (modos guiados) no son las únicas soluciones posibles al problema electromagnético que constituye la guía de onda dieléctrica, aunque sí es cierto que son los que realmente tienen utilidad práctica.

La potencia confinada en el interior de una guía puede salir al exterior cuando se pierde el carácter ideal de la estructura. Esto acontece en diversas circunstancias: por ejemplo, cuando la guía tiene irregularidades en su superficie, o en su volumen, por un proceso de fabricación no totalmente depurado; o porque se provoca un acoplamiento entre dos guías diferentes; o porque la guía está sometida a presión y se deforma levemente, etc.

Para dar cuenta de todos esos fenómenos los modos guiados no son suficientes, y es necesario reexaminar el problema más atentamente. Se observa entonces que son posibles otras soluciones: ondas no confinadas en la capa guiante o, dicho de otra manera, ondas que no alcanzan el ángulo crítico para reflexión interna total cuando inciden en las paredes de la guía. Se habla entonces de *modos radiados*.

No es posible estudiar aquí detalladamente los modos radiados, porque su tratamiento matemático completo abarcaría una extensión considerable. Sin embargo es posible hacer una descripción somera. Un modo radiado de tipo TE en una guía plana dieléctrica simétrica (donde la cubierta y el sustrato tienen el mismo índice de refracción) responde a la expresión general:

$$E_y(x, z) = \begin{cases} E_{01} \cos(k_{1x}x + \psi_1) \exp(-j\beta z) & x < -\frac{d}{2} \\ E_{02} \cos(k_{2x}x) \exp(-j\beta z) & |x| \leq \frac{d}{2} \\ E_{01} \cos(k_{1x}x + \psi_1) \exp(-j\beta z) & x > \frac{d}{2} \end{cases}$$

si es un modo par, y a la expresión:

$$E_y(x, z) = \begin{cases} E'_{01} \sin(k_{1x}x + \psi'_1) \exp(-j\beta z) & x < -\frac{d}{2} \\ E'_{02} \sin(k_{2x}x) \exp(-j\beta z) & |x| \leq \frac{d}{2} \\ E'_{01} \sin(k_{1x}x + \psi'_1) \exp(-j\beta z) & x > \frac{d}{2} \end{cases}$$

si es un modo impar.

Obsérvese que en cada uno de los modos así escrito tenemos varios parámetros indeterminados. Por ejemplo, en la primera expresión: dos amplitudes ( $E_{01}$  y  $E_{02}$ ), un desfase espacial ( $\psi_1$ ) y las constantes para las variaciones transversal y longitudinal ( $k_{1x}$ ,  $k_{2x}$  y  $\beta$ ). En realidad no hay suficientes condiciones que podamos imponer como para que todos ellos estén obligados a tomar un valor concreto (dos ecuaciones de onda y dos condiciones de contorno, si la guía es simétrica). *Consecuentemente la constante de propagación  $\beta$  puede tomar cualquier valor*, con la única limitación de que  $k_{1x}$  y  $k_{2x}$  permanezcan reales.

Así pues, a diferencia de los modos guiados, que es, como se ha visto, un conjunto discreto de soluciones, los modos radiados forman un conjunto continuo. Profundizando un poco más deberíamos añadir que, de hecho, un único modo radiado no tiene sentido físico, pues al fin y al cabo es un campo infinitamente extendido en el espacio (como ocurre con una onda plana uniforme), y debe trabajarse con ellos en forma de espectro continuo. Entonces, lo que tiene realidad física es su integral (en  $\beta$  o en  $k_x$ ), que da lugar a una onda que radia potencia fuera de la guía.

## 5.6 Fibras ópticas

El desarrollo tecnológico de las tres últimas décadas y hasta nuestros días ha sido fundamental para la introducción de las fibras ópticas en el campo de las comunicaciones. Así, mientras en 1966 se tenían pérdidas en la propagación del orden de 1.000 dB/Km, las fibras actuales presentan pérdidas menores de 0,2 dB/Km para la longitud de onda de 1,55  $\mu\text{m}$ . La combinación de bajas pérdidas y gran anchura de banda ha convertido la fibra óptica

en un medio de transmisión altamente atractivo en los sistemas de comunicación. Las ventajas de la fibra frente a las líneas de transmisión conductoras clásicas son considerables. Por un lado, éstas presentan pérdidas de conducción que aumentan exponencialmente con la frecuencia (y con el ancho de banda utilizado), mientras que las fibras no presentan ese problema. Para modulaciones del orden de los MHz, las pérdidas en las fibras son muy inferiores, y no se requiere intercalar amplificadores más que a grandes intervalos, con el consiguiente ahorro. Por otra parte, las fibras ópticas tampoco presentan problemas de interferencia electromagnética, típico de los cables metálicos a altas frecuencias. El material usual con el que se fabrican las fibras es el óxido de silicio ( $\text{SiO}_2$ ), abundante y barato en su proceso de extracción y depuración.

En este apartado veremos la teoría elemental de propagación de modos propios en la fibra óptica y, tan sólo, para un tipo de ellos: los modos TM. El lector puede tratar de reproducir los cálculos para modos de tipo transversal eléctrico.

Considérese la estructura habitual de la fibra, tal como se representa en la figura 5.12. Está formada por un núcleo central de radio  $a$  y permitividad  $\epsilon_1$ , rodeado por una cubierta cilíndrica de permitividad  $\epsilon_2$ , de valor ligeramente inferior al primero. Habitualmente el conjunto suele estar, a su vez, envuelto por una delgada capa absorbente, cuyo papel es eliminar toda la luz que haya podido atravesar el recubrimiento. En nuestro análisis supondremos, simplemente, que la cubierta se extiende infinitamente, lo que equivale a considerar que la capa absorbente realiza su papel con toda perfección. Cabe mencionar que, en la práctica, se añade un revestimiento adicional para proporcionar resistencia mecánica a la fibra. Es claro que, en cualquier caso, no juega ningún papel de cara a los campos que viajan en el interior.

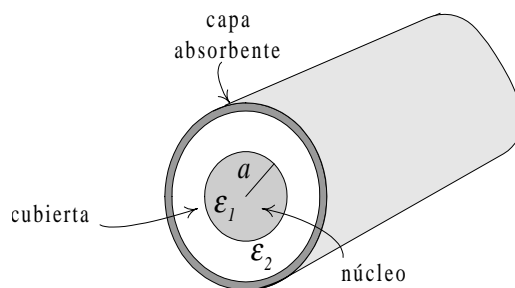


Fig. 5.14 Estructura de una fibra óptica

Según se vio en la sección 5.4.1, cuando se estudiaron los modos TM en guías de sección circular de paredes conductoras, el campo en el interior del núcleo de la fibra puede escribirse como:

$$E_{1z}(\rho, \varphi) = E_{01} J_n(\alpha \rho) \cos(n\varphi) \quad (5.102)$$

donde  $J_n(\alpha\rho)$  es la función de Bessel de orden  $n$ , con  $\alpha = (\omega^2\mu_1\varepsilon_1 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}$ . Puede demostrarse que, si la onda luminosa ha de estar confinada en el interior de la fibra, entonces la componente longitudinal del campo en la cubierta debe decrecer con el radio. En definitiva ello es la manifestación de que está teniendo lugar la reflexión total, si bien en una superficie de separación entre dieléctricos curvada. La expresión del campo en la cubierta es:

$$E_{2z}(\rho, \varphi) = E_{02} K_n(\gamma\rho) \cos(n\varphi) \quad (5.103)$$

donde  $\gamma = (\beta^2 - \omega^2\mu_2\varepsilon_2)^{\frac{1}{2}}$ . La función que aparece se define en la forma:

$$K_n(\gamma\rho) = \frac{\pi}{2} j^{n+1} \{J_n(j\gamma\rho) + jN_n(j\gamma\rho)\} \quad (5.104)$$

y  $N_n(x)$  es la función de Neumann (vease apéndice C).

Las condiciones de contorno sobre  $\rho = a$ , corresponderán a la continuidad de  $E_z$  y a la de la componente transversal de campo magnético,  $H_\varphi$  (al ser un modo TM no existirá  $H_z$ ). Esta última condición se demuestra que es equivalente, en coordenadas cilíndricas, a la continuidad de la derivada radial de  $E_z$  sobre la superficie (comprobarlo). Se tiene entonces:

$$E_1 J_n(\alpha a) = E_{02} K_n(\gamma a) \quad (5.105)$$

$$\frac{\varepsilon_1}{\alpha^2} E_{01} \frac{d}{d\rho} J_n(\alpha a) = -\frac{\varepsilon_2}{\gamma^2} E_{02} \frac{d}{d\rho} K_n(\gamma a) \quad (5.106)$$

Si ahora utilizamos las siguientes relaciones de recurrencia entre las funciones de Bessel de 1<sup>ra</sup> especie y de 2<sup>da</sup> especie:

$$\begin{aligned} J_{n+1}(x) &= \frac{n}{x} J_n(x) - \frac{d}{dx} J_n(x) & J_{n-1}(x) &= \frac{n}{x} J_n(x) + \frac{d}{dx} J_n(x) \\ K_{n+1}(x) &= \frac{n}{x} K_n(x) - \frac{d}{dx} K_n(x) & K_{n-1}(x) &= -\frac{n}{x} K_n(x) - \frac{d}{dx} K_n(x) \end{aligned}$$

resulta, al sustituir en la ecuación (5.106):

$$\frac{\varepsilon_1}{\alpha^2} E_{01} \{J_{n-1}(\alpha a) - J_{n+1}(\alpha a)\} = \frac{\varepsilon_2}{\gamma^2} E_{02} \{K_{n-1}(\gamma a) + K_{n+1}(\gamma a)\} \quad (5.107)$$



y, tras dividir por la ecuación (5.105):

$$\frac{\varepsilon_1}{\alpha^2} \frac{J_{n-1}(\alpha a) - J_{n+1}(\alpha a)}{J_n(\alpha a)} = \frac{\varepsilon_2}{\gamma^2} \frac{K_{n-1}(\gamma a) + K_{n+1}(\gamma a)}{K_n(\gamma a)} \quad (5.108)$$

que es la condición que debe cumplirse en la fibra óptica para que existan modos guiados.

Para el caso en que el grosor del núcleo de la fibra sea pequeño (unas pocas micras de diámetro) tan sólo será posible una solución para la ecuación precedente (con  $n=0$ ), y ésta se reduce a:

$$\frac{\varepsilon_1}{\alpha^2} \frac{J_1(\alpha a)}{J_0(\alpha a)} = -\frac{\varepsilon_2}{\gamma^2} \frac{K_1(\gamma a)}{K_0(\gamma a)} \quad (5.109)$$

donde deberá cumplirse, además, la relación  $\alpha^2 + \gamma^2 = \omega^2(\mu_1\varepsilon_1 - \mu_2\varepsilon_2)$ . En estas condiciones se tiene una fibra monomodo (sólo propaga un modo a la longitud de onda de trabajo).

Cuando el diámetro del núcleo es mayor aparecen otros posibles modos de órdenes sucesivos. Se dice entonces que la fibra es multimodo. A fin de conseguir una mayor eficacia en la transmisión de información son preferibles las fibras monomodo, si bien presentan mayores problemas prácticos a la hora de prepararlas (colocar los bornes terminales, empalmarlas, ...) o para inyectar la luz en su extremo, precisamente debido a su pequeño tamaño.

## PROBLEMAS - CAPÍTULO 5

1. A partir de las expresiones generales de los modos TE y TM de la guía rectangular compruebe que el primer modo TM es el  $TM_{11}$ , porque los modos  $TM_{10}$  y  $TM_{01}$  no son posibles, y que, en general, ningún modo del tipo  $TM_{m0}$  o  $TM_{0n}$  puede existir. Observe que, sin embargo, esto no ocurre para los modos TE.
2. Se desea diseñar una guía rectangular, de paredes conductoras perfectas, para que admita algún modo a la frecuencia de 3 GHz. Calcule el valor mínimo para la dimensión  $a$  de la guía (sabiendo que  $a > b$  y que el interior de la guía es aire).
3. Como continuación del problema anterior a) establezca las condiciones para  $a$  y para  $b$  de manera que ningún otro modo, salvo el fundamental  $TE_{10}$ , pueda propagarse en la guía hasta la frecuencia de

4 GHz; b) determine a qué frecuencia máxima se puede alejar la frecuencia de corte del segundo modo ( $TE_{01}$  ó  $TE_{20}$ ) respetando la condición obtenida en el problema anterior.

4. En una guía rectangular se propaga una onda cuyo fasor campo eléctrico es de la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0 \hat{y} (A \cos k_x x + \text{sen } k_x x) e^{-j\beta z}$$

- Obtenga los valores posibles para A,  $k_x$  y  $\beta$ ;
- escriba la expresión del fasor campo magnético;
- si  $a = \frac{2}{3} \lambda$  ¿cuántos modos posibles de ese tipo hay en la guía?;
- calcule la densidad media de potencia y la potencia total transportada por el modo;
- en una cierta posición  $z=z_0$  la guía se interrumpe interponiendo un plano conductor, en la forma en que muestra la figura 1. Compruebe que la situación resultante puede describirse mediante la suma de dos modos de igual amplitud y viajando en direcciones contrarias.

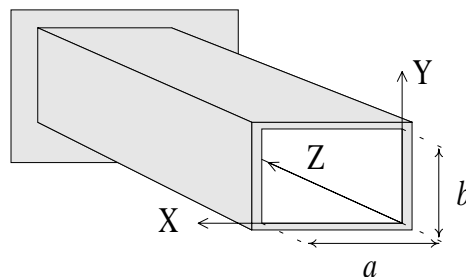


Fig. 1

5. Calcule las densidades de corriente que aparecen en las paredes de la guía cuando se propaga por ella un modo  $TE_{10}$ . Dibuje un esquema de las densidades de corriente presentes, en un instante de tiempo dado, en las paredes de la guía.

6. La relación de dispersión para los dos primeros modos que pueden propagarse en la guía de la figura 2 es:

$$\beta = \sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}$$

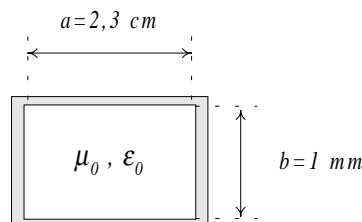


Fig. 2

Se desea trabajar en una región de frecuencias para las que la guía sea monomodo, y se toman unos límites dados por las siguientes condiciones: la frecuencia de trabajo estará i) al menos un 30% por encima de la frecuencia de corte del modo fundamental, y ii) un 30% por debajo de la frecuencia del siguiente modo. ¿Cuál es el margen de frecuencias elegido?

7. Una guía rectangular de paredes conductoras perfectas tiene dimensiones  $a = 2,3$  cm y  $b = 1,0$  cm. Desde la posición  $z=0$  hacia atrás ( $z < 0$ ) la guía tiene aire en su interior, y desde ese punto hacia adelante ( $z > 0$ ) está rellena de un cierto dieléctrico con permitividad relativa  $\epsilon_r$  (Fig. 3).

Incide una onda desde la región de las  $z$ 's negativas que corresponde al modo  $TE_{10}$ , cuyo campo eléctrico es

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0 \hat{y} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta_1 z}$$

y como consecuencia se generan dos ondas, una reflejada hacia atrás y otra transmitida hacia la otra zona de la guía. Las expresiones de los campos eléctricos asociados a esas ondas son:

$$\vec{E}(\vec{r}) = A \hat{y} \sin \frac{\pi x}{a} e^{+j\beta_1 z} \quad \text{y} \quad \vec{E}(\vec{r}) = B \hat{y} \sin \frac{\pi x}{a} e^{-j\beta_2 z}$$

a) Escriba las expresiones de las relaciones de dispersión para ambas zonas de la guía:

$$\beta_1 = \beta_1(f, a) \quad \text{y} \quad \beta_2 = \beta_2(f, a)$$

b) Calcule los campos magnéticos asociados a cada onda o modo.

c) Obtenga los valores de las amplitudes  $A$  y  $B$  en función de  $E_0$  y de las constantes de propagación, mediante la aplicación de las condiciones de contorno en  $z = 0$ .

d) Si  $f = 8,0$  GHz y  $\epsilon_r = 2,2$  ¿qué fracción de potencia se refleja?, ¿qué parte se transmite? Compruebe que la suma coincide con el 100% de la potencia incidente.

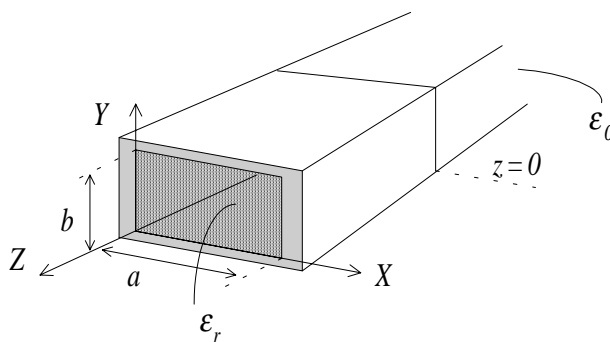
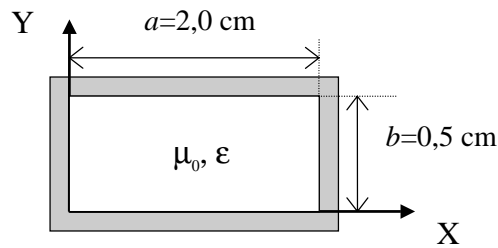


Fig. 3

8. Considérese una guía rectangular de paredes conductoras como la mostrada en la figura 4. Calcule el número de modos que pueden propagarse en la guía en los dos casos siguientes:

- a) si  $\epsilon = \epsilon_0$ ;  
 b) si  $\epsilon = 9\epsilon_0$ .

Fig. 4



Cuando el interior de la guía está parcialmente rellena de un medio dieléctrico distinto del aire el cálculo de los posibles modos es algo más complicado, debido a las condiciones de contorno adicionales que deben satisfacerse. Es el caso de la guía de la figura 5. El campo eléctrico asociado a un modo del tipo  $TE_{m0}$  tiene ahora la forma general dada por:

$$E_x, E_z = 0$$

$$E_y = \begin{cases} (A \sin \alpha_1 x + B \cos \alpha_1 x) e^{-j\beta z} & (0 \leq x \leq d) \\ (C \sin \alpha_2 x + D \cos \alpha_2 x) e^{-j\beta z} & (d \leq x \leq a) \end{cases}$$

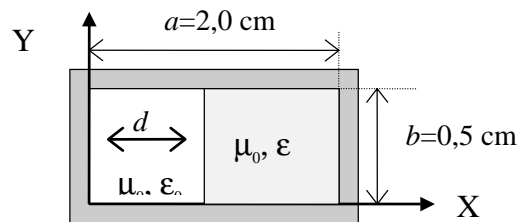


Fig. 5

Respecto al número posible de modos en esta guía debemos estar en una situación intermedia respecto a los dos casos anteriores.

- Determine el valor máximo que pueden tomar las constantes  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  para que se satisfaga la ecuación de onda en ambas regiones (para modos guiados).
- Obtenga las cuatro relaciones en las que intervienen las constantes  $A, B, C, D, \alpha_1$  y  $\alpha_2$ , que se derivan de las condiciones de contorno aplicables a esta situación.
- A partir de las expresiones anteriores se puede obtener una ecuación de dispersión (no resoluble analíticamente), en la que intervienen las constantes  $a, d, \alpha_1$  y  $\alpha_2$ . Escribala.
- Se comprueba que, si  $a=0,02$  m y tomando los valores extremos de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  obtenidos en el apartado c) son posibles los valores  $d=0,75$  cm y  $d=1,5$  cm para satisfacer la ecuación de dispersión de la guía. ¿Qué información puede obtenerse de esos datos? o, dicho de otra forma, ¿qué tienen de particular esos valores de  $d$ ?

9. Un cable coaxial de longitud  $L$  y radios interior y exterior  $a$  y  $b$ , respectivamente, tiene una base de material conductor en cada extremo. En el interior del cable existe una onda estacionaria cuyo campo eléctrico es:

$$E(r) = \frac{A}{\rho} \sin kz \rho$$

La longitud del cable es la mínima que permite la existencia de esta onda a una frecuencia de 100 MHz. Calcule:

- a) El valor de  $L$ ;
- b) El fasor de campo magnético de la onda;
- c) La energía electromagnética almacenada en el cable, a partir de los campos instantáneos;
- d) Las corrientes inducidas en el conductor exterior. A partir de la observación de este último resultado razone en que forma podría practicarse una ranura en el exterior del cable para acceder a su interior afectando lo menos posible a la onda considerada.

## 6 Radiación de antenas elementales

Hertz probó en 1888 que era posible emitir y recibir ondas electromagnéticas, dando la razón a James C. Maxwell, y en contra de la opinión de otros eminentes físicos de su época. Su experiencia fue el primer paso hacia la tecnología de las comunicaciones inalámbricas. Marconi, años más tarde, realizó la primera comunicación intercontinental. Pero lo realmente importante fue que la experiencia de Hertz sancionó de forma concluyente las ecuaciones de Maxwell como el resumen de toda la teoría electromagnética.

En este capítulo se estudian los fundamentos de la teoría de radiación. Se pretende relacionar las ondas electromagnéticas con las fuentes que las generan, que serán distribuciones de cargas y de corrientes con variación temporal. Se van a tratar casos sencillos, pero que resultan significativos, y permiten introducir los conceptos básicos de la teoría de antenas.

### 6.1 Fundamentos de la radiación electromagnética

Las ecuaciones de Maxwell predicen que campos eléctricos y magnéticos variables en el tiempo coexisten en el vacío (o en otro medio dieléctrico) de forma *interdependiente*. Entre los campos se establece una relación que es esencial a su naturaleza, de manera que no puede existir un campo eléctrico con variación temporal sin su campo magnético asociado, y viceversa. Esto es, en definitiva, lo que afirman las ecuaciones de Ampère-Maxwell y Faraday.

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} (+\vec{J}) \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Esas dos ecuaciones, que relacionan los rotacionales de los campos con las derivadas temporales, llevan a la *ecuación de onda*, tanto para el campo eléctrico como para el magnético. La ecuación de onda homogénea permite diferentes tipos de solución, que se deben elegir de acuerdo con la *geometría* de cada problema particular y de sus *condiciones de contorno*. Una solución adecuada puede construirse como un sumatorio de ondas planas, esféricas o cilíndricas, en los casos que pueden ser más habituales.

No obstante parece razonable afirmar que la primera condición de contorno para las ondas debería ser aquella que pone en relación directa al campo eléctrico y al campo magnético con las distribuciones de carga y corriente que los han generado. Ese es el tema que nos proponemos estudiar aquí.

#### *Campos variables en el tiempo y ondas electromagnéticas*

Los problemas de radiación son problemas *abiertos*. Eso significa que *los campos no están confinados en una región más o menos pequeña del espacio, sino que se extienden infinitamente*.

En la práctica muchas de las situaciones reales son geometrías abiertas. Sólo podemos considerar problemas cerrados aquellos en los que un conductor externo engloba en su interior a las fuentes (cargas y corrientes) y a los campos.

Una pregunta que podríamos plantearnos es: ¿por qué los conductores logran apantallar los campos?, o ¿por qué otros medios (los dieléctricos) no son capaces de hacer esa función?

La clave está en que los conductores poseen *cargas libres* y los dieléctricos no. Las cargas libres se mueven por acción de los campos eléctricos. Logran absorber parte de la energía de las ondas y la disipan en el propio material (por efecto Joule) o la reemiten hacia el dieléctrico del que venían, comportándose como emisores secundarios. La movilidad de los portadores es lo que permite reproducir en cada caso las condiciones de contorno que sean precisas para dar lugar a una situación global consistente. Por su parte, los medios dieléctricos están limitados en su respuesta a los campos externos: no pueden seguir incondicionalmente las ‘instrucciones’ de los campos, y, por tanto, tampoco hacerse cargo de la energía de las ondas. Como resultado son atravesados por ellas.

Desde ese punto de vista la mayor parte de los problemas son problemas de radiación, o, al menos, debe contarse con la posibilidad de que se produzca radiación de ondas. Geometrías estrictamente cerradas son, por ejemplo, la de un cable coaxial, o la de una guía de ondas rectangular, mientras que una línea bifilar o una línea *micro-strip* son geometrías abiertas.

No es fácil determinar a priori qué cantidad de energía quedará en el entorno próximo de nuestro sistema y qué cantidad será radiada al espacio en forma de ondas. En teoría de antenas se buscan aquellas geometrías en las que la radiación es máxima y dirigida en una dirección prevista de antemano, mientras que en otras situaciones, donde la radiación es accidental, la energía radiada es energía perdida o, peor aún, energía que puede provocar interferencias indeseadas con otros equipos.

### 6.1.1 Fuentes de radiación

Las cargas y las corrientes son las fuentes primeras de los campos eléctrico y magnético. Si la distribución de carga contenida en un cierto volumen varía en el tiempo entonces debe existir cierta densidad de corriente responsable de esa variación de carga. Eso es lo que afirma la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (6.1)$$

En problemas de radiación las cargas y las corrientes vienen a representar una misma realidad física. El que interese fijarse más en una o en otra dependerá de cada problema particular.

Una densidad de corriente que *arrastra constantemente a su paso la misma cantidad de carga* se denomina *corriente estacionaria*. Sería, por ejemplo, el simple caso de una corriente continua que circula por un hilo conductor. Tales corrientes son solenoidales (su divergencia es nula) y las densidades de carga en las zonas atravesadas por esas corrientes no sufren cambios. En esas condiciones no existe variación temporal en el campo magnético (o eléctrico si lo hay) y *no pueden generarse ondas*, y el campo eléctrico y el magnético son independientes, de la misma forma que lo son las densidades de carga y corriente.

En el proceso de carga de un condensador, por avanzar un paso más, tenemos una situación diferente. En la figura 6.1 se muestra un condensador de placas paralelas conectado a una fuente de tensión que lo está cargando.

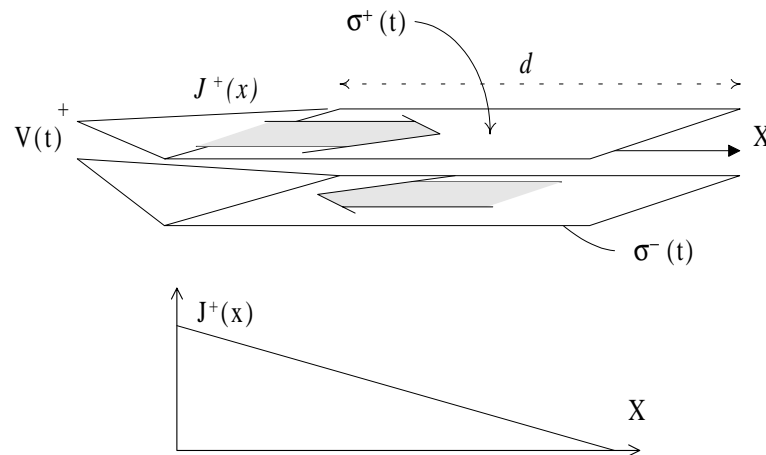


Fig. 6.1 Ejemplo de corriente no estacionaria y no radiativa



Existen dos densidades laminares de corriente que recorren las placas del condensador. Esas corrientes son de igual valor y distinto signo. Si la tensión  $V(t)$  es linealmente creciente en el tiempo las densidades de corriente son constantes, pero no homogéneas: su valor disminuye espacialmente a medida que nos acercamos al extremo de la placa porque la carga se va depositando. La densidad de carga de cada placa aumenta en el tiempo, con signos opuestos en cada una de ellas.

Se puede comprobar que una solución coherente a este problema es:

$$V(t) = Kt; \quad J(x) = C(d - x); \quad \sigma(t) = St$$

donde  $K, C$  y  $S$  son constantes.

Si se calculasen los campos eléctrico y magnético obtendríamos que  $B$  no depende del tiempo, aunque  $E$  sí, ya que crece en proporción a la carga depositada en las armaduras. Por lo que a nosotros ahora nos interesa vemos que en esta situación no hay radiación de ondas al exterior del sistema: *si  $B$  no varía temporalmente entonces  $E$  no tiene más fuente que la densidad de carga superficial, porque  $\nabla \times \vec{E} = 0$  y, consecuentemente, se comporta como un campo electrostático.* No puede abandonar el condensador sino que ha de permanecer ligado a las cargas. Este sería un ejemplo de corriente no estacionaria pero no radiativa. Por lo demás es un caso bastante particular. En general una corriente no estacionaria es una fuente de radiación.

### 6.1.2 Potenciales dinámicos

Estamos interesados en calcular los campos eléctrico y magnético que producen en el espacio distribuciones arbitrarias de carga y corriente. A partir de las ecuaciones de Maxwell se obtienen las ecuaciones de onda en la forma más general posible:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \nabla \frac{\rho}{\epsilon} + \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \quad (6.2)$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \vec{J} \quad (6.3)$$

sin embargo éste no resulta un punto de partida útil en la práctica para calcular los campos, porque al aplicarlas a cualquier situación realista tendremos un sistema de ecuaciones de gran complejidad.

Se utiliza como alternativa *el planteamiento de las ecuaciones para las funciones potenciales*. En lo sucesivo se supondrá que nuestro sistema radiante está en el vacío (o en el aire).

Las funciones potenciales que se utilizan son conocidas: el potencial escalar eléctrico y el potencial vector magnético.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{B} = 0 & \Rightarrow \exists \vec{A} / \nabla \times \vec{A} = \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \\ \vec{H} &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A}\end{aligned}\quad (6.4)$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{A}) \Rightarrow \\ \Rightarrow \nabla \times (\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}) &= 0 \Rightarrow \exists \phi / -\nabla \phi = \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\end{aligned}\quad (6.5)$$

El potencial vector es el mismo que en problemas estáticos, mientras que el potencial escalar ha tenido que redefinirse, puesto que ahora el campo eléctrico no es irrotacional en general, sino que *es el campo eléctrico más la derivada temporal del potencial vector* el que es irrotacional.

Si tomamos la ecuación de Ampère-Maxwell y sustituimos los campos por su expresión en función de los potenciales llegaremos a:

$$\nabla^2 \vec{A} - \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = -\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial(\nabla \phi)}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

mientras que si hacemos lo mismo en la ecuación de Gauss obtenemos:

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial(\nabla \cdot \vec{A})}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Estas ecuaciones significan un primer paso en el intento de alcanzar una base teórica útil para atacar problemas de radiación, aunque en esa forma todavía no resultan prácticas. El paso definitivo se consigue mediante la siguiente substitución:

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}\quad (6.6)$$

Esa igualdad se conoce como *norma de Lorentz*, y constituye el complemento a la

definición de  $\vec{A}$  dada por su rotacional en la ecuación (6.4). Al sustituir en las ecuaciones de arriba se obtiene:

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \\ \nabla^2 \phi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{cases} \quad (6.7)$$

Éstas son las *ecuaciones de onda para los potenciales*. Resultan más sencillas que las precedentes porque se han separado ambos potenciales y los dos tipos de fuentes: las corrientes con el potencial vector y las cargas con el potencial escalar. Eso simplifica notablemente la resolución. No significa que  $\phi$  y  $\vec{A}$  se hayan hecho independientes, puesto que la norma de Lorentz los relaciona estrechamente. Por su parte, la ecuación de continuidad establece la relación entre  $\rho$  y  $\vec{J}$ .

Las soluciones a las ecuaciones dadas en (6.7) son:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{\rho(\vec{r}', t - \sqrt{\mu_0\epsilon_0} |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \\ A(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - \sqrt{\mu_0\epsilon_0} |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \end{aligned} \quad (6.8)$$

Estas expresiones reciben el nombre de *potenciales retardados*.

Debe observarse que de hecho las soluciones son formalmente las mismas que se obtuvieron en estática, con la peculiaridad de que, a la hora de realizar la integración de las contribuciones de cada diferencial, no se asigna a los potenciales la misma variación temporal de las fuentes, sino que se tiene en cuenta *el retardo que corresponde al trayecto desde el diferencial de fuente hasta el punto en el que se evalúa el potencial*:

$$t_0 = \frac{d}{v} = \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} = \sqrt{\mu_0\epsilon_0} |\vec{r} - \vec{r}'|$$

### 6.1.3 Ecuaciones de los potenciales en régimen senoidal permanente

Es habitual en la práctica trabajar con variaciones temporales de tipo senoidal. Muchas de las situaciones reales responden a ese modelo de forma bastante aproximada. No se trabaja con señales de una única frecuencia, pero sí con señales de banda estrecha. Es típico, por ejemplo, tener una señal portadora que esté modulada por una señal de frecuencia mucho menor. En otros casos en que lo anterior no sea cierto se procederá, mediante un análisis de Fourier, a sumar la contribución de cada componente espectral.

En régimen senoidal permanente (RSP) las fuentes se escriben como:

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}) \cos(\omega t + \phi_\rho(\vec{r}))$$

$$J_i(\vec{r}, t) = J_{i0}(\vec{r}) \cos(\omega t + \phi_{Ji}(\vec{r}))$$

en la forma más general posible, donde la densidad de carga y cada una de las componentes de la densidad de corriente tienen amplitudes y fases como funciones únicamente de la posición.

Los campos tendrán una forma similar.

Utilizaremos la *notación fasorial*, en la que la dependencia temporal y la frecuencia se suponen conocidas y sólo se escriben amplitudes y fases. Los resultados de interés quedan de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \\ \nabla^2 \phi + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{cases} \quad (6.9)$$

para las ecuaciones de onda de los potenciales.

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{\rho(\vec{r}') \exp(-jk_0|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \\ \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \exp(-jk_0|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \end{aligned} \quad (6.10)$$

para las soluciones (potenciales retardados), y

$$\nabla \cdot \vec{A} = -j\omega \mu_0 \epsilon_0 \phi \quad (6.11)$$

es la nueva expresión de la norma de Lorentz. Todas estas expresiones se deducen si dificultad de las anteriores.

## 6.2 Dipolo eléctrico oscilante

### 6.2.1 Densidad de carga y corriente en el dipolo eléctrico oscilante

Consideremos un dipolo eléctrico oscilante formado por dos cargas puntuales de valores  $+q$  y  $-q$ , separadas una distancia  $h$ , y situadas sobre el eje  $Z$  equidistantes del origen. La magnitud de las cargas varía senoidalmente en el tiempo con frecuencia  $\omega$ .

Podemos escribir:

$$\rho(\vec{r}, t) = q [\delta(\vec{r} - \frac{1}{2}h\hat{z}) - \delta(\vec{r} + \frac{1}{2}h\hat{z})] \cos \omega t \quad (6.12)$$

donde la delta de Dirac es la función que se utiliza para describir singularidades físicas (temporales, frecuenciales o espaciales, como en este caso) de un modo matemático-formal. (vease anexo D).

La ecuación (6.12) puede escribirse de forma más explícita como:

$$\rho(\vec{r}, t) = q \delta(x) \delta(y) [\delta(z - \frac{1}{2}h) - \delta(z + \frac{1}{2}h)] \cos \omega t \quad (6.13)$$

Tomamos esa forma y aplicamos la ecuación de continuidad. Suponemos que la densidad de corriente sólo tiene componente  $Z$ , en la dirección que une las cargas:

$$\nabla \cdot \vec{J} = \frac{\partial J_z}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) = -q \delta(x) \delta(y) [\delta(z - \frac{1}{2}h) - \delta(z + \frac{1}{2}h)] (-\omega \sin \omega t)$$

y tratamos de encontrar el valor de la densidad de corriente:

$$J_z(\vec{r}, t) = +\omega q \delta(x) \delta(y) [U(z - \frac{h}{2}) - U(z + \frac{h}{2})] \sin \omega t$$

donde la función  $U$  es la función escalón (o de Heaviside), que toma el valor cero hasta el punto donde el argumento es nulo y el valor uno a partir de él:

$$U(z - z_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < z_0 \\ 1 & \text{si } z > z_0 \end{cases}$$

La variación espacial de las densidades de carga y corriente del dipolo eléctrico, para un instante dado, se muestran en la figura 6.3.

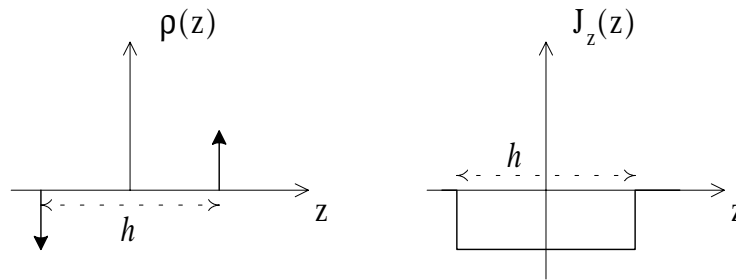


Fig. 6.3 Densidades de carga y corriente del dipolo

Obsérvese que el resultado es perfectamente lógico: en un dipolo oscilante las cargas van alternando periódicamente su valor, desde  $+q$  hasta  $-q$ , y viceversa, pero esto no es posible, según la ecuación de continuidad, si no existe una densidad de corriente que va transportando esa carga de uno a otro extremo a la misma frecuencia.

Podemos escribir la densidad de corriente en su forma completa:

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = -\omega q \hat{z} [U(z + h/2) - U(z - h/2)] \delta(x) \delta(y) \sin \omega t$$

y también su forma fasorial:

$$\vec{J}(\vec{r}) = j\omega q \hat{z} [U(z + h/2) - U(z - h/2)] \delta(x) \delta(y) \quad (6.14)$$

La corriente se obtiene integrando esa expresión en la sección diferencial de un hilo muy delgado:

$$I = j\omega q \quad \text{entre } z = -h/2 \text{ y } z = +h/2 \quad (6.15)$$

### 6.2.2 Potencial vector generado por el dipolo eléctrico

En la figura 6.4 se muestra un hilo corto recorrido por una corriente *homogénea*  $I_0$ , con variación temporal de tipo senoidal. Haremos el análisis con el dipolo centrado en el origen de coordenadas.

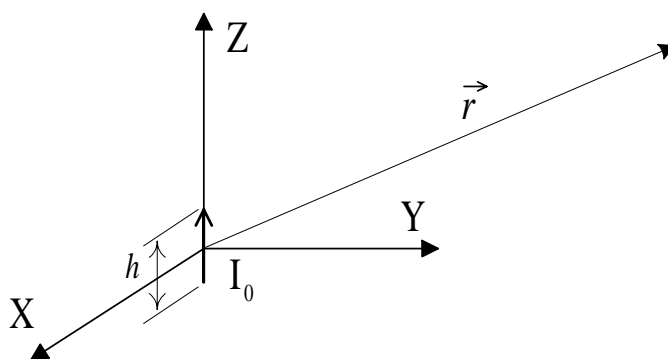


Fig. 6.4 Dipolo eléctrico oscilante

Aparentemente es una corriente contradictoria con la ecuación de continuidad, porque el hilo se interrumpe abruptamente en ambos extremos (la corriente es uniforme). Sin embargo, es posible considerarla así por la suposición hecha de que la carga acumulada en cada extremo en un periodo temporal es una carga puntual, de densidad infinita. Ese es el motivo por el que recibe el nombre de dipolo eléctrico.

El primer paso para el cálculo de los campos es obtener el potencial vector. Su expresión es:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_c \frac{I(\vec{r}') d\vec{l}' \exp(-jk|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (6.16)$$

donde  $\vec{r}$  es el punto en el que calculamos el potencial y  $\vec{r}' = z' \hat{z}$  es el radiovector que va recorriendo los diferenciales de corriente:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_0 \hat{z} \int_c \frac{\exp(-jk[r^2 + z'^2 - 2rz' \cos \theta]^{1/2})}{[r^2 + z'^2 - 2rz' \cos \theta]^{1/2}} dz'$$

donde se ha escrito:  $|\vec{r} - \vec{r}'| = [r^2 + z'^2 - 2rz' \cos \theta]^{1/2}$ .

Haremos dos aproximaciones para poder calcular esa integral:

$$\begin{aligned} \text{i) } r \gg r' &\Rightarrow r \gg h; \\ \text{ii) } \lambda \gg h \end{aligned} \quad (6.17)$$

La primera aproximación indica que vamos a calcular el potencial (y los campos) a cierta distancia del dipolo; la segunda, que se trata de un dipolo corto, en términos de la

longitud de onda. Sin duda estamos admitiendo limitaciones que restan generalidad al problema, pero de hecho estamos obligados a hacerlo si queremos avanzar en el cálculo de la integral (6.16). Más adelante se verá que los resultados son significativos, y que sirven de punto de partida para atacar otros problemas más generales.

La primera de las aproximaciones nos permite simplificar el denominador del integrando, que aproximaremos sencillamente por  $r$ .

La fase requiere algo más de cuidado:

$$[r^2 + z'^2 - 2rz' \cos \theta]^{1/2} = r \left[ 1 + \frac{z'^2}{r^2} - 2 \frac{z'}{r} \cos \theta \right]^{1/2}$$

Ocurre, y esto es básico en problemas de radiación, que los diferentes términos de orden creciente en un desarrollo en serie de la fase *sólo pueden eliminarse cuando además de ser mucho menores que los términos precedentes, sean mucho menores que  $\pi$* . De otro modo se estarían cometiendo errores importantes, al ignorar términos que sí tienen relevancia.

En nuestro caso la fase podemos desarrollarla como:

$$k |\vec{r} - \vec{r}'| \approx k r \left[ 1 - 2 \frac{z'}{r} \cos \theta + \frac{z'^2}{r^2} \right]^{1/2} \approx \frac{2\pi}{\lambda} r \left( 1 - \frac{z'}{r} \cos \theta + \frac{1}{2} \frac{z'^2}{r^2} \right)$$

donde admitimos que se cumplen las dos desigualdades siguientes:

$$\frac{2\pi}{\lambda} z' \leq \frac{2\pi}{\lambda} h \ll \pi \quad \text{y} \quad \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{2} \frac{h^2}{r} \ll \pi$$

que pueden escribirse también como:

$$h \ll \frac{\lambda}{2} \quad \text{y} \quad h^2 \ll \lambda r \quad (6.18)$$

La primera condición es, de hecho, equivalente a  $h \ll \lambda$ . La segunda se desprende necesariamente de la primera y de  $r \gg h$ . Con esas suposiciones el potencial vector queda finalmente:

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} I_0 \hat{z} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{r} \exp(-jkr) dz' = \frac{\mu_0}{4\pi} I_0 h \hat{z} \frac{\exp(-jkr)}{r} \quad (6.19)$$



### 6.2.3 Cálculo de los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$

A partir del potencial vector podemos obtener todas las magnitudes de interés del problema. La secuencia de cálculo más inmediata sería:

$$\vec{A} \rightarrow (\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A}) \rightarrow \vec{H} \rightarrow (\vec{E} = \frac{1}{j\omega \epsilon_0} \nabla \times \vec{H}) \rightarrow \vec{E}$$

y de allí puede procederse a calcular el vector de Poynting y la potencia radiada.

También se puede trabajar con el potencial escalar, calculado mediante la norma de Lorentz, y obtener el campo eléctrico a partir de los dos potenciales.

Habitualmente trabajaremos en coordenadas esféricas, que se adaptan mejor a las características del problema.

Partimos de:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_0 h \frac{\exp(-jkr)}{r} (\hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta) \quad (6.20)$$

El campo magnético se obtiene a partir del rotacional de (6.20):

$$\vec{H}(\vec{r}) = \hat{\phi} \frac{I_0}{4\pi} h k^2 \left( j \frac{1}{kr} + \frac{1}{k^2 r^2} \right) \exp(-jkr) \sin \theta \quad (6.21)$$

y el campo eléctrico resulta finalmente de la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r, \theta) \hat{r} + E_\theta(r, \theta) \hat{\theta}$$

donde

$$\begin{aligned} E_r &= \eta_0 \frac{I_0 h}{4\pi} 2 \left( 1 - j \frac{1}{kr} \right) \cos \theta \frac{\exp(-jkr)}{r^2} \\ E_\theta &= \eta_0 k \frac{I_0 h}{4\pi} \left( 1 + \frac{1}{kr} - j \frac{1}{k^2 r^2} \right) \sin \theta \frac{\exp(-jkr)}{r} \end{aligned} \quad (6.22)$$

Las ecuaciones (6.21) y (6.22) son el final de esta primera parte del problema. Obsérvese que los campos producidos por el dipolo tienen la forma de una *onda esférica*, es decir, que los lugares geométricos de los puntos del espacio donde las componentes de los campos tienen la misma fase son superficies esféricas centradas en el dipolo.

A diferencia de la onda plana la onda esférica de la ecuaciones (6.21) y (6.22) tiene una forma matemática complicada. En los apartados siguientes examinaremos la forma de los campos a diferentes distancias del dipolo para obtener algo más de información.

#### 6.2.4 Campos radiados

Se denominan *campos radiados* aquellos que se obtienen con la aproximación de *campo lejano*: campos medidos a gran distancia de la antena emisora. La importancia de esa aproximación es bastante clara. Se trata de obtener las características de los campos que realmente van a recibir otras antenas, que normalmente estarán alejadas del lugar de emisión.

Hasta ahora hemos estado suponiendo que el punto en el que evaluamos el campo está situado a cierta distancia del dipolo ( $r \gg h$ ). Ahora además vamos a particularizar al caso en que esa distancia es grande también comparada con la longitud de onda:

$$r \gg \lambda \quad \Rightarrow \quad r/\lambda \gg 1 \quad \Rightarrow \quad kr \gg 1 \quad (6.23)$$

Con esa condición algunos de los términos de las diferentes componentes de los campos pueden ignorarse. En particular, ocurre:  $E_r \ll E_\theta$  y los campos resultan:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{rad}(\vec{r}) &= jk\eta_0 \frac{I_0 h}{4\pi} \sin\theta \frac{\exp(-jkr)}{r} \hat{\theta} \\ \vec{H}_{rad}(\vec{r}) &= jk \frac{I_0 h}{4\pi} \sin\theta \frac{\exp(-jkr)}{r} \hat{\phi} \end{aligned} \quad (6.24)$$

que son las expresiones utilizadas habitualmente para el dipolo radiante.

Los campos radiados son los que tienen interés en la práctica, porque son los campos que realmente llegan a las antenas receptoras cuando se utilizan frecuencias de emisión no excesivamente bajas.

La onda esférica en campo lejano representada por los campos de las ecuaciones (6.24) tiene algunas particularidades notables que deben reseñarse:

- los campos eléctrico y magnético están en fase;
- la relación entre sus amplitudes coincide con la impedancia intrínseca del medio;
- sus direcciones de oscilación son perpendiculares entre sí, y perpendiculares a la dirección de propagación.

Es debido a esas características que la onda puede considerarse como una onda plana o, por mejor decir, como una *onda localmente plana*.

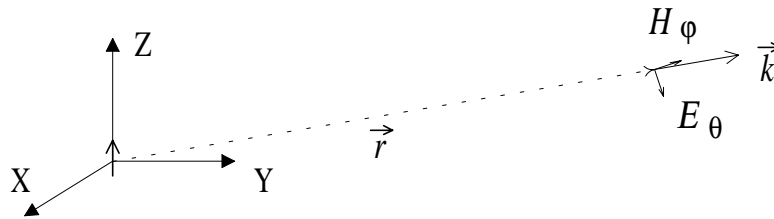


Fig. 6.5 La onda emitida por el dipolo es similar, en campo lejano, a una onda plana

### 6.2.5 Características de radiación del dipolo eléctrico

Existen varios parámetros que informan de las características de radiación de una antena o de un sistema radiante. Tales parámetros son:

- la resistencia de radiación,
- el diagrama de radiación,
- la ganancia directiva y la directividad.

Los veremos particularizados al caso del dipolo eléctrico. Como todos esos parámetros se relacionan con la potencia radiada por la antena es lo que calcularemos en primer lugar.

El vector de Poynting medio en campo lejano es:

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}_{rad} \times \vec{H}_{rad}^*) = \frac{1}{2} \left( \frac{I_0 h}{4\pi} \right)^2 k^2 \eta_0 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{r} \quad (6.25)$$

y la potencia radiada debe coincidir con el flujo del vector de Poynting a través de una superficie cerrada que englobe al dipolo (una esfera de radio  $r$  por sencillez).

$$P_{rad} = \frac{1}{2} \left( \frac{I_0 h}{4\pi} \right)^2 k^2 \eta_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{1}{3} \frac{1}{4\pi} (I_0 h)^2 k^2 \eta_0 \quad (\text{W}) \quad (6.26)$$

### Resistencia de radiación

El dipolo podría esquematizarse en cualquiera de las dos formas que se muestran en la figura:

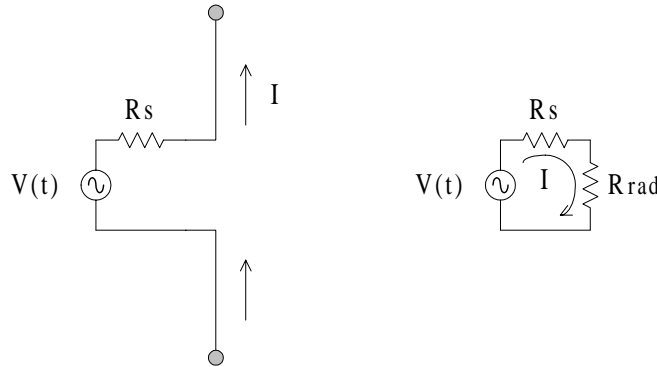


Fig. 6.5 Resistencia de radiación

Parte de la potencia suministrada por la fuente de tensión es radiada al espacio y el resto se disipará en la resistencia interna de la fuente y en la resistencia óhmica del dipolo. Se simula el efecto de radiación, desde el punto de vista de la fuente, *como una resistencia que disipa una parte de la potencia igual a la potencia radiada*. Es importante entonces que la potencia radiada sea lo mayor posible, y por tanto:  $R_{rad} \gg R_s$ .

Se define la resistencia de radiación simplemente como:

$$R_{rad} = \frac{P_{rad}}{I_{eff}^2} = (RSP) 2 \frac{P_{rad}}{I_0^2} \quad (\Omega) \quad (6.27)$$

y para el dipolo eléctrico resulta:

$$R_{rad} = \frac{2}{3} \frac{1}{4\pi} \eta_0 h^2 k^2 = 80\pi^2 \left( \frac{h}{\lambda} \right)^2 \quad \Omega \quad (6.28)$$

En realidad lo interesante de una antena es que tenga una elevada resistencia de radiación y, sin embargo, en el caso del dipolo eléctrico corto esto no se cumple en absoluto. Obsérvese que precisamente se asumió que su longitud es mucho menor que la longitud de onda ( $h \ll \lambda$ ). La conclusión es que *el dipolo corto no es una antena eficiente*: debe hacerse circular una intensidad de corriente elevada para que radie de forma apreciable.

### Diagrama de radiación

Cuando tratamos con una antena no estamos interesados en conocer únicamente qué cantidad de potencia radia, sino también en cómo se distribuye esa potencia en el espacio. Se denomina *antena isotrópica* a aquella que radia uniformemente en todo el espacio, como si se tratase de una fuente esférica perfecta; antenas *omnidireccionales* son aquellas que radian apreciablemente en un abanico completo de direcciones, con cierto grado de simetría esférica; antenas *direccionales* son, por último, las que concentran la radiación en un cono, de mayor o menor amplitud, alrededor de una dirección privilegiada.

El *diagrama de radiación* permite apreciar de un golpe de vista la distribución espacial de la potencia radiada por la antena. Es la representación gráfica tridimensional del vector de Poynting, normalizado a la unidad, y se define:

$$t(\theta, \varphi) = \frac{|\vec{P}(r, \theta, \varphi)|}{|\vec{P}(r, \theta, \varphi)|_{MAX}} \quad (6.29)$$

El diagrama de radiación del dipolo eléctrico es:

$$t(\theta, \varphi) = \sin^2 \theta \quad (6.30)$$

La representación gráfica se realiza como la de un diagrama polar en tres dimensiones, asignando al módulo  $r$  de cada punto representado el valor que le corresponde de  $t$  según su dirección  $(\theta, \varphi)$ :

$$r = t(\theta, \varphi) \quad \text{para cada punto } (r, \theta, \varphi)$$

En la figura 6.6 se muestran dos cortes según los ejes del diagrama de radiación del dipolo. Tiene simetría azimutal como cabía esperar de la geometría cilíndrica de la corriente.

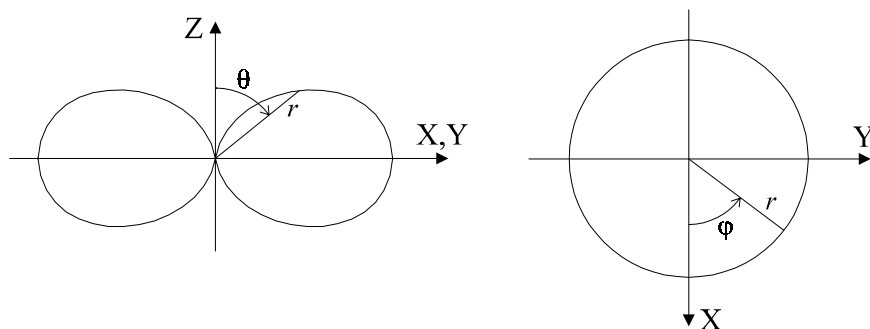


Fig. 6.6 Dos secciones del diagrama de radiación del dipolo

### Ganancia directiva y directividad

La ganancia directiva no es, en realidad, algo distinto del diagrama de radiación. La única diferencia es que ahora no se normaliza a la unidad, sino que se toma como referencia una antena que radie, de forma isotrópica, la misma cantidad de potencia que la considerada. Matemáticamente:

$$D(\theta, \varphi) = \frac{|\vec{P}(r, \theta, \varphi)|}{|\vec{P}(r)|_{ISOTR.}} = \frac{|\vec{P}(r, \theta, \varphi)|}{\frac{P_{rad}}{4\pi r^2}} \quad (6.31)$$

Para el caso del dipolo resulta:

$$D(\theta, \varphi) = \frac{3}{2} \sin^2 \theta \quad (6.32)$$

La *directividad* es el valor máximo de la ganancia directiva. Para el caso del dipolo toma el valor de 1,5. La directividad de una antena isotrópica es la unidad, ya que es la de referencia, y la directividad de cualquier otra antena es siempre mayor que uno.

$$D_0 = \max[D(\theta, \varphi)] \quad (6.33)$$

Usualmente se da la directividad en dB ( $10 \log D_0$ ).

### 6.2.6 Campos inducidos

Después de ver los campos a grandes distancias conviene examinar cómo son cerca de la antena. Esto tiene interés teórico para clarificar algunos conceptos, y también repercusiones prácticas, aunque no las trataremos aquí.

Se denominan campos inducidos a los campos presentes en la inmediaciones de la antena. Tal proximidad se juzga en función de la longitud de onda, y no de las dimensiones de la propia antena.

Los campos que obtuvimos para el dipolo (Ecs. (6.21) y (6.22) ) son válidos en la suposición de que  $r \gg h$ . Ahora añadiremos la condición de que  $r \ll \lambda$ . Esto es posible porque también asumíamos que la longitud del dipolo era mucho menor que la longitud de onda (dipolo corto).

Los términos dominantes en las expresiones de los campos son diferentes, puesto que

$$r \ll \lambda \quad \Rightarrow \quad kr \ll 1$$

Al aproximar en las expresiones (6.21) y (6.22) tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{ind}(\vec{r}) &\approx -j\eta_0 \frac{I_0 h}{4\pi} \frac{1}{k} \frac{2\hat{r} \cos\theta + \hat{\theta} \sin\theta}{r^3} \\ \vec{H}_{ind}(\vec{r}) &\approx \frac{I_0 h}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^2} \hat{\phi} \end{aligned} \quad (6.34)$$

donde incluso la exponencial de fase, que es quien da el carácter de onda viajera, ha sido ignorada. Es interesante comprobar que los campos inducidos en la proximidad de la antena no se diferencian apreciablemente de los que podríamos obtener con aproximaciones estáticas. En el caso del campo eléctrico bastará con hacer algunas sustituciones y utilizar la ecuación (6.15) para llegar a la expresión:

$$\vec{E}_{ind}(\vec{r}) \approx \frac{qh}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\hat{r} \cos\theta + \hat{\theta} \sin\theta}{r^3} \quad (6.35)$$

que coincide con la expresión conocida del campo creado por un dipolo eléctrico. La variación temporal será la misma que la de las cargas, sin incluir ningún retardo. Ocurre que estamos calculando los campos en puntos *a los que las ondas llegan casi de forma instantánea, en comparación con el periodo propio de las señales*, y en esa situación utilizar la ecuación de los potenciales retardados no tiene objeto.

Trate de hacer el cálculo del campo magnético por los procedimientos usuales de Magnetostática y compruebe que obtiene la aproximación dada en (6.34) para ese campo.

### 6.3 Radiación simultánea de dos dipolos

En este apartado veremos cómo son los campos producidos por un sistema de dos dipolos. El interés de agrupar elementos sencillos para construir un sistema radiante radica en que pueden mejorarse algunas características de radiación respecto a las del elemento aislado. En particular esto es cierto para la directividad.

### 6.3.1 Campo radiado

Considérese un sistema formado por dos dipolos orientados en la misma dirección y separados una distancia  $2d$ , tal como se muestra en la figura 6.7.

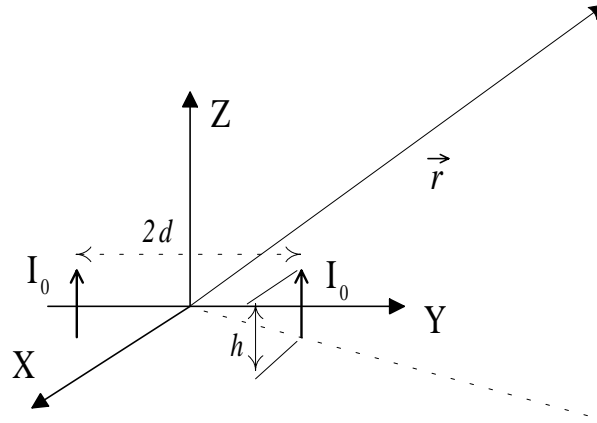


Fig. 6.7 Sistema radiante formado por dos dipolos idénticos

Podemos evaluar el campo radiado (campo lejano) producido por ambos dipolos mediante la superposición de los campos individuales. Previamente debemos reescribir el campo radiado por un único dipolo cuando está desplazado respecto al origen de coordenadas.

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}) = jk\eta_0 \frac{I_0 h}{4\pi} \sin \theta_1 \frac{\exp(-jk|\vec{r} - \vec{r}_1|)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \hat{\theta}_1$$

$\vec{r}_1$  es el radiovector de posición del dipolo, y además se han escrito el ángulo  $\theta_1$  y el vector unitario correspondiente medidos desde el dipolo, porque en rigor serían diferentes a los trazados desde el origen. Sin embargo, el tener que hacer esta última distinción complicaría enormemente el problema. Asumamos que la separación entre los dipolos no es

excesivamente grande en comparación con la longitud de onda, lo cuál es razonable. Entonces tenemos  $d \approx \lambda \ll r$ , y podemos escribir  $\theta_1 \approx \theta$  y  $\hat{\theta}_1 \approx \hat{\theta}$ .

La distancia entre el dipolo y el punto donde vemos el campo es:

$$|\vec{r} - \vec{r}_{1,2}| = |(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} - (\pm d\hat{y}))| = (r^2 - 2y(\pm d) + d^2)^{1/2}$$

para cada uno de los dipolos.



El denominador lo aproximaremos sencillamente por  $r$ . En la fase debemos ser más cuidadosos:

$$k|\vec{r} - \vec{r}_{1,2}| = kr \left(1 - 2y \frac{(\pm d)}{r^2} + \frac{d^2}{r^2}\right)^{1/2} \approx kr \left(1 \mp y \frac{d}{r^2}\right) = kr \mp kd \sin \theta \sin \varphi$$

lo que será válido siempre que el término eliminado sea pequeño:

$$k \frac{d^2}{2r} = \frac{\pi d^2}{\lambda r} \ll \pi \Rightarrow d^2 \ll \lambda r \quad (6.36)$$

El campo radiado queda finalmente en la forma:

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}) = 2jk\eta_0 \frac{I_0 h}{4\pi} \sin \theta \frac{\cos[kd \sin \theta \sin \varphi]}{r} \hat{\theta} \quad (6.37)$$

Para calcular el campo magnético no es necesario volver a la ecuación de Ampère-Maxwell, debido a que la onda radiada es localmente plana. Podría utilizarse la relación conocida:

$$\vec{H}_{rad} = \frac{1}{\eta_0} \hat{k} \times \vec{E}_{rad} \quad (\hat{k} = \hat{r})$$

### 6.3.2 Resistencia de radiación y ganancia directiva

Para analizar las características de la radiación del sistema obtenemos del vector de Poynting

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2\eta_0} |\vec{E}_{rad}|^2 \hat{k} = 2k^2 \eta_0 \left( \frac{I_0 h}{4\pi} \right)^2 \frac{\sin^2 \theta \cos^2[kd \sin \theta \sin \varphi]}{r^2} \hat{r} \quad (6.38)$$

La dependencia del flujo de potencia con los ángulos esféricos tiene una forma peculiar. El *diagrama de radiación* depende de la separación entre los dipolos medida en longitudes de onda ( $kd$ ). Tenemos:

$$t(\theta, \varphi) = \sin^2 \theta \cos^2[kd \sin \theta \sin \varphi] \quad (6.39)$$

El cálculo de la potencia no puede realizarse analíticamente. Escribiremos:

$$P_{rad} = \oint_S \vec{P}_m \cdot d\vec{s} = C I_0^2 I(kd) \quad (6.40)$$

donde

$$C = 2k^2 \eta_0 \left( \frac{h}{4\pi} \right)^2 \quad \text{y} \quad I(kd) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta \cos^2[kd \sin \theta \sin \varphi] d\theta d\varphi$$

El valor de la integral  $I(kd)$  se ha calculado numéricamente y se muestra en la figura 6.8:

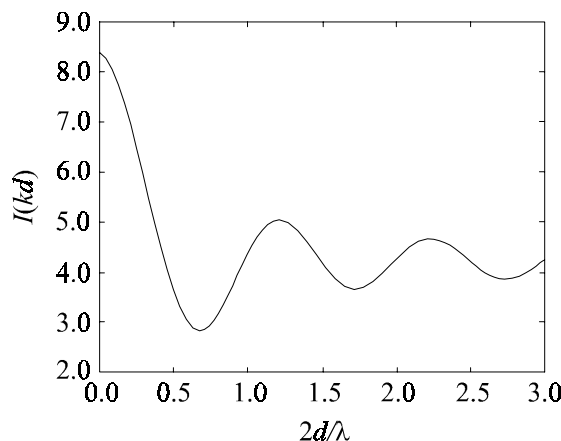


Fig. 6.8 Integral normalizada del flujo de potencia para dos dipolos en el plano

La resistencia de radiación es:

$$R_{rad} = \frac{P_{rad}}{I_{eff}^2} = 2 \frac{P_{rad}}{I_0^2} = 2 C I(kd) \quad (\Omega) \quad (6.41)$$

Esos resultados merecen ser analizados con algo más de detenimiento para comprender el comportamiento del sistema radiante.

Una primera cuestión que se pone de manifiesto es que tanto la *potencia total radiada* como la *resistencia de radiación* no guardan relación directa con las de un dipolo aislado: la forma de la integral  $I(kd)$  hace que dependan algo caprichosamente de la separación entre los dos dipolos.

Ese hecho podría resultar sorprendente a primera vista, pero si se razona despacio se llega a comprender que no es un resultado ilógico.

En primer lugar, y desde el punto de vista de los campos radiados al espacio, es claro que *el principio de superposición se aplica al campo (eléctrico o magnético), pero no a la densidad de potencia ni a la potencia*. Al calcular el vector de Poynting como el cuadrado de la suma de campos el resultado es diferente a la suma de los cuadrados.

Por tanto dos dipolos no radian, en general, la potencia suma de las potencias que radiarían individualmente cada uno.

Desde el punto de vista del generador el problema es, quizá, menos claro, ya que habíamos convenido en que un dipolo podía simularse como una resistencia. Ahora parece, sin embargo, que no podemos mantener la analogía y utilizar dos resistencias (en paralelo o en serie) para representar al conjunto de los dos dipolos. Y es cierto. Podríamos en todo caso, tal como se ha hecho, calcular la nueva resistencia de radiación equivalente *a posteriori*, después que el problema electromagnético ha sido resuelto, pero el problema no tiene solución en el terreno puramente circuital.

En realidad lo que está sucediendo es que las antenas representan, de cara al generador, una impedancia compleja, con parte real (resistencia de radiación) y parte imaginaria (reactancia de la antena). *La reactancia se relaciona con la energía almacenada en los campos que circundan la antena.* Obsérvese que en todo momento nos hemos limitado a calcular el vector de Poynting en la zona de radiación, a grandes distancias del dipolo, pero si hubiéramos hecho el cálculo con las expresiones completas de los campos habríamos obtenido otra componente del flujo de potencia: en particular una componente  $P_\theta$  en el caso del dipolo. Eso indica que *existe energía electromagnética que no es radiada, sino que permanece indefinidamente en las inmediaciones del dipolo.* Esa energía presente, pero no radiada, se simula, una vez calculada, mediante elementos no resistivos. Sin embargo el cálculo de la reactancia, como parte esencial de la impedancia de entrada de la antena vista desde el generador, sobrepasa el propósito de este libro. Se verá con detalle en la asignatura de Antenas.

Por último es interesante comprobar la variación del diagrama de radiación en función de la separación entre los dipolos. En la figura 6.9 se ha representado la sección del diagrama en el plano X-Y ( $\theta = \pi/2$ ,  $\phi$  variable) para diferentes valores de  $d$ .

El primero corresponde al caso trivial en que ambos dipolos no se separen apreciablemente, en términos de longitud de onda, y no se diferencia del de un único dipolo. El segundo corresponde a una separación entre los dipolos de media longitud de onda. Obsérvese que la radiación según la dirección que une los dipolos (eje Y) se cancela, mientras que se refuerza en la dirección perpendicular. Por último, para una separación de una longitud de onda, aparecen dos máximos en direcciones perpendiculares. Se obtendrían diagramas con un número creciente de lóbulos de radiación si siguiésemos incrementando la separación entre ambos dipolos.

A pesar de que los diagramas se han obtenido después de un cálculo sistemático no está de más comprobar que responden perfectamente a la física del problema.

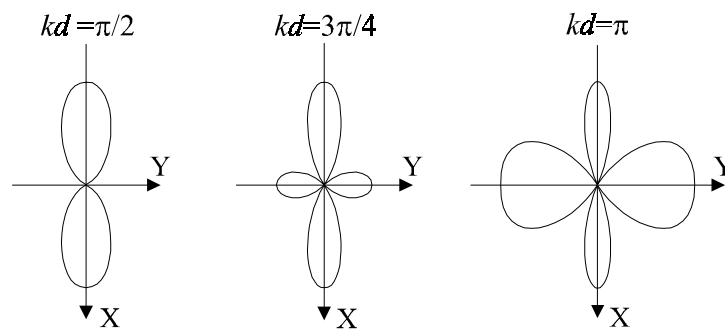


Fig. 6.9 Cortes de la ganancia directiva del sistema de dos dipolos en el plano X-Y

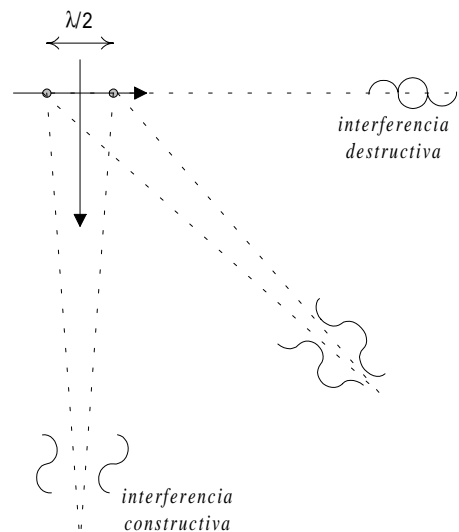


Fig. 6.10 El análisis cualitativo de las interferencias producidas a grandes distancias permite prever la forma del diagrama de radiación, al menos en algunas direcciones particulares (caso  $k2d=\pi$ )

En la figura 6.10 se muestra que el valor del diagrama en algunas direcciones eran previsibles por simple inspección de la geometría del sistema.

## 6.4 Radiación de una antena larga de tipo dipolo

Una antena larga es aquella cuyas dimensiones son del orden de la longitud de onda de emisión.

Podemos aprovechar los resultados precedentes para realizar el estudio de la radiación de este tipo de antenas. Para ello se realiza *una partición de la longitud de la antena larga en una sucesión de dipolos elementales*, y el campo eléctrico total se obtiene como la suma de los campos producidos por cada uno de ellos.

El campo creado por un dipolo corto que ha sido desplazado respecto del origen es:

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi} jI_0 h k \eta_0 \frac{\exp(-jk|\vec{r} - \vec{r}_0|)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \sin\theta \hat{\theta} \quad (6.42)$$

con el dipolo orientado en la dirección Z y donde  $\vec{r}_0$  es el vector de posición del dipolo.

En la aproximación de campo lejano ( $r \gg \lambda$ ) y con  $|\vec{r}_0| \ll r$  se obtiene la expresión:

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi} jI_0 h k \eta_0 \frac{\exp(-jkr)}{r} \exp(+jk\hat{r} \cdot \vec{r}_0) \sin\theta \hat{\theta} \quad (6.43)$$

La distribución de corrientes en la antena tiene forma senoidal, con valor nulo en los extremos, tal como se muestra en la figura 6.11.

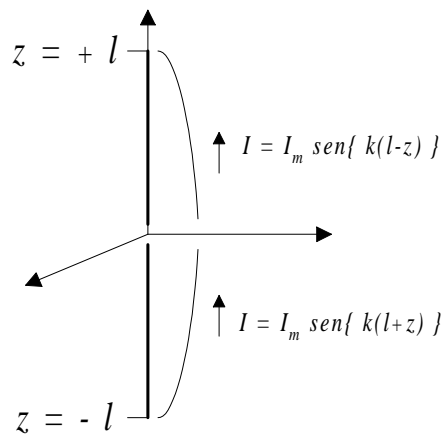


Fig. 6.11 Dipolo largo de  $\lambda/2$

La forma senoidal obedece a que realizamos el análisis en régimen senoidal permanente (en tiempo), lo que fuerza una onda estacionaria de corriente de este tipo también espacialmente. Ahora sí imponemos la condición de contorno de corriente nula en los extremos, y por tanto prescindimos de la idealización que suponía admitir una concentración de carga infinita (carga puntual) en los extremos del dipolo.

El diferencial de campo radiado producido por cada diferencial de hilo es:

$$d\vec{E}_{rad}(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi} j I_m \sin\{k(l \mp z')\} dz' k \eta_0 \frac{\exp(-jkr)}{r} \exp(-jkz' \cos \theta) \sin \theta \hat{\theta}$$

que se obtiene haciendo las substituciones adecuadas en la ecuación anterior. La integral entre los extremos del dipolo permite una expresión analítica para el campo eléctrico, y a partir de él se calcula el campo magnético. El resultado final es:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{rad}(\vec{r}) &= \frac{1}{2\pi} j \frac{I_m \eta}{r} \frac{\cos(kl \cos \theta) - \cos kl}{\sin \theta} e^{-jkr} \hat{\theta} \\ \vec{H}_{rad}(\vec{r}) &= \frac{1}{2\pi} j \frac{I_m}{r} \frac{\cos(kl \cos \theta) - \cos kl}{\sin \theta} e^{-jkr} \hat{\phi} \end{aligned} \quad (6.44)$$

La antena de este tipo más popular es el dipolo de media longitud de onda, donde se elige

$$2l = \lambda/2$$

El vector de Poynting medio para ese caso es:

$$\vec{P}_m = \frac{1}{8\pi^2} \eta_0 \frac{|I_m|^2}{r^2} \frac{\cos^2(\pi/2 \cos \theta)}{\sin^2 \theta} \hat{r} \quad (6.45)$$

La integral del vector de Poynting a través de una superficie esférica no tiene solución analítica, y por tanto la potencia radiada, la ganancia directiva y la resistencia de radiación deben obtenerse mediante cálculo numérico. Se comprueba que la resistencia de radiación del dipolo en lambda medios es de 73  $\Omega$ , por lo que es mucho más eficiente que el dipolo corto.

El diagrama de radiación sí puede obtenerse a partir de (6.45). En la figura 6.12 se muestra una sección del diagrama en un plano vertical.

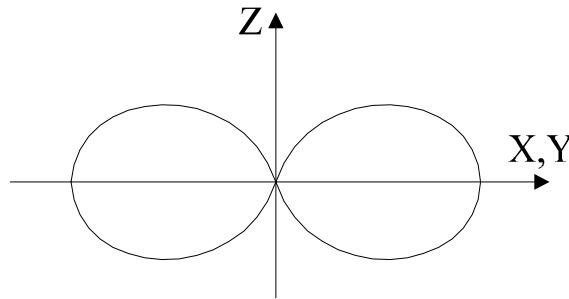


Fig. 6.12 Diagrama de radiación del dipolo en  $\lambda/2$

## 6.5 Emisión en campo lejano: generalización

La onda emitida por un sistema radiante a distancias mucho mayores que sus propias dimensiones y que la longitud de onda de emisión es similar a una onda plana, tal como se ha visto en el caso del dipolo.

Este hecho permite realizar aproximaciones de partida que simplifican notablemente los cálculos. Lo veremos desde un punto de vista totalmente general.

El campo eléctrico se escribe en función de los potenciales en la forma:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - j\omega \vec{A} \quad (6.46)$$

y mediante la relación que establece la norma de Lorentz puede expresarse en función del potencial vector:

$$\vec{E} = -j\omega \vec{A} - j\frac{1}{\omega\mu_0\epsilon_0}\nabla(\nabla\cdot\vec{A}) \quad (6.47)$$

Estamos interesados en el cálculo del campo a grandes distancias, por lo que basta con considerar los términos del potencial vector que varíen con  $r^{-1}$ . Escribimos:

$$\vec{A}_{rad}(r, \theta, \varphi) \approx \frac{\exp(-jkr)}{kr} (A'_r(\theta, \varphi)\hat{r} + A'_\theta(\theta, \varphi)\hat{\theta} + A'_\varphi(\theta, \varphi)\hat{\phi}) \quad (6.48)$$

y trataremos de obtener la forma del campo eléctrico a través de la Ec. (6.47).

Aplicamos:  $\nabla\cdot(f\vec{F}) = \nabla f\cdot\vec{F} + f\nabla\cdot\vec{F}$  a (6.44), y resulta:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) &= \nabla \left( \frac{\exp(-jkr)}{kr} \right) \cdot \vec{A}'(\theta, \varphi) + \frac{\exp(-jkr)}{kr} \nabla \cdot \vec{A}' \approx \\ &\approx k \frac{1+jkr}{(kr)^2} \exp(-jkr) A'_r + \frac{1}{r^2} (\dots) + \frac{1}{r^3} (\dots) +\end{aligned}$$

porque del segundo término no saldrá ningún sumando con dependencia más lenta que  $r^{-2}$ , con lo que no tiene relevancia para el campo radiado.

Calculamos el gradiente de la expresión anterior seleccionando los términos de interés:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) \approx -\frac{k}{r} A'_r \exp(-jkr) + \frac{1}{r^2} (\dots) +$$

Y se obtiene finalmente:

$$-j \frac{1}{\omega \mu_0 \epsilon_0} \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) \approx j \frac{k^2}{\omega \mu_0 \epsilon_0} \frac{1}{kr} A'_r \exp(-jkr) = j\omega A_r$$

El campo eléctrico radiado se escribe entonces simplemente como:

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}) \approx -j\omega (A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}) \quad (6.49)$$

Compruebe en los dos casos estudiados anteriormente que se satisface esa relación.

De forma similar se comprueba que tampoco el campo magnético tiene componente radial a grandes distancias. Se obtiene:

$$\vec{H}_{rad}(\vec{r}) \approx -j \frac{\omega}{\eta_0} \hat{r} \times (A_\theta \hat{\theta} + A_\phi \hat{\phi}) \quad (6.50)$$



## PROBLEMAS - CAPÍTULO 6

1. Dos dipolos eléctricos cortos están situados sobre el eje Z y orientados en la misma dirección. Las corrientes que recorren ambos dipolos tienen igual amplitud y fase (RSP). La distancia que los separa es  $2d$  y la longitud de cada dipolo  $h$  (Fig. 1).

- a) Compruebe que el campo radiado (a grandes distancias) por el conjunto de ambos dipolos es:

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}) = k_0 \eta_0 \frac{I_0 h}{4\pi r} \sin \theta \cos(kd \cos \theta) e^{-jkr} \hat{\theta}$$

y escriba las aproximaciones que ha realizado para llegar a esa expresión.

- b) Calcule el campo magnético radiado.  
c) Calcule la densidad de potencia media y la potencia radiada por el sistema.  
d) Dibuje el diagrama de radiación en un plano vertical para  $kh = 0$ ,  $kh = \pi/2$  y  $kh = \pi$ .

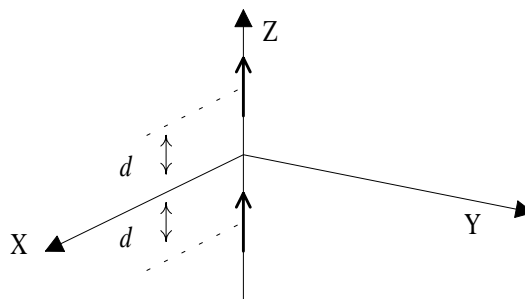


Fig. 1

2. Una cierta distribución de corriente de una antena, en RSP, produce un potencial vector en todo el espacio de la forma:

$$\vec{A}(\vec{r}) = C \frac{e^{-jkr}}{r} \left( j + \frac{1}{kr} \right) \sin \theta \hat{\phi}$$

donde  $C$  es una constante.

- a) Calcule los campos eléctrico y magnético a grandes distancias.  
b) Calcule el vector de Poynting medio y la potencia radiada.  
c) Obtenga el diagrama de radiación de la antena.

3. El potencial vector de un dipolo elemental en campo lejano viene dado por la expresión:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_0 h \frac{e^{-jkr}}{r} e^{jk\hat{r} \cdot \vec{r}_0} \hat{u}$$

donde  $h$  es su longitud,  $I_0$  es el fasor de la corriente (homogénea) que lo recorre, y los vectores  $\hat{u}$  y  $\vec{r}_0$  señalan la orientación y la posición del dipolo, respectivamente y  $\hat{r}$  es el vector unitario desde el origen de coordenadas. Se han realizado las aproximaciones:  $r \gg \lambda$  y  $r \gg h^2 / \lambda$ .

Considérese la agrupación de tres dipolos idénticos como la mostrada en la figura 2. Las corrientes que recorren cada uno de ellos son iguales.

- Determine las expresiones del campo eléctrico radiado y del vector de Poynting medio en el plano XY.
- Si la frecuencia es de 200 MHz ¿cuál es el valor mínimo de  $d$ , separación entre los dipolos, para el que no se radia potencia en la dirección Y?
- Para el valor de  $d$  obtenido en el apartado anterior determine las demás direcciones de radiación nula en el plano XY.
- ¿En qué dirección del espacio la agrupación radia la máxima potencia?

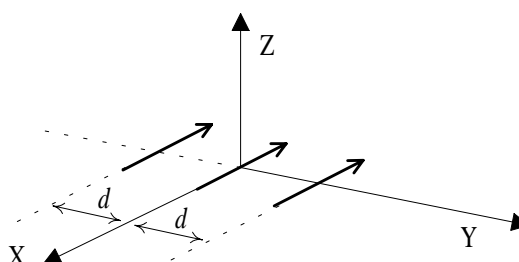


Fig.2

**4.-** Dos dipolos cortos están orientados en la dirección Z, separados una distancia  $2d$ , y situados a un lado y otro del origen, sobre el eje X, tal como muestra la figura 3. Las corrientes de cada dipolo son  $I_1$  e  $I_2$ , con la relación:

$$I_2 = I_1 e^{j\psi}$$

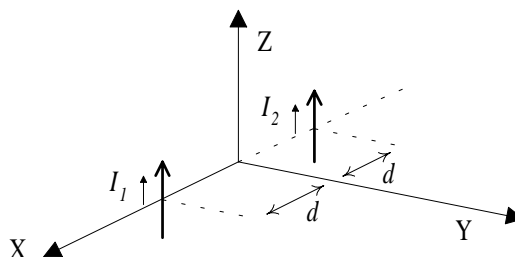


Fig. 3

- Compruebe que, si  $d \ll r$ , se puede escribir:  $r_1 \approx r - d \cos \varphi$  y  $r_2 \approx r + d \cos \varphi$ , donde  $r$  es la distancia del origen de coordenadas al punto considerado en el plano XY, y  $r_1$  y  $r_2$  son las distancias al punto desde cada uno de los dipolos.

- b) Compruebe que el campo radiado en el plano XY debe ser proporcional a  $\cos(kd \cos \varphi - \frac{\psi}{2})$ .
- c) Determine el valor del desfase entre las corrientes,  $\psi$ , que se precisa si se desea tener un máximo de radiación para  $\varphi = 45^\circ$ , en el caso  $d = \lambda/4$ .
- d) Obtenga los ceros del diagrama de radiación en el plano XY y dibújelo.

**5.-** Dos dipolos están situados sobre el origen de coordenadas, uno de ellos con orientación en Z y el otro dispuesto oblicuamente, en el plano YZ, formando un ángulo  $\alpha$  respecto al eje Z (fig. 4).

El potencial vector creado en todo el espacio por un dipolo centrado en el origen y orientado en la dirección de un cierto vector unitario  $\hat{u}$  es:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_i h \frac{e^{-jkr}}{r} \hat{u}$$

- a) Calcule el campo radiado por el conjunto de ambos dipolos a grandes distancias.
- b) Particularice la expresión anterior para puntos del plano XY, y obtenga la polarización de la ondas emitidas en las direcciones X e Y,
  - b1) si las corrientes de ambos dipolos son idénticas;
  - b2) si las corrientes son de la misma amplitud pero las fases están en cuadratura.
- c) ¿En alguno de los casos anteriores podría obtenerse una polarización circular?

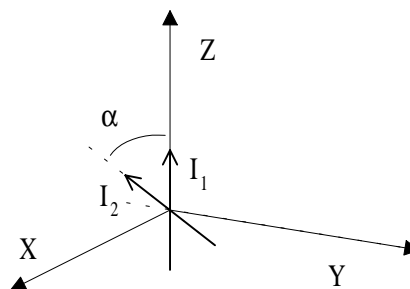


Fig. 4

**6.-** Calcule el potencial vector producido a grandes distancias por una espira de corriente de radio  $a$  centrada en el origen de coordenadas y paralela al plano XY (fig. 5). La corriente que la recorre es uniforme y de frecuencia  $\omega$ .

Utilice el hecho de que la distancia entre un diferencial cualquiera de espira, situado en  $\vec{r}'$ , y un punto arbitrario del espacio,  $\vec{r}$ , puede aproximarse en la forma:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = r - a \sin \theta \cos(\varphi - \varphi') \quad \text{si } r' \ll r$$

y aproxime el término de fase asumiendo que  $\lambda \gg a$ .

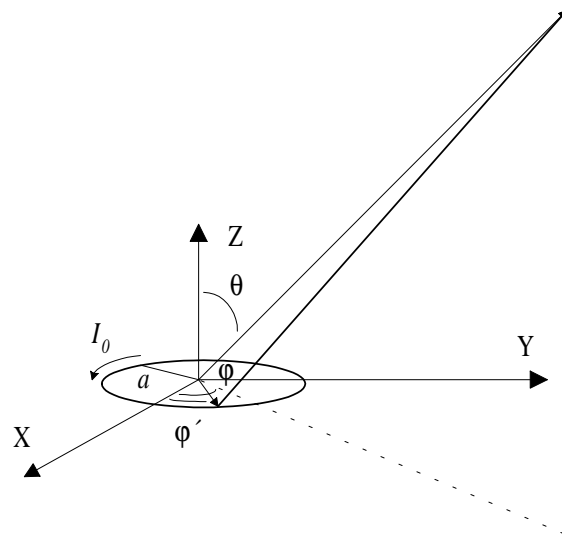
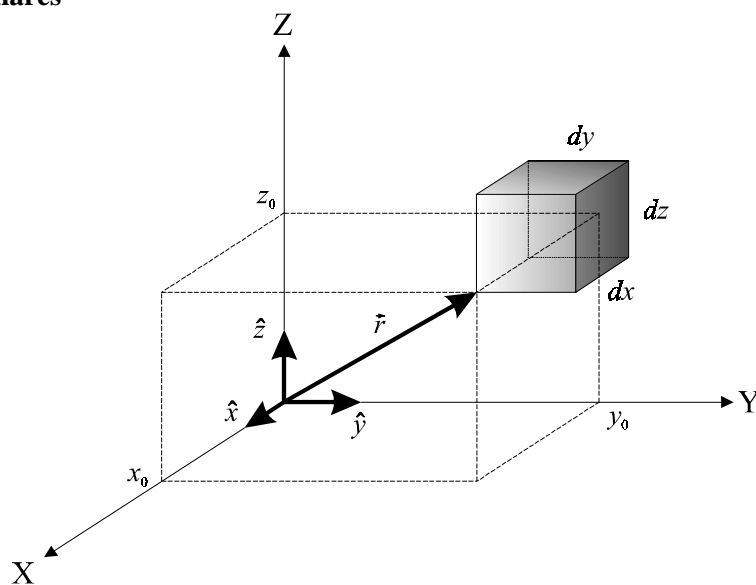


Fig. 5 Dipolo magnético oscilante

## Anexo A: Sistemas de coordenadas

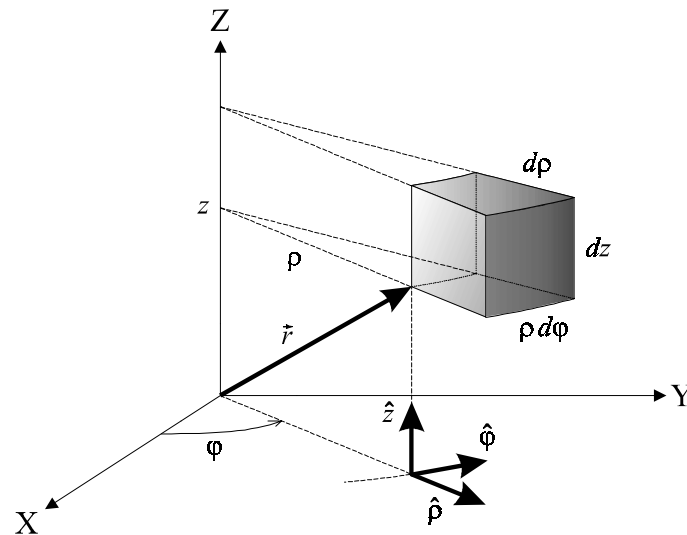
### Coordenadas rectangulares



- radiovector desde el origen:  $\vec{r} = x_0 \hat{x} + y_0 \hat{y} + z_0 \hat{z}$
- diferencial de longitud genérico:  $d\vec{l} = dx \hat{x} + dy \hat{y} + dz \hat{z}$
- diferenciales de superficie principales:  $d\vec{s} = dx dy \hat{z}, dx dz \hat{y}, dy dz \hat{x}$
- diferencial de volumen:  $dv = dx dy dz$
- vector genérico:  $\vec{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$
- vector unitario genérico:  $\hat{r} = \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

Los vectores unitarios principales son  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$ ,  $\hat{z}$  con las relaciones:  
 $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ ,  $\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$ ,  $\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$ .

### Coordenadas cilíndricas



- radiovector desde el origen:  $\vec{r} = \hat{x} \rho \cos \varphi + \hat{y} \rho \sin \varphi + \hat{z} z$
- diferencial de longitud genérico:  $d\vec{l} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\varphi \hat{\phi} + dz \hat{z}$
- diferenciales de superficie principales:  $d\vec{s} = \rho d\rho d\varphi \hat{z}, d\rho dz \hat{\phi}, \rho d\varphi dz \hat{\rho}$
- diferencial de volumen:  $dv = \rho d\varphi d\rho dz$
- vector genérico:  $\vec{A} = A_\rho \hat{\rho} + A_\varphi \hat{\phi} + A_z \hat{z}$
- vector unitario genérico:  $\hat{r} = \frac{\hat{x} \rho \cos \varphi + \hat{y} \rho \sin \varphi + \hat{z} z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$

Los vectores unitarios principales son  $\hat{\rho}$ ,  $\hat{\phi}$ ,  $\hat{z}$  ( $\hat{\rho}$  y  $\hat{\phi}$  dependen de la posición del punto considerado) con las relaciones:  $\hat{\rho} \times \hat{\phi} = \hat{z}$ ,  $\hat{z} \times \hat{\rho} = \hat{\phi}$ ,  $\hat{\phi} \times \hat{z} = \hat{\rho}$ .

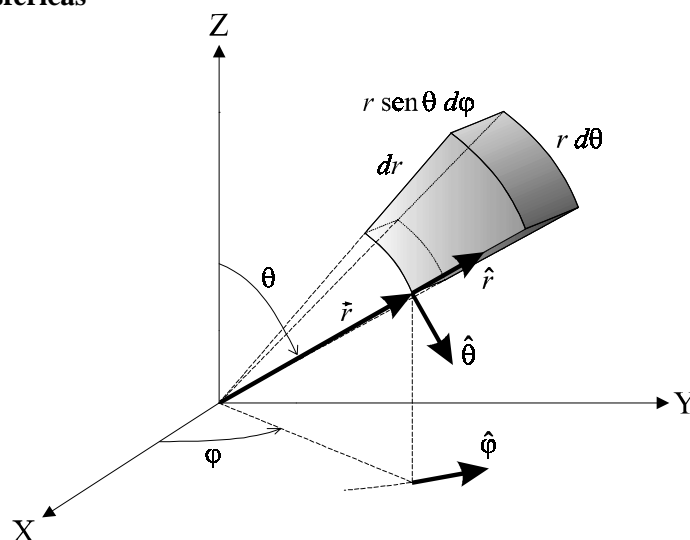
Cambio de sistema de coordenadas: de cilíndricas a cartesianas:

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi \\ \hat{\phi} &= -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi \\ \hat{z} &= \hat{z}\end{aligned}$$

de cartesianas a cilíndricas:

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \hat{\rho} \cos \varphi - \hat{\phi} \sin \varphi \\ \hat{y} &= \hat{\rho} \sin \varphi + \hat{\phi} \cos \varphi \\ \hat{z} &= \hat{z}\end{aligned}$$

### Coordenadas esféricas



- radiovector desde el origen:  $\vec{r} = \hat{x} r \sin \theta \cos \varphi + \hat{y} r \sin \theta \sin \varphi + \hat{z} r \cos \theta$
- diferencial de longitud genérico:  $d\hat{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\varphi \hat{\phi}$
- diferenciales de superficie principales:  $d\vec{s} = dr r d\theta \hat{\phi}, dr r \sin \theta d\varphi \hat{\theta}, r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{r}$
- diferencial de volumen:  $dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$
- vector genérico:  $\vec{A} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\varphi \hat{\phi}$

- vector unitario genérico:  $\hat{r} = \frac{r \sin \theta \cos \varphi \hat{x} + r \sin \theta \sin \varphi \hat{y} + r \cos \theta \hat{z}}{r}$

Los vectores unitarios principales son  $\hat{r}$ ,  $\hat{\theta}$ ,  $\hat{\varphi}$  (todos ellos dependientes de la posición del punto en que se consideran) con las relaciones:

$$\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{\varphi}, \quad \hat{\varphi} \times \hat{r} = \hat{\theta}, \quad \hat{\theta} \times \hat{\varphi} = \hat{r}$$

Cambio de sistema de coordenadas: de esféricas a cartesianas

$$\begin{aligned}\hat{r} &= \hat{x} \sin \theta \cos \varphi + \hat{y} \sin \theta \sin \varphi + \hat{z} \cos \theta \\ \hat{\theta} &= \hat{x} \cos \theta \cos \varphi + \hat{y} \cos \theta \sin \varphi - \hat{z} \sin \theta \\ \hat{\varphi} &= -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi\end{aligned}$$

de cartesianas a esféricas:

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \hat{r} \sin \theta \cos \varphi + \hat{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \hat{\varphi} \sin \varphi \\ \hat{y} &= \hat{r} \sin \theta \sin \varphi + \hat{\theta} \cos \theta \sin \varphi + \hat{\varphi} \cos \varphi \\ \hat{z} &= \hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \sin \theta\end{aligned}$$



## Anexo B: Fórmulas de análisis vectorial

### Operadores

Coordenadas rectangulares

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

$$\nabla \cdot A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times A = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 A = \nabla^2 A_x \hat{x} + \nabla^2 A_y \hat{y} + \nabla^2 A_z \hat{z} = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla \times (\nabla \times A)$$

Coordenadas cilíndricas

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

$$\nabla \cdot A = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times A = \left( \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left( \frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left[ \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] \hat{z}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 A = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla \times (\nabla \times A)$$

Coordenadas esféricas

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}$$

$$\nabla \cdot A = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla \times A = \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} \right] \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}$$

$$\nabla^2 A = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla \times \nabla \times A$$

### Identidades

$$(A \times B) \cdot C = A \cdot (B \times C)$$

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$$

$$\nabla(fg) = f \nabla g + g \nabla f$$

$$\nabla(a/b) = (1/b) \nabla a - (a/b^2) \nabla b$$

$$\nabla(A \cdot B) = (B \cdot \nabla)A + (A \cdot \nabla)B + B \times (\nabla \times A) + A \times (\nabla \times B)$$

$$\nabla \cdot (fA) = (\nabla f) \cdot A + f(\nabla \cdot A)$$

$$\nabla \cdot (A \times B) = B \cdot (\nabla \times A) - A \cdot (\nabla \times B)$$

$$(\nabla \cdot \nabla)f = \nabla^2 f$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$$

$$\nabla \times (fA) = (\nabla f) \times A + f(\nabla \times A)$$

$$\nabla \times (A \times B) = (B \cdot \nabla)A - (A \cdot \nabla)B + (\nabla \cdot B)A - (\nabla \cdot A)B$$

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$$

## Anexo C: Funciones de Bessel

La ecuación diferencial de Bessel tiene la forma:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2) = 0$$

y la solución general es:

$$y = A J_n(x) + B N_n(x)$$

donde:

$J_n(x)$  es la función de Bessel de primera especie y orden  $n$ , y

$N_n(x)$  es la función de Bessel de segunda especie y orden  $n$ .

Las soluciones de primera especie convergen para cualquier valor finito de  $x$ , y su expresión detallada es:

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(p+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}$$

Para pequeños valores de  $x$  puede ser suficiente la aproximación:  $J_n(x) \approx \left(\frac{x}{2}\right)^n$ .

Las funciones de segunda especie, o funciones de Neumman, no convergen para valores pequeños de  $x$ , ya que todas ellas presentan una singularidad en  $x=0$ . Su expresión es:

$$N_n(x) = \frac{J_n(x) \cos n\pi - J_{-n}(x)}{\sin n\pi}$$

En las figuras C.1 y C.2 se representan, respectivamente, ambas funciones para diversos órdenes. En el capítulo 5 (sección 5.3) se mostraron los primeros ceros de algunas de las funciones de primera especie y de su derivada primera.

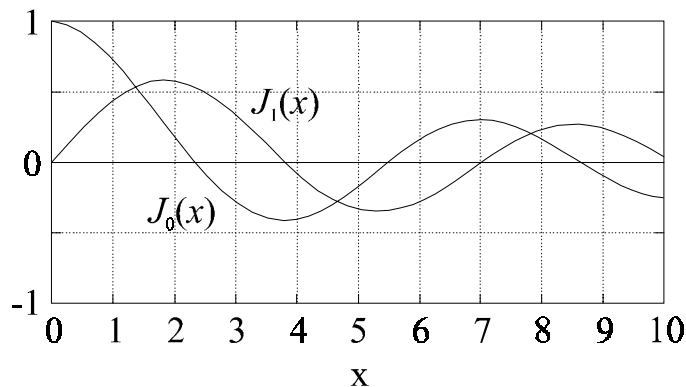


Figura C.1 *Funciones de Bessel*

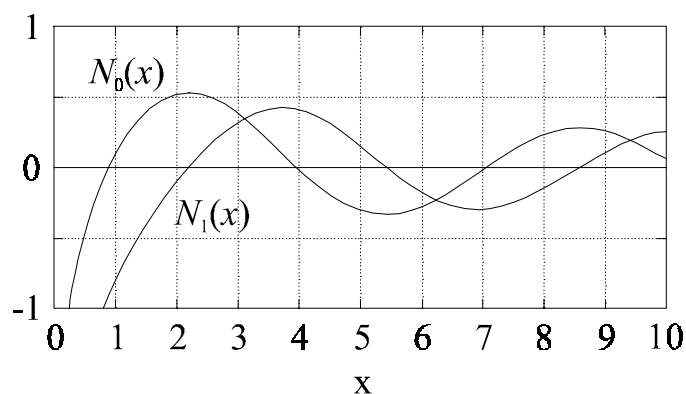


Figura C.2 *Funciones de Neumann*

Las expresiones asintóticas de las funciones para el caso  $x \gg n$  son:

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$N_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Las funciones de Bessel de primera especie están relacionadas con las funciones trigonométricas mediante *la integral de Sommerfeld*:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin \varphi - n\varphi) d\varphi$$

Las funciones de Hankel también son soluciones de la ecuación diferencial de Bessel, y se definen en la forma:

$$\begin{aligned} H_n^1(x) &= J_n(x) + jN_n(x) \\ H_n^2(x) &= J_n(x) - jN_n(x) \end{aligned}$$

La *ecuación modificada de Bessel* se obtiene mediante un cambio en la variable, sustituyendo  $x$  por  $jx$ . Resulta:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + n^2) = 0$$

Existen soluciones de esta ecuación, convergentes para  $x \gg n$  (o  $x \rightarrow \infty$ ), que pueden obtenerse a partir de las funciones de Hankel:

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2} j^{n+1} [J_n(jx) + jN_n(jx)]$$

La forma asintótica para  $x \gg n$  (o  $x \rightarrow \infty$ ), es:

$$K_n(x) \approx \left( \frac{\pi}{2x} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-x}$$

Para  $x$  pequeño y  $n > 1$ :

$$K_n(x) \approx \frac{1}{2} (n-1)! \left( \frac{2}{x} \right)^n$$

y para  $x$  pequeño y  $n = 0$ :

$$K_0(x) \approx -(\ln \frac{x}{2} + 0,5772)$$

Las relaciones de recurrencia son:

$$J_{n+1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - \frac{d}{dx} J_n(x)$$

$$J_{n-1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) + \frac{d}{dx} J_n(x)$$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

y:

$$K_{n+1}(x) = \frac{n}{x} K_n(x) - \frac{d}{dx} K_n(x)$$

$$K_{n-1}(x) = -\frac{n}{x} K_n(x) - \frac{d}{dx} K_n(x)$$

$$K_{-n}(x) = K_n(x)$$

## Anexo D: Función delta de Dirac

La función delta de Dirac se utilizó primeramente en teoría de la probabilidad y, más adelante, ha pasado a otros campos de la ciencia, por su idoneidad para describir singularidades físicas.

Se define de la siguiente forma:

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq x_0 \\ \infty & \text{si } x = x_0 \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

donde, además, deben satisfacerse:

$$\int_{C/x_0 \in C} \delta(x - x_0) dx = 1, \quad (\text{D.2})$$

y:

$$\int_{C/x_0 \in C} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0). \quad (\text{D.3})$$

El hecho de tomar un valor no acotado en un punto singular nos indica, usualmente, que estamos refiriéndonos a una densidad (sea de probabilidad o de alguna magnitud física en casos idealizados). En teoría electromagnética se utiliza fundamentalmente para describir densidades infinitas de carga eléctrica, o bien de potencia o de energía electromagnética. Su utilidad radica en que permite tratar casos particulares ideales con las ecuaciones generales y, por tanto, sin necesidad de formularlos de una manera peculiar.

También se utiliza para representar la amplitud de las ondas (sea del campo eléctrico, del campo magnético, del voltaje o de la corriente) en problemas con espectros híbridos (en parte discretos y en parte continuos), como es el caso en el que se considera una portadora ideal con la señal modulada, o cuando se trabaja con modos guiados (discretos) junto con modos radiados (espectro continuo) en guías de onda, etc...

Usualmente las magnitudes que se formalizan mediante deltas de Dirac han de experimentar un proceso de integración matemática, para pasar a cantidades físicas medibles.

La delta de Dirac es una función peculiar, igualmente, *porque su argumento no es adimensional*, sino que tiene unidades (en los casos más usuales, de longitud, de tiempo o de frecuencia). Como que la ecuación D.2 debe llevar a un resultado unidad adimensional, entonces a la propia función también se le asignan unidades: la inversa de su argumento.

Dos ejemplos típicos son:

$$\rho(\vec{r}) = q_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \quad (C/m^3)$$

que representa una carga puntual de valor  $q_0$  en el punto  $(x_0, y_0, z_0)$ , y:

$$S(f) = A^2 (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) \quad (W/Hz)$$

que es el espectro de potencia de una función coseno de frecuencia  $f_0$  (infinitamente extendida en el tiempo, es decir, ideal).

La primera expresión mostrada suele escribirse más abreviadamente:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \quad (D.4a)$$

En coordenadas esféricas sería:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \quad (D.4b)$$

Es importante insistir en el hecho de que la delta deberá ser integrada antes de concluir el problema en el que interviene, o, de otro modo, es probable que se estén cometiendo errores en su manejo.

Las propiedades de la delta de Dirac son:

$$i) \quad \delta(-x) = \delta(x) \quad (D.5)$$

$$ii) \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad \text{o, en general:} \quad \delta[g(x)] = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i) \quad (D.6)$$

$$iii) \quad g(x) \delta(x - x_0) = g(x_0) \delta(x - x_0) \quad (D.7)$$

$$iv) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - y) \delta(x - z) dx = \delta(y - z) \quad (D.8)$$



En la ecuación (D.6) los valores  $x_i$  son los ceros de la función  $g(x)$  (que no deben anular, sin embargo, su derivada).

Relaciones de derivación e integración típicas son:

$$\frac{dU(x-x_0)}{dx} = \delta(x-x_0) \quad \leftrightarrow \quad \int \delta(x-x_0) dx = U(x-x_0) + C \quad (D.9)$$

$$\int x \delta(x-x_0) dx = x_0 U(x-x_0) + C \quad (D.10)$$

$$\int x^2 \delta(x-x_0) dx = x_0^2 U(x-x_0) + C \quad (D.11)$$

donde  $U(x)$  es la función escalón unidad, o, también llamada, de Heaviside, y:

$$\nabla^2 \left( \frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(r) \quad (D.12)$$

donde  $\nabla^2$  es la laplaciana.

La delta de Dirac aparece como el límite ideal de situaciones realistas. Puede probarse que los límites de algunas funciones usuales dan lugar a la función delta. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \Pi\left(\frac{x-x_0}{a}\right) &= \delta(x-x_0) \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\text{sen} \frac{2\pi}{\lambda} (x-x_0)}{\pi(x-x_0)} &= \delta(x-x_0) \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\text{sen} \frac{2\pi a}{\lambda} (x-x_0)}{\pi(x-x_0)} &= \delta(x-x_0) \quad \forall a > 0 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon \sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}} &= \delta(x) \end{aligned} \quad (D.13)$$

Otras relaciones de interés cuando se trabaja con espectros de frecuencia (temporal o espacial) son:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jk(x-x_0)} dk = \delta(x-x_0) \quad (\text{D.14})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos kx \cos k'x dk = \pi [\delta(k-k') + \delta(k+k')] \quad (\text{D.15})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin kx \sin k'x dk = j\pi [\delta(k-k') - \delta(k+k')] \quad (\text{D.16})$$

Por último, cabe añadir que en procesamiento digital de señales se utiliza frecuentemente *la secuencia delta*, pero no debe confundirse con la delta de Dirac, ya que, en este caso, no tiene el mismo significado. La secuencia delta se define sencillamente como:

$$\delta[n-n_0] = \begin{cases} 0 & n \neq n_0 \\ 1 & n = n_0 \end{cases}$$

## Soluciones a los problemas

### Capítulo 1: Campos eléctricos y magnéticos en condiciones estáticas

#### Campos electrostáticos

1. a) De la atmósfera hacia la Tierra; b)  $-1,77 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2$ ; c)  $7,97 \times 10^{-13} \text{ C/m}^3$ ; d)  $2,2 \times 10^5 \text{ V}$ .

2. a) El átomo es neutro; b)  $K = q(4\pi\epsilon_0)^{-1}$ ; c)  $\vec{E}(\vec{r}) = K \frac{\exp(-r/a)}{r} (a^{-1} + r^{-1}) \hat{r}$ .

3. a)  $\sigma(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi} \frac{-2d}{(d^2 + y^2 + z^2)}$ ; b)  $-q$ ; c)  $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4d^2}$ .

4. a)  $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{\vec{r} - (d + \frac{1}{2})\hat{z}}{|\vec{r} - (d + \frac{1}{2})\hat{z}|^3} - \frac{\vec{r} - (d - \frac{1}{2})\hat{z}}{|\vec{r} - (d - \frac{1}{2})\hat{z}|^3} + \frac{\vec{r} + (d - \frac{1}{2})\hat{z}}{|\vec{r} + (d - \frac{1}{2})\hat{z}|^3} - \frac{\vec{r} + (d + \frac{1}{2})\hat{z}}{|\vec{r} + (d + \frac{1}{2})\hat{z}|^3} \right);$

b)  $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{3(p_0\hat{z} \cdot \frac{\vec{r}-d\hat{z}}{|\vec{r}-d\hat{z}|}) \frac{\vec{r}-d\hat{z}}{|\vec{r}-d\hat{z}|} - p_0\hat{z}}{|\vec{r}-d\hat{z}|^3} + \frac{3(p_0\hat{z} \cdot \frac{\vec{r}+d\hat{z}}{|\vec{r}+d\hat{z}|}) \frac{\vec{r}+d\hat{z}}{|\vec{r}+d\hat{z}|} - p_0\hat{z}}{|\vec{r}+d\hat{z}|^3} \right).$

5. a)  $\rho_b = -3 \frac{P_0}{a}$ ,  $\sigma_b(r=a) = -P_0$ ,  $\sigma_b(r=2a) = 2P_0$ ; b)  $\vec{E}(\vec{r}) = 0$  en la cavidad interior

y fuera del dieléctrico;  $\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{P_0}{\epsilon_0} \frac{r}{a} \hat{r}$  en  $a < r < 2a$ ; c)  $\Delta\phi = \frac{3P_0}{2\epsilon_0} a$ .

6. a)  $\rho_b = 0$ ,  $\sigma_b(r=R) = P_0 \cos\theta$ ;

b) nulo en ambos casos;

c) la primera expresión es la apropiada para el exterior de la esfera, para el interior es la segunda;

$$d) \quad E_{\text{int tang}} = E_{\text{ext tang}} \Big|_{r=R} \quad D_{\text{ext normal}} - D_{\text{int normal}} \Big|_{r=R} = \sigma_{\text{libre}} = 0;$$

$$e) \quad \vec{E}_{\text{int}} = -\frac{P_0}{3\epsilon_0} \hat{z} \quad \vec{E}_{\text{ext}} = \frac{P_0 R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta});$$

$$f) \quad \vec{p} = \frac{4}{3} \pi R^3 P_0 \hat{z}.$$

$$7. \quad F = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{V_0^2}{d^2}.$$

8. a) Deben ser iguales;

$$b) \quad \vec{E} = \frac{A}{r^2} \hat{r} \quad \text{con} \quad A = V(a^{-1} + c^{-1} - b^{-1} - d^{-1})^{-1} \quad \text{en el dielectrico;} \quad \vec{E} = 0 \quad \text{en el resto;}$$

$$c) \quad \sigma(r=a) = \epsilon_0 \frac{1}{a^2} A, \quad \sigma(r=d) = -\epsilon_0 \frac{1}{d^2} A; \quad d) \quad C = \frac{4\pi \epsilon_0}{a^{-1} + c^{-1} - b^{-1} - d^{-1}}.$$

$$9. \quad a) \quad \phi(\vec{r}) = \phi(\rho) = V \frac{\ln(\frac{\rho}{b})}{\ln(\frac{a}{b})}; \quad b) \quad \vec{E}(\rho) = \frac{V}{\ln(\frac{b}{a})} \frac{1}{\rho} \hat{\rho}; \quad c) \quad C = \frac{\pi}{\ln(\frac{b}{a})} (\epsilon_0 + \epsilon_1)$$

10. a) Debe comprobarse si su laplaciana es nula y si satisface las condiciones de potencial constante en el plano de tierra y en el conductor;

$$b) \quad \sigma(y=0) = -\frac{V\epsilon_0}{\ln(\frac{h+D}{h-D})} \frac{4D}{x^2 + D^2}; \quad c) \quad C = \frac{4\pi \epsilon_0}{\ln(\frac{h+D}{h-D})}.$$

$$11. \quad a) \quad D_\rho = \frac{b}{4\rho} \sigma_0; \quad b) \quad E_\rho = \frac{1}{6\epsilon_0} \frac{b\sigma_0}{b+\rho}; \quad c) \quad C = 3\pi \epsilon_0 \frac{1}{\ln(\frac{8}{5})}; \quad d) \quad U_e = \frac{1}{2} CV^2.$$

$$12. \quad a) \quad C = \frac{S \epsilon_0}{d_1}; \quad b1) \quad Q = V_1 S \epsilon_0 \frac{1}{d_1}; \quad b2) \quad V_2 = V_1 \frac{d_2}{d_1}; \quad b3) \quad U = \frac{1}{2} S \epsilon_0 \frac{V_1^2}{d_1} (1 - \frac{d_1}{d_2});$$

$$c) \quad Q_2 = V_1 S \epsilon_0 \frac{d_2}{d_1^2}.$$

**Campos magnetostáticos**

13. a)  $B = 0$  encima y debajo de ambas láminas,  $B = \mu_0 J_0$  entre ambas, dirigido perpendicularmente a las corrientes; b)  $F = \frac{1}{2} \mu_0 J_0^2$  de repulsión.

$$14. \quad \vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2} \frac{NI}{h} \left( \frac{z + h/2}{(a^2 + (z + h/2)^2)^{3/2}} - \frac{z - h/2}{(a^2 + (z - h/2)^2)^{3/2}} \right) \hat{z}$$

$$15. \quad \text{a) } \vec{B}(z=0) = \frac{\mu_0}{2} \frac{NI}{(a^2 + h^2/4)^{1/2}} \hat{z}; \quad \text{b) } B = \mu_0 \frac{N}{h} I \text{ (Ampère)}; \quad \text{c) } \frac{h}{a} = 10.$$

$$16. \quad R = \frac{mv_0}{qB}, \quad \omega = \frac{qB}{m}.$$

$$17. \quad \text{b) } R = \frac{v_0}{qB} m \sin \alpha; \quad \text{c) } v = v_0, \quad \omega = \frac{qB}{m}; \quad \text{d) } T = \frac{2\pi}{qB} m; \quad \text{e) } d = v_0 T \cos \alpha.$$

18. a) Si tomamos  $E$  en la dirección  $Z$  y  $B$  en la dirección  $-Y$  resulta:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} (1 - \cos \omega t) + \frac{a_0}{\omega^2} (\omega t - \sin \omega t) \quad z(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{a_0}{\omega^2} (1 - \cos \omega t)$$

Sólo hay desplazamiento neto según la dirección  $X$ . (En general en la dirección de  $\vec{E} \times \vec{B}$ )

$$19. \quad V_H = \frac{1}{Nq} \frac{I}{a} B$$

$$20. \quad \text{a) } I = 1 \text{ A}; \quad \text{b) } I = 1,07 \times 10^3 \text{ A (!)}$$

$$21. \quad \text{b) } 3,14 \text{ Kg.}$$

$$23. \quad L = \mu \frac{1}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

$$24. \quad L = \frac{\mu}{\pi} \ln\left(\frac{d-a}{a}\right).$$

## Capítulo 2: Ecuaciones de Maxwell

$$1. \quad f.e.m. = -B_0 \, a v.$$

$$2. \quad \vec{J}_v = \frac{1}{\mu} [y(1-y)\hat{y} + z(1-2y)\hat{z}] \quad , \quad \vec{J}_v = H_0 \frac{e^{-\frac{\rho}{a}}}{\rho} \hat{z}.$$

$$3. \quad \text{a) } \vec{E} = \omega B_0 \frac{z^2}{2} \sin \omega t \hat{x}; \quad \text{b) } \vec{B} = -\epsilon_0 \mu_0 \omega^2 B_0 \frac{z^3}{6} \cos \omega t \hat{y};$$

$$\text{c) } \vec{J} = \left( \frac{1}{\mu_0} - \epsilon_0 \omega^2 \frac{z^2}{2} \right) B_0 \cos \omega t \hat{x}.$$

$$4. \quad \sigma_b|_{r=a} = \frac{\lambda}{2\pi a} \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right), \quad \sigma_b|_{r=b} = \frac{\lambda}{2\pi b} \left( \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right), \quad Q_t|_{r=a} = Q_f|_{r=a} + Q_b|_{r=a} = \frac{\lambda l}{\epsilon_r}.$$

$$5. \quad \epsilon_r = \frac{4}{3}.$$

$$6. \quad \text{a) } \beta = \frac{\pi}{2} \, m^{-1}, \quad \alpha = 0,549 \, m^{-1}.$$

$$\text{b) } \sigma = \frac{2\alpha\beta}{\omega\mu} \quad (\text{donde se ha considerado que la conductividad es una magnitud real}) \quad \vec{J} = \sigma \vec{E}.$$

$$7. \quad \text{Densidad de potencia media que actúa sobre las cargas: } \frac{1}{2} \Re \{ \vec{J} \cdot \vec{E}^* \}.$$

### Capítulo 3: Ondas planas

1.  $\hat{k} = \hat{z}$ . a) 212 MHz; b) Polarización circular a izquierdas; d) 2,65 nW / m<sup>2</sup>.

2. a) 300 MHz; b)  $\hat{k} = \frac{1}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{z}$ ; c) Polarización circular a izquierdas.

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} E_o \{ [-\sqrt{2} \cos[\omega t - \pi(x + y + \sqrt{2}z)] + \sin[\omega t - \pi(x + y + \sqrt{2}z)]] \hat{x} + \\ [\sqrt{2} \cos[\omega t - \pi(x + y + \sqrt{2}z)] + \sin[\omega t - \pi(x + y + \sqrt{2}z)]] \hat{y} - \sqrt{2} \sin[\omega t - \pi(x + y + \sqrt{2}z)] \hat{z} \}$$

$$\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\eta} E_o \{ -[\cos[\omega t - \pi(x + y + \sqrt{2}z)] + \sqrt{2} \sin[\omega t - \pi(x + y + \sqrt{2}z)]] \hat{x} + \\ [\sqrt{2} \sin[\omega t - \pi(x + y + \sqrt{2}z)] - \cos[\omega t - \pi(x + y + \sqrt{2}z)]] \hat{y} + \sqrt{2} \cos[\omega t - \pi(x + y + \sqrt{2}z)] \hat{z} \}$$

$$e) E_o = 194,1 \text{ mV} / \text{m}$$

3.

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{2} E \{ \cos[\omega t - 10\pi(x + y + \sqrt{2}z)] \hat{x} + \cos[\omega t - 10\pi(x + y + \sqrt{2}z)] \hat{y} - \\ \sqrt{2} \cos[\omega t - 10\pi(x + y + \sqrt{2}z)] \hat{z} \}$$

$$\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) = \frac{\sqrt{2}}{2\eta} E \{ \cos[\omega t - 10\pi(x + y + \sqrt{2}z)] \hat{x} - \cos[\omega t - 10\pi(x + y + \sqrt{2}z)] \hat{y} \}$$

$$4. \text{ a) } \vec{k} = 2\pi(\sqrt{2}\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}); \quad \text{b) } \hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{x} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\hat{y};$$

$$\text{c) } \vec{H} = \frac{5,15 \times 10^{-4}}{\sqrt{3}} \left[ \left( 1 - j\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \hat{x} - \left( \sqrt{2} + j\frac{1}{2} \right) \hat{y} + j\frac{3}{2}\hat{z} \right] e^{-j2\pi(\sqrt{2}x+y+z)} \text{ A/m};$$

$$\text{d) } \vec{E} = \frac{9,71 \times 10^{-2}}{\sqrt{3}} \left[ (\sqrt{2} + j2)\hat{x} - (1 - j2\sqrt{2})\hat{y} + 3\hat{z} \right] e^{-j2\pi(\sqrt{2}x+y+z)} \text{ V/m}$$

$$5. \text{ a) } \vec{E} = (\hat{x} - j0,71\hat{y})e^{-j6\pi z}, \quad \vec{H} = \frac{1}{\eta}(\hat{y} + j0,71\hat{x})e^{-j6\pi z}; \quad \text{b) } t = 278 \text{ ps}; \quad \text{c) } R = 1,41; \quad R_{dB} = 3 \text{ dB}.$$

$$6. \text{ a) } \vec{E}_D = E_o(\hat{x} - j\hat{y})e^{-jkz}, \quad \vec{E}_I = jE_o(\hat{x} + j\hat{y})e^{-jkz}; \quad \text{b) } \vec{E} = \vec{E}_D + \vec{E}_I = E_o(1+j)(\hat{x} - \hat{y})e^{-jkz};$$

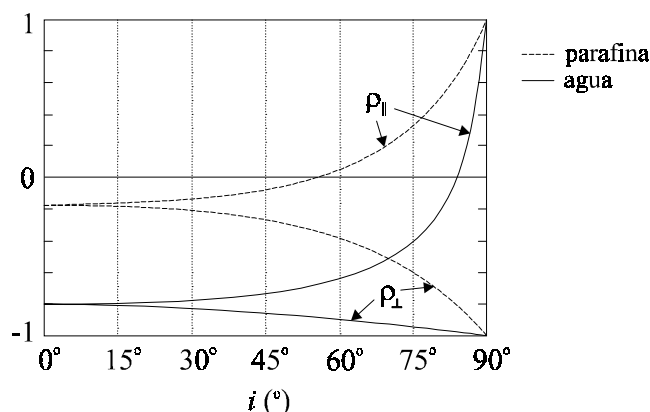
$$\text{c) } \vec{P} = \frac{2}{\eta_o} E_o^2 \hat{z} \text{ W/m}^2;$$

- d) El fasor de la fuerza electromotriz inducida es  $V = 4ajE_o(1+j)\sin ka$  V ; e)  $f = \frac{c}{4a}$ .
7. a) La onda se propaga según  $\hat{z}$  ; b) La onda está polarizada linealmente, con  $\vec{E}$  según  $\hat{y}$  ;  
 c)  $\vec{H} = -\frac{E_o}{\eta} e^{-jkz} \hat{x}$  ; d)  $k = 6,28 \text{ m}^{-1}$ ,  $E_o = 500 \mu\text{V/m}$  ; e)  $V = j0,314 e^{-j3,14 \times 10^{-2}} \mu\text{V}$ .
8. a) La onda se propaga según  $\hat{y}$ ,  $\lambda = 30 \text{ cm}$ ,  $k = 20,94 \text{ m}^{-1}$  ;  
 b)  $\vec{E}(\vec{r}) = E_o \left[ (1+j)\hat{z} - j\sqrt{2} e^{j\pi/4} \hat{x} \right] e^{-jk y}$  ; c) La polarización es circular a derechas ;  
 d)  $\vec{P} = \frac{2E_o^2}{\eta_o} \hat{y}$ .
9. a)  $\vec{H}(\vec{r}) = -jH_o e^{-j\frac{1}{2}(x+y+\sqrt{2}z)} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{x} - \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{y} \right) \text{ A/m}$  ;  
 b)  $\hat{k} = \frac{1}{2} \hat{x} + \frac{1}{2} \hat{y} + \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{z}$ . Se comprueba que  $\hat{k} \cdot \vec{H}(\vec{r}) = 0$ , luego el campo corresponde efectivamente al de una onda plana uniforme ; c)  $f = 47,74 \text{ MHz}$  ;  
 d)  $\vec{E}(\vec{r}) = -j\eta H_o e^{-j\frac{1}{2}(x+y+\sqrt{2}z)} \left( -\frac{1}{2} \hat{x} - \frac{1}{2} \hat{y} + \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{z} \right) \text{ V/m}$  ; e)  $\vec{P} = 9,97 \times 10^{-4} \hat{k} \text{ W/m}^2$ .
10. a) Sí ; b) Sí ; c) Sí ; d) No.

## Capítulo 4: Incidencia de ondas planas

1. a) Dirección de propagación:  $\hat{z}$  ; polarización circular a izquierdas ; b)  $|\vec{P}_m| = \frac{1}{120\pi} \text{ W/m}^2$  ;  
 c)  $\vec{E}_r(\vec{r}) = -E_o(\hat{z} + j\hat{y}) e^{-jk_0 z}$ , con polarización circular a derechas ; e)  $\vec{P}_m = \frac{E_o^2}{\eta_o}(\hat{x} + \hat{z})$ , es paralelo al plano conductor ; f)  $f = 212 \text{ MHz}$ .
2. Las curvas son las siguientes:





3. Puede hacerse mediante cualquiera de las dos caracterizaciones del ángulo de Brewster.
4. a)  $\theta_i = 26,57^\circ$ ,  $\theta_t = 63,43^\circ$ ; b)  $\vec{k}_i = 2\pi \frac{1}{\sqrt{5}}(\hat{x} + 2\hat{z})$ ,  $\vec{k}_r = 2\pi \frac{1}{\sqrt{5}}(\hat{x} - 2\hat{z})$ ,  $\vec{k}_t = \pi \frac{1}{\sqrt{5}}(2\hat{x} + \hat{z})$ ;  
 c) polarización elíptica; d)  $\theta_B = 26,56^\circ$ ; e)  $\rho_\perp = \frac{3}{5}$ ,  $\rho_\parallel = 0$ ,  $\tau_\perp = \frac{8}{5}$ ,  $\tau_\parallel = 2$ ;  
 d)  $\vec{E}_t = 4\sqrt{5}E_{0i} \left( \frac{\hat{x} - 2\hat{z}}{\sqrt{5}} + j\hat{y} \right) \exp \left( -j\pi \frac{1}{\sqrt{5}}(2x + z) \right)$ ; g) la onda reflejada está polarizada linealmente y la onda transmitida tiene polarización circular (helicoidal negativa); h)  $\theta_C = 30^\circ$ .
5. a) paralela al plano de incidencia; c)  $n = 1,4142$ ; d)  $\theta_i = 50,77^\circ$ .
6. a)  $\theta_i = 77,24^\circ$ ; b)  $|\vec{P}_{mr}| = 0,192 \frac{\mu W}{m^2}$ ,  $|\vec{P}_{mt}| = 0$ ;  
 c)  $\vec{E}_t(\vec{r}) = \hat{x}E_{0i} 2 \cos(k_0 n_2 z \cos i + \frac{\varphi_\perp}{2}) e^{-jk_0 n_2 y \sin i} e^{j\frac{\varphi_\perp}{2}}$ ; d) hay ondas estacionarias en la dirección z, y la distancia entre mínimos es:  $\Delta z = 1,561$  m.
7. a)  $p = \frac{2n}{1+n^2}$ ,  $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}$ ; b) la onda está centrada según esos mismos ejes; c)  $n = 3,7$ .
8. c) La situación se puede describir con cuatro ondas; d) aparecen ondas estacionarias en la dirección de incidencia y en la de reflexión; e) no varía.
9. a)  $d = m \frac{\lambda_0}{2n}$ ,  $m$  entero; b)  $n = 2$ .

## Capítulo 5: Guías de onda

2.  $a \geq 5 \text{ cm}$

3. a)  $a \geq 7,5 \text{ cm}$   $b \leq 3,75 \text{ cm}$ ; b)  $f \leq 6 \text{ GHz}$

4. a)  $A = 0$ ;  $k_x = m\pi/a$ ;  $\beta = \sqrt{k_0^2 - (m\pi/a)^2}$

b)  $\vec{H}(\vec{r}) = \frac{E_0}{\omega \mu_0} (-\hat{x}\beta \sin k_x x + \hat{z} j k_x \cos k_x x) e^{-j\beta z}$ ; c) Solamente es posible el modo  $\text{TE}_{10}$ ;

d)  $P = \frac{1}{4} \frac{\beta}{\omega \mu_0} |E_0|^2 ab \text{ (W)}$ ; e)  $\vec{E}_{total}(\vec{r}) = -2j \hat{y} E_0 \sin k_x x e^{-j\beta z_0} \sin \beta(z - z_0)$ .

6.  $f_{min} = 8,476 \text{ GHz}$ .  $f_{max} = 9,128 \text{ GHz}$

7. d) Se refleja el 13% y se transmite el 87%.

8. a) un único modo:  $\text{TE}_{10}$ ; b) tres modos:  $\text{TE}_{10}$ ,  $\text{TE}_{20}$  y  $\text{TE}_{30}$ . El  $\text{TE}_{40}$  está justo en corte, al igual que el  $\text{TE}_{01}$ ; c)  $\alpha_1 = 2\pi/3 \times 10^2$ ,  $\alpha_2 = 2\pi \times 10^2$ ;

d) 
$$\begin{cases} B = 0, & A \sin \alpha_1 d = C \sin \alpha_2 d + D \cos \alpha_2 d, \\ \alpha_1 A \cos \alpha_1 d = \alpha_2 (C \cos \alpha_2 d - D \sin \alpha_2 d), & C \sin \alpha_2 a + D \cos \alpha_2 a = 0; \end{cases}$$

e)  $\tan \alpha_1 d = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \tan \alpha_2 (d - a)$ ; f) Esos valores de  $d$  son los grosores mínimos de la zona de

dieléctrico para los que pueden existir los modos  $\text{TE}_{20}$  y  $\text{TE}_{30}$ , respectivamente, puesto que estamos tomando los valores de  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  que hacen  $\beta=0$  en ambos casos.

9. a)  $L=1,5 \text{ m}$ ; c)  $W = \epsilon_0 A^2 \pi \frac{\lambda}{4} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$ ; d)  $\vec{J}_s = -\hat{z} j \frac{k}{\omega \mu_0} \frac{A}{b} \cos kz$ . Debe hacerse la ranura en la

dirección de las corrientes para no interrumpirlas, porque de lo contrario quedarían afectados los campos en el interior del cable.

## Capítulo 6: Radiación de antenas elementales

1. b)  $\vec{H}_{rad}(\vec{r}) = 2jk_0 \frac{I_0 h}{4\pi r} \sin \theta \cos(kd \cos \theta) e^{-jk_0 r} \hat{\phi}$ ; c)  $\vec{P}_m = \frac{1}{8} \eta_0 \left( \frac{k_0 I_0 h}{\pi r} \right)^2 \sin^2 \theta \cos(kh \cos \theta) \hat{r}$ ,

$$W = \pi \eta_0 I_0^2 \left( \frac{h}{\lambda} \right)^2 \left[ \frac{2}{3} - \frac{\cos 2kd}{2(kd)^2} + \frac{\sin 2kd}{4(kd)^3} \right].$$

2. a)  $\vec{E}_{rad}(\vec{r}) = \omega C \frac{e^{-jkr}}{r} \sin \theta \hat{\phi}$ ,  $\vec{H}_{rad}(\vec{r}) = -\frac{\omega C}{\eta_0} \frac{e^{-jkr}}{r} \sin \theta \hat{\theta}$ ; b)  $W = \frac{4}{3} \pi \frac{(\omega C)^2}{\eta_0}$ ; c) resulta igual al del dipolo eléctrico.

3. a)  $\vec{E}_{rad}(\vec{r}) = -j\omega \frac{\mu_0}{4\pi} I_0 h \frac{e^{-jkr}}{r} (1 + 2 \cos(kd \sin \varphi)) \sin \varphi \hat{\phi}$ ; b)  $d = 0,5$  m; c) los nulos están únicamente en la dirección X y en la dirección Y; d) en la dirección Z.

4. c)  $\psi = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ ; d) los ceros están en  $\varphi = \pm 107,03^\circ$ .

5. b1) polarización lineal en ambas direcciones; b2) polarización elíptica en la dirección X y lineal en la dirección Y; c) tendremos polarización circular si  $\alpha=90^\circ$ , en la dirección X.

6.  $\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} I_0 \pi a^2 \left( jk + \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} \sin \theta \hat{\phi}.$

## Bibliografía

### *Textos de referencia y consulta*

*Electromagnetic fields and waves*. Paul Lorrain, Dale R. Corson and Françoise Lorrain. Freeman & Co., 1988. Existe la traducción al castellano de una edición anterior: *Campos y Ondas Electromagnéticos*. Paul Lorrain, Dale R. Corson. Selecciones Científicas, 1972.

*Electromagnetic fields and waves*. Magdy Iskander. Prentice Hall, 1992.

*Electromagnetismo aplicado*. Martin.A. Plonus. Reverté, 1982.

*Elements of Engineering Electromagnetics*, 3<sup>rd</sup> ed. N. Narayana. Rao. Prentice Hall, 1993.

*Fundamentos de electromagnetismo para ingenieros*. David K. Cheng. Addison-Wesley iberoamericana, 1997.

*Campos electromagnéticos*. R. K. Wangsness. Limusa, 1983.

*Electromagnetismo*. John D. Kraus. McGraw-Hill, 1986 .

*Fundamentos de la teoría electromagnética*. John R. Reitz, Frederick J. Milford, Robert W. Christy. Addison-Wesley, 1995.

*Engineering Electromagnetism*. A. J. Baden Fuller. John Wiley & sons, 1993.

### *Textos complementarios*

*Fields and waves in Communications Electronics*. S. Ramo, F. J. Whinnery , T. V. Duzer, John Wiley and sons. 1984.

*The Feynman lectures on Physics, vol.II.* Richard P. Feynman, Robert B. Leighton, Matthew Sands. Addison-Wesley, 1964 (versión en castellano de ed. Fondo Educativo Interamericano, 1972).

*Electromagnetic fields and energy.* Hermann A. Haus , James R.Melcher. Prentice Hall, 1989.

*Classical Electrodynamics.* John. D. Jackson. John Wiley & sons, 1975 (existe una versión en castellano de Ed. Alhambra, 1980).

*Advanced Engineering Electromagnetics.* Constantine A. Balanis. John Wiley & sons, 1989.

*Electricity and Magnetism.* Edward. M. Purcell. McGraw-Hill, 1966 (versión en castellano de Ed. Reverté, 1992).

*Classical Electricity and Magnetism.* W. Panofsky and M. Phillips. Addison-Wesley, 1971.

*Principles of Electricity and Magnetism.* Emerson M. Pugh, Emerson W. Pugh. Addison-Wesley, 1970.

*Electromagnetic Theory.* Julius A. Stratton. McGraw-Hill, 1941.

*Electromagnetics.* Robert S. Elliot. McGraw-Hill, 1966.

*Ingeniería de Radio.* Frederick E. Terman. Ed. Arbó, 1952 (traducción al castellano de Radio Engineering de ed. McGraw-Hill).

*Las teorías de los campos de fuerza.* William Berkson. Alianza Editorial, 1981 (traducción al castellano de *Fields of Force - The development of a world view from Faraday to Einstein*, Routledge & Kegan Paul, 1974).

## Índice alfabético de materias

- Ampère
  - ley de, 87, 99, 128
  - ley de la fuerza de, 77
- Amperio, unidad de intensidad de corriente (A)
- Ángulo sólido, 21
- Anisótopos, materiales, 61
- Apantallamiento eléctrico, 43, 44, 414
- Apertura numérica de una fibra, 346-347
- Atenuación
  - constante de, 265, 348, 383-384
  - de ondas planas, 267, 348
  - en cavidades resonantes, 393-395
  - en guías conductoras, 382-384
- Autoinductancia, 110
  - de una bobina toroidal, 111
  - de un cable coaxial, *Prob.1.23*
  - de una línea bifilar, *Prob.1.24*
- Bessel, funciones de, 386-387, *Anexo C*
- Biot y Savart, ley de, 82
- Brewster, ángulo de, 333-337
- Cable coaxial, 41, *Prob. 1.23*, 388-390
- Campo
  - conservativo, 24, 37
  - electrostático, 16 y ss.
  - electrostático en la atmósfera, *Prob.1.1*
  - despolarizante, 67
  - inducido o cercano, 429-430
  - irrotacional, 25
  - local, 59
  - magnético terrestre, *Prob.1.20*
  - magnetostático, 76 y ss.
  - radiado o lejano, 425-426
  - solenoidal, 85-86
- Capacidad
  - coeficientes de, 72
  - de un cable coaxial, 73
  - de un condensador esférico, 74
  - de un condensador plano, 73
  - de una línea con retorno por tierra, *Prob.1.10*
- Carga eléctrica
  - conservación de la, 67, 132
  - densidad superficial de, 17, 290, 322
  - densidad volúmica de, 17
  - imagen, 46
  - libre, 67
  - ligada, 62-63, 67, 153-154
  - puntual, 16
- Cavidad resonante, 296, 390-394
- Circuitos acoplados magnéticamente, 110
- Coefficientes
  - de reflexión y transmisión, 330, 332
  - de reflectividad y transmitividad, 333
- Coercitivo, campo, 108
- Condensador, 73-74, *Probs. 1.8, 1.11, 1.12*
- Condiciones de contorno, 43-44, 163-172, 281-283
- Conducción, corriente de, 79
- Conductividad, 79, 149-150
- Conductor, 30
  - buen conductor, 269, 348
  - carga en un, 31, 36-37
  - campos en un, 31, 35, 148
- Conservación
  - de la carga, 67, 132
  - de la energía, 174, 285
- Constante dieléctrica, 64

- compleja, 263, 348
- Continuidad, ecuación de, 132, 415, 420
- Coordenadas, sistemas de, *Anexo A*
- Corriente
  - de conducción, 79
  - de convección, 79
  - de desplazamiento, 130
  - de magnetización, 98
  - estacionaria, 80, 415
  - densidad superficial de, 77, 291, 383
  - densidad volúmica de, 77, 274
- Coulomb
  - ley de, 15
  - norma de, 90
- Coulombio, unidad de carga (C)
- Corte
  - frecuencia de, 378
  - modos en, 377-379
- Crítico, ángulo, 337-339
- Cuadripolo, 54-55
- Curie, temperatura de, 108
- D'Alembert, ecuación de, 206
- Derivada direccional, 25
- Desarrollo multipolar, 52-56
- Desplazamiento eléctrico, 64, 154, 261
- Diagrama de radiación, 428
- Diamagnetismo, 105
- Dieléctricos, 58, 151
- Dipolo
  - eléctrico real, 54
  - eléctrico ideal, 57
  - eléctrico oscilante, 420-430
  - en lambda medios, 436-438
  - fuerza sobre un, 58, 96
  - magnético real, 95
  - magnético ideal, 96
  - magnético oscilante, *Prob. 6.6*
- Dirac, función delta de, 420, *Anexo D*
- Directividad, 429
- Dirichlet, problema de, 44
- Dispersión, ecuación de, 379, 386, 400
- Divergencia, teorema de la, 135
- Dominios ferromagnéticos, 106-107
- Ecuación
  - de continuidad, 132, 415, 420
  - de onda homogénea, 205
  - de onda inhomogénea, 204
- Ecuaciones constitutivas del medio, 203
- Electrostática, *Cap. I*, 180-181
- Elipse de polarización, 243
- Efecto pelicular, 271-272, 350
- Energía
  - de un sistema de carga puntuales, 49-50
  - de un continuo de carga, 50-51, 70-71
  - densidad de, 176, 190-191
  - electromagnética, 172, 393
  - magnética, 109-110
  - potencial, 48
- Esfera conductora, 32, 40
- Esfera dieléctrica, *Prob. I.6*
- Espira de corriente, 90
- Estacionario, régimen, 76, 355
- Factor de calidad, Q, 393
- Faraday, ley de, 109, 124-128
- Faradio, unidad de capacidad (F)
- Fase, velocidad de, 234, 266, 340, 379
- Fasor, 183-184, 195
- Ferromagnetismo, 106
- Fibra óptica, 346, 405-408
- Flujo
  - de campo eléctrico, 21, 122
  - de campo magnético, 109, 126-128
  - de densidad de potencia, 176, 285
- Fourier, transformada de, 195
- Fresnel, fórmulas de, 330, 332
- Fuerza
  - de Lorentz, 81, 134
  - electromotriz, 109, 125
  - ejercida por un imán, *Prob. I.21*
  - entre corrientes, 76-77
  - entre las placas de un condensador, *Prob. I.7*
  - sobre una carga en movimiento, *Probs. I.16, I.17, I.18*
- Ganancia directiva, 429
- Gauss
  - unidad de campo magnético CGS (G)
  - ley de, 21, 63-65, 122-124
  - teorema de, 135
- Guías de onda,
  - de paredes conductoras, 320, 370-388
  - dieléctricas, 345, 395-405
- Gradiente, 25
- Green, teorema de, 43

- Hall, efecto, *Probs.1.19,1.22*  
Helmholtz,  
    ecuación de, 219  
    teorema de, 90  
Henrio, unidad de inductancia (H)  
Histéresis, curva de, 108  
  
Imágenes, método de las, 45-48, *Prob.1.4*  
Imán permanente, 108  
Impedancia  
    de una antena, 427, 433  
    intrínseca de un medio, 208, 264  
    de onda, 356-358  
    superficial de un conductor, 273, 382  
Incidencia,  
    ángulo de, 309  
    plano de, 308-309  
Inducción electromagnética, 109  
Inductancia mutua entre circuitos, 110  
Integración, ejemplos de, 18-20, 82-85  
Intensidad  
    de campo magnético, 99, 159  
    de corriente, 78  
  
Joule, pérdidas por efecto, 109  
Julio, unidad de energía (J)  
Kronecker, delta de, 53  
  
Laplace, ecuación de, 38,  
Laplaciana, 38, 204  
Láser, 298-299  
Legendre, polinomios de, 39  
Lenz, ley de, 126-127  
Línea de transmisión, 358, 369-370  
Líneas de campo, 26, 29  
Longitud de onda  
    en el espacio libre, 225  
    en guías de onda, 379  
Lorentz  
    fuerza de, 81  
    norma de, 417, 419  
Magnetización  
    corrientes de, 158  
    curva de, 106  
    vector, 98, 157  
Magnetostática, *Cap. 1*, 181-182  
Maxwell, ecuaciones de, 121, 134, 162, 182  
  
Medios  
    anisótropos, 61  
    conductores, 30, 148  
    dieléctricos, 58, 151  
    magnéticos, 96, 156  
    no lineales, 62  
Modos en guías de onda, 321, 345  
    en corte, 377  
    guiados, 377, 380  
    radiados, 404-405  
    TE, 372, 373-375, 387-388  
    TEM, 388-390  
    TM, 372, 375-376, 385-387  
Momento  
    cuadripolar, 53  
    dipolar eléctrico, 53  
    dipolar magnético, 94  
    de una fuerza, 97  
Motor, *Prob.1.22*  
Movilidad de un portador de carga, 79  
Multicapas dieléctricas, 354  
  
Neumman,  
    funciones de, 407, *Anexo C*  
    problema de, 44  
Número de onda, 219  
  
Oersted, 76  
Ohm  
    unidad de resistencia ( $\Omega$ )  
    ley de, 79  
Onda  
    forma de, 207  
    ecuación de, 204-206  
    esférica, 424  
    estacionaria, 294-296, 315-320  
    evanescente, 340  
    localmente plana, 425-426  
    parcialmente estacionaria, 304-307  
    plana uniforme, 201-276  
    viajera, progresiva o regresiva, 207  
Operadores diferenciales, *Anexo B*  
Paramagnetismo, 105  
Pérdidas  
    ángulo de, 265  
    de conducción, 262-263, 383-384  
    dieléctricas, 260-262, 382-383  
    en conductores, 174



- tangente de, 266
- Permeabilidad, 77, 100, 262
- Permitividad, 15, 64, 261-262
- Plano
  - de carga homogénea, 18
  - de corriente uniforme, 215
  - de fase constante, 234
  - de incidencia, 308-309
- Poisson, ecuación de, 38, 68
- Polarización
  - carga de, 63, 67
  - de ondas planas, 241-253
  - circular, 255-257
  - elíptica, 243-246
  - lineal, 253-255
  - vector, 59-60, 152
- Polarizador, 257, *Prob. 3.10*
- Potencia
  - densidad de, 176
  - de una onda plana, 238-240
  - de un modo, 381
  - radiada por una antena, 426, 432
- Potencial
  - electrostático, 23
  - escalar eléctrico, 417
  - problemas de, 37-48
  - vector magnético, 89, 417
- Potenciales retardados, 418
- Poynting
  - teorema de, 174
  - vector de, 176, 188-189
- Profundidad de penetración, 271, 349
- Propagación
  - constante de, 266
  - ionosférica, 342-344
- Radiación
  - de un dipolo eléctrico, 426-429
  - de un dipolo magnético, *Prob. 6.6*
  - de un dipolo en  $\lambda$  medios, 436
- Ranura, en una guía de onda, *Prob. 5.9*
- Recubrimiento antirreflectante, 362-364
- Reflexión,
  - ángulo de, 310
  - total, 337-342
- Refracción,
  - ángulo de, 324
  - índice de, 304
- Régimen senoidal permanente, 182-183, 185-195
- Relación axial, 247-248
- Relación de onda estacionaria, 306
- Remanencia, 108
- Resistencia, 177-178
  - de radiación, 433
- Resonador, 390-391
- Resonancia, frecuencia de, 392
- Rotacional, teorema del, 138
- Saturación de la magnetización, 106
- Segmentos, método de los, 92-93
- Semiconductores, corriente en, 80
- Sentido de giro, 248
- Siemens, unidad de admitancia (S)
- Snell, leyes de, 324-325
- Stokes, teorema de, 138
- Superficie equipotencial, 27, 30
- Superposición, principio de, 16, 28, 243, 257, 433
- Susceptibilidad
  - dieléctrica, 61-62, 154-155
  - magnética, 100, 159
- Tesla, unidad de campo magnético B (T)
- Trayectoria de una carga, *Probs. 1.16, 1.17, 1.18*
- Unicidad, teorema de, 43
- Vector de onda, 219
- Velocidad
  - de arrastre, 79
  - de fase, 234, 266, 340, 379
  - de la luz, 206
- Voltio, unidad de potencial (V)
- Watio, unidad de potencia (W)
- Weber, unidad de flujo magnético (Wb)
- Weiss, teoría de los dominios de, 106-107